

SOLUCION FORMAL DE LAS EE

CASO $\Sigma \Delta L E$

(por caso $\Sigma \Delta N L I n$. ver Apunte -opcional)

1. Sistema libre

$$\begin{array}{l|l} \text{Sistema escalar :} & \dot{x}(t) = a x(t) \\ x(t) \in \mathbb{R}, t \geq 0, a \in \mathbb{R} & x(0) = x_0 \text{ c.i.} \end{array}$$

Solución :

$$x(t) = e^{at} x_0, t \geq 0$$

$$\text{con } e^{at} := 1 + at + \frac{1}{2!} a^2 t^2 + \dots$$

$$(1) \text{ Sistema vectorial: } \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = A x(t) \\ x(t) \in \mathbb{R}^n, t \geq 0, A \in \mathbb{R}^{n \times n} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} x(0) = x_0 \text{ c.i.} \end{array} \right.$$

Solución propuesta (Ansatz)

(2) por analogía :

$$x(t) = e^{At} x_0$$

(3) con la def.

$$e^{At} := I + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \dots$$

Verificación :

(2) vale sii $e^{At} x_0$ satisface la Ecuación (diferencial) de Estado

(1) , y se satisface la c.i., i.e.:
 $\boxed{e^{At} x_0|_{t=0} = x_0}$

$$\boxed{\frac{d}{dt}(e^{At} x_0) = \frac{d}{dt}(e^{At}) x_0 =}$$

$$= \frac{d}{dt} \left(I_{n \times n} + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \dots \right) x_0 =$$

$$= \left(0_{n \times n} + A + A^2 t + \frac{1}{2} A^3 t^2 + \dots \right) x_0 =$$

$$= A \left(I_{n \times n} + At + \frac{1}{2} A^2 t^2 + \dots \right) x_0 =$$

$$= \boxed{A e^{At} x_0}$$

$$\therefore \underline{x(t) = e^{At} x_0 \text{ es solución de (1)}}$$

Def.: $\phi(t) := e^{At} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \forall t \geq 0$

MATRIZ DE TRANSICION de (1)

2. Sistema forzado

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (4), \quad t \geq 0$$

$$x(0) = x_0 \text{ c.i.}, \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in \mathbb{R}^m$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

Algunas Propiedades de $\phi(t)$ (5)

Demostarlas:

i. $\exists \phi^{-1}(t) = \phi(-t)$

ii- $\phi(t)$ satisface la EE (1) :

$$\dot{\phi}(t) = A\phi(t), \text{ con } \phi(0) = I_{n \times n}$$

iii.

Prop de Markov

$$\phi(t_2) \cdot \phi(t_1) = \phi(t_1 + t_2)$$

Solución de (4). Ansatz :

Lagrange : variación de las constantes

$$x(t) = \phi(t) z(t) \quad (6) \quad \dot{z}(t)?$$

Hallamos $z(t)$ como solución de una ec. dif. , luego $\rightarrow x(t)$

$$(6) \Rightarrow z(t) = \phi^{-1}(t) x(t) = \phi(-t) x(t)$$

$$z(0) = \phi(0) x(0) = x(0) = x_0$$

$$(6) \Rightarrow \dot{x} = \dot{\phi} z + \phi \dot{z}$$

$$(4) \text{ y } (5ii) \Rightarrow Ax + Bu = A\phi z + \phi \dot{z}$$

$$(6) \Rightarrow A\phi z + Bu = A\phi z + \phi \dot{z}$$

$$\therefore \dot{z} = \phi^{-1} B u, \text{ con } z(0) = x_0$$

$$\therefore z(t) = z_0 + \int_0^t \phi^{-1}(\tau) B u(\tau) d\tau$$

$$\therefore z(t) = x_0 + \int_0^t \phi(-\tau) B u(\tau) d\tau$$

$$\therefore X(t) = \phi(t) x_0 + \phi(t) \int_0^t \phi(-\tau) B u(\tau) d\tau$$

$$(7) \quad X(t) = \phi(t) x_0 + \int_0^t \phi(t-\tau) B u(\tau) d\tau$$

$\mathcal{L}\{(4)\}$ y operando :

$$(8) \quad X(s) = (sI - A)^{-1} x_0 + (sI - A)^{-1} B U(s)$$

$\mathcal{L}\{(7)\}$ y comparando con (8) $\Rightarrow$

$$(9) \quad \mathcal{L}\{\phi(t)\} =: \underline{\Phi(s)} = (sI - A)^{-1}$$

$$(9') \quad \underline{\mathcal{L}\{e^{At}\} = (sI - A)^{-1}}$$

OBSERVAR: Traslación formal válida para e^{At} de reglas de operación válidas para el caso escalar e^{at} !!

(7) se puede reescribir como:

$$(7') \quad \underline{x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-z)} B u(z) dz}$$

Agregando a (4) la ec. de salida

$$(4) \quad \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \quad , \quad x(0) = x_0$$

$$(10) \quad y(t) = C x(t) + D u(t)$$

se tiene ,

$$(11) \quad \underline{y(t) = C e^{At} x_0 + C \int_0^t e^{A(t-z)} B u(z) dz + D u(t)}$$

$$\mathcal{L}\{(11)\} \Rightarrow$$

$$(12) \quad \underline{Y(s) = C (sI - A)^{-1} x_0 + [C (sI - A)^{-1} B + D] U(s)}$$

con lo que la Matriz Transferencia

$$\text{resulta: } \underline{G(s) = C (sI - A)^{-1} B + D} \quad (13)$$

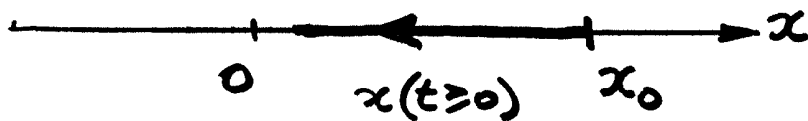
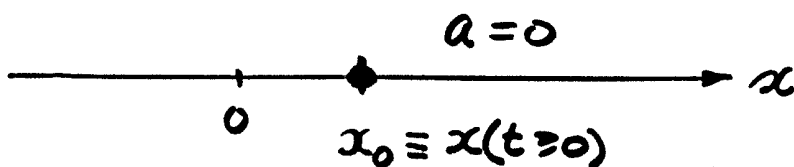
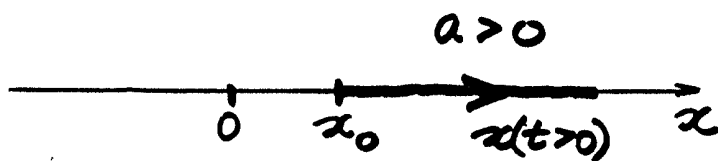
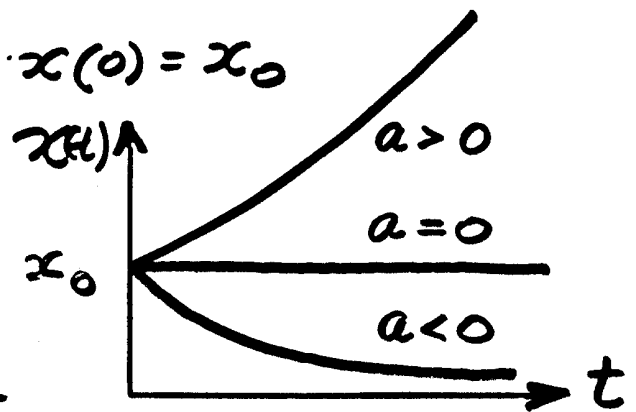
TRAYECTORIAS EN EL ESPACIO DE ESTADOS

ORDEN $n=2 \Rightarrow$ PLANO DE FASES
RETRATO DE FASES

$n=1$ $\dot{x}(t) = a x(t)$, $x(0) = x_0$

$$x(t) = e^{at} x_0$$

$\Rightarrow$

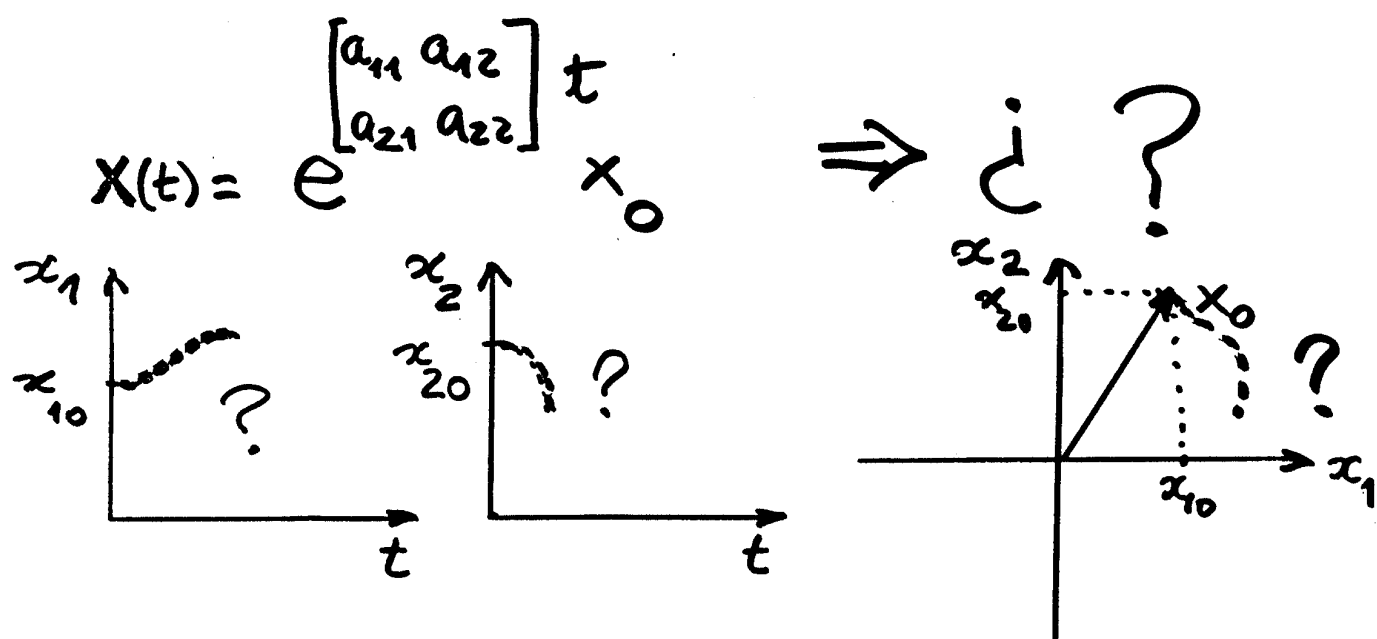


Trayectorias en el EE unidimensional.

$n \geq 1$ (P.ej. $n=2$) $\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$x(t) = e^{At} x_0$$



¿Cómo son las tray. en el Plano de Fase?

Dificultad debido al acoplamiento de las EE :

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \\ \dot{x}_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{¡ No se pueden} \\ \text{resolver indepen-} \\ \text{dientemente!} \end{array}$$

Solución : (Ansatz!) Transformar el problema complejo (acoplado) en problemas simples (n problemas desacoplados), resolverlos, anti-transformar y encontrar la solución al problema original.

Problema original

$$\dot{x}(t) = A x(t) \quad (14)$$

$$x(0) = x_0, \quad A \text{ densa}$$

Problema transformado

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A} \tilde{x}(t) \quad (15)$$

$$\tilde{x}(0) = \tilde{x}_0, \quad \tilde{A} \text{ diagonal!}$$

$$\text{Ansatz: } x = V \tilde{x} \quad (16)$$

V : matriz regular (invertible!) de
la transformación de semejanza

$$V = [v_1 | v_2 | \dots | v_n]$$

n vectores (columnas) l.i. ! ($\Leftrightarrow \exists \tilde{V}^{-1}$)

¿ V ? : V tal que $\tilde{A}$ diagonal

Reemplazando $(16) \rightarrow (14)$

$$V \dot{\tilde{x}} = A V \tilde{x} \rightarrow \dot{\tilde{x}} = V^{-1} A V \tilde{x} \quad (17)$$

Comparando (17) y (15) $\Rightarrow$

$$\tilde{A} \doteq \text{diag}(\tilde{a}_{11}, \tilde{a}_{22}, \dots, \tilde{a}_{nn}) = V^{-1} A V \quad (18)$$

$$\therefore \overbrace{V \tilde{A} = A V} \rightarrow \left[A v_1 \mid \dots \mid A v_n \right] = \left[V \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \mid \dots \mid V \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \tilde{a}_{nn} \end{bmatrix} \right]$$

$$[A v_1 \mid \dots \mid A v_n] = [v_1 \tilde{a}_{11} \mid \dots \mid v_n \tilde{a}_{nn}]$$

$$A v_i = \tilde{a}_{ii} v_i \Leftrightarrow \underline{(\tilde{a}_{ii} I_{n \times n} - A) v_i = 0}$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

$$\therefore \tilde{A} = \text{diag}(\tilde{a}_{ii}, i \in \underline{n}) \Leftrightarrow$$

$\tilde{a}_{ii}$ autovalores de A y V es la
matriz de los correspondientes
autovectores de A

Problema original :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{n1}x_n \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases}, \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{bmatrix} = x_0$$

Problema transformado :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \lambda_1 \tilde{x}_1 & \rightarrow \tilde{x}_1(t) = e^{\lambda_1 t} \tilde{x}_{10} \\ \vdots \\ \dot{\tilde{x}}_n = \lambda_n \tilde{x}_n & \rightarrow \tilde{x}_n(t) = e^{\lambda_n t} \tilde{x}_{n0} \end{cases}$$

Con $\lambda_i := \tilde{a}_{ii}$ autovalores de A

y la c.i. del probl. transf. $\tilde{x}_0 = V^{-1} x_0$

Matriz de Transición del Probl. Transf.

$$e^{\tilde{A}t} = I_{n \times n} + \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{bmatrix} t + \frac{1}{2!} \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_n^2 \end{bmatrix} t^2 + \dots$$

$$e^{\tilde{A}t} = e^{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{bmatrix} t} = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}) = \tilde{\Phi}(t)$$

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ & \ddots \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \tilde{x}_0 = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ & \ddots \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \tilde{V}^{-1} x_0$$

Solución problema original :

$$x(t) = V \tilde{x}(t) = V \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ & \ddots \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \tilde{V}^{-1} x_0$$

$$x(t) = V \tilde{\Phi}(t) \tilde{V}^{-1} x_0 = \Phi(t) x_0$$

lo que muestra que

$$\tilde{\Phi}(t) = \tilde{V}^{-1} \Phi(t) V$$

i.e. entre las matrices de transición existe la misma relación que entre las matrices de evolución A y $\tilde{A}$:

$$\tilde{A} = \tilde{V}^{-1} A V$$