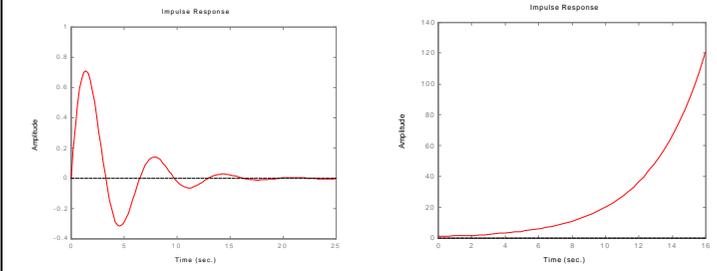


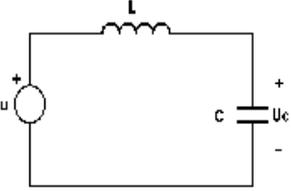
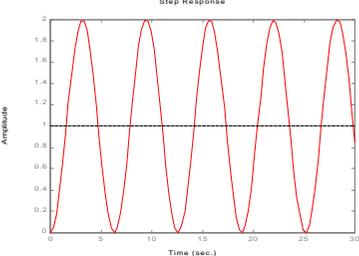
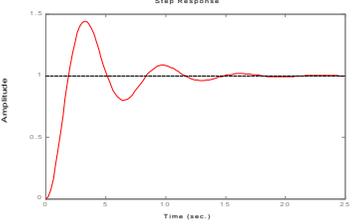
**Estabilidad Externa de Sistemas Dinámicos****Código: Tab\_Estab**

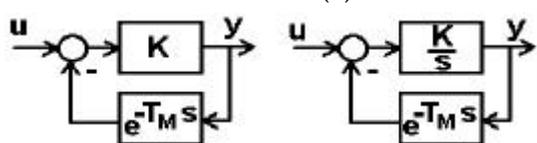
A-702 Control I

E-504 Dinámica de los Sistemas Físicos

<u>Tipo</u>	<u>Definición</u>	<u>Alcance</u>	<u>Ejemplos y Observaciones</u>
<b>BIBO- Estabilidad</b>	<u>Def.:</u> Un sistema dinámico es <b>BIBO-Estable</b> ( <b>B</b> ounded <b>I</b> nput – <b>B</b> ounded <b>O</b> utput) si y sólo si ( <b>sii</b> ) su respuesta a toda entrada acotada es acotada en todo tiempo.	<b>General</b>	<u>Obs.:</u> Esta definición no sirve como criterio práctico de verificación.
<b>m- Estabilidad</b>	<u>Def.:</u> Un sistema dinámico lineal y estacionario es <b>μ-Estable</b> <b>sii</b> su respuesta al escalón es convergente.	<b>Lineales y Estacionarios</b> <b>ΣΔLE</b>	<u>Obs.:</u> Esta definición sirve a la vez como criterio práctico de verificación.

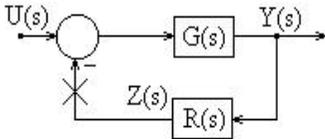
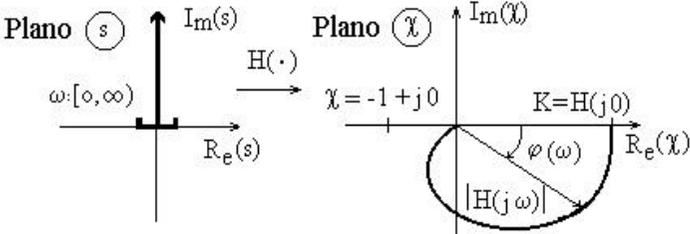
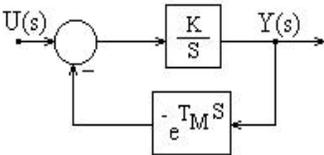
<u>Criterio</u>	<u>Formulación</u>	<u>Alcance</u>	<u>Ejemplos</u>
<b>BIBO-estabilidad</b> Respuesta al Impulso $g(t)$	Un ME es BIBO-est <b>sii</b> su respuesta al impulso es absolutamente integrable,  i.e., <b>sii</b> se satisface:  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t  g(t)  dt = \int_0^{+\infty}  g(t)  dt < +\infty$	<b>ΣΔLE</b>	

<u>Criterio</u>	<u>Formulación</u>	<u>Alcance</u>	<u>Ejemplos</u>
<p><b>BIBO-Estabilidad y m-Estabilidad</b></p> <p>Relación entre ambas definiciones</p>	<p>Un <math>\Sigma\Delta</math>LE es <i>m-Estable</i> sii</p> $\exists \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) < +\infty$ <p><i>BIBO-Estable</i> <math>\Rightarrow</math> <i>m-Estable</i></p> <p>ya que</p> $ \lim_{t \rightarrow \infty} h(t)  = \left  \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t g(t) dt \right  \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t  g(t)  dt$ <p>pero para una gran clase* de ME de <math>\Sigma\Delta</math>LE, se puede establecer la condición suficiente y necesaria, i.e.,</p> <p><i>BIBO-Estable</i> <math>\hat{U}</math> <i>m-Estable</i></p> <p>*FTR, EDO, EeD, FTdiscreta, y FTs del tipo</p> $G(s) = \frac{\tilde{G}(s)}{1 + \tilde{G}(s)e^{-ts}}$ <p>, con <math>\tilde{G}(s)</math> FTR</p>	<p><math>\Sigma\Delta</math>LE</p>	<div style="text-align: center;">  </div> <p>FTR: <math>\frac{Uc(s)}{U(s)} = \frac{1}{1 + LCs^2}</math></p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>En este ejemplo no <math>\exists</math> el límite <math>\therefore</math> no es <i>m-Estable</i></p> <p>FTR: <math>G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.5s + 1}</math></p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>En este ejemplo el límite existe <math>\therefore</math> es <i>m-Estable</i></p>

<u>Criterio</u>	<u>Formulación</u>	<u>Alcance</u>	<u>Ejemplos</u>
<p><b>Relación entre la Estabilidad de la FT y sus Singularidades</b></p>	<p>Un <math>\Sigma\Delta</math>LE es estable sii su FT (G(s)) <b>satisface:</b></p> $\exists  G(s)  < +\infty \quad \forall s \in \bar{C}^+$ <p>donde <math>\bar{C}^+</math> es el semiplano complejo derecho cerrado (incluye al eje Imaginario), i.e.,</p> $\bar{C}^+ := \{ s = \sigma + j\omega \mid \sigma \geq 0, \sigma, \omega \in \mathbb{R} \}$ <p>Como consecuencia de lo anterior:</p> <p><b>Una FTR es estable sii no tiene polos en <math>\bar{C}^+</math>,</b></p> <p>o equivalentemente</p> <p><b>los ceros de su denominador están todos en <math>C^-</math></b></p> <p>Observación importante: <b>Los ceros de la FT no influyen sobre su estabilidad.</b></p>	<p><math>\Sigma\Delta</math>LE</p>	<p>1- <math>G_1(s) = \frac{K}{1+Ts}</math>, <math>T &gt; 0 \Rightarrow</math> polo en <math>s_p = -1/T \in C^- \therefore</math> <b>estable</b></p> <p>2- <math>G_2(s) = \frac{K}{1-Ts}</math>, <math>T &gt; 0 \Rightarrow</math> polo en <math>s_p = 1/T \notin C^- \therefore</math> <b>inestable</b></p> <p>3- <math>G_3(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2}</math> polos en <math>\{s_{1,2} = \pm j\omega_n\} \subset \bar{C}^+ \therefore</math> <b>inestable</b></p> <p>4- <math>G_4(s) = \frac{s}{s^2 + \omega_n^2}</math> Idem <math>G_3</math>; el cero en <math>s = 0</math> es irrelevante</p> <p>5- <math>G_5(s) = \frac{K}{1 + Ke^{-T_m s}}</math> polos en <math>\left\{ s_n = \frac{1}{T_m} \ln(K) + j \frac{p}{T_m} (2n+1) \right\}</math> con <math>n \in \mathbb{Z}</math>; FT Estable <b>sii</b> <math>0 &lt; K &lt; 1</math></p> <p>6- <math>G_6(s) = \frac{K}{s + Ke^{-T_m s}}</math> los polos salen de resolver la ecuación <math>e^{-T_m s} = -\frac{K}{s}</math></p> <p>que por ser trascendente no posee solución formal analítica. En este caso el criterio ofrece una dificultad práctica para aplicarlo, ya que es difícil calcular los polos. Para FT no racionales (con retardos puros) son muy útiles los métodos gráficos.</p> <p>DBs de las FTs 5 y 6; <math>G_{5,6}(s) := \frac{Y(s)}{U(s)}</math></p> 

<u>Criterio</u>	<u>Formulación</u>	<u>Alcance</u>	<u>Ejemplos</u>
<p style="text-align: center;"><b>Criterios Algebraicos sobre la FT</b></p> <p><b>Criterio de ROUTH-HURWITZ</b></p> <p>Routh propuso este test en 1874 y de modo independiente, Hurwitz propuso un test equivalente en 1895.</p>	<p>Sea <math>G(s)</math> una FTR con grado “<math>n</math>”, entonces:</p> <p>a) Si <math>n \leq 2</math> <math>\therefore G(s)</math> es estable <math>\hat{U}</math> el polinomio de su denominador es completo y sin cambio de signo en sus coeficientes. (Condición necesaria y suficiente)</p> <p>b) si <math>n &gt; 2</math> <math>\therefore G(s)</math> estable <math>\hat{P}</math> el polinomio de su denominador es completo y sin cambio de signo en sus coeficientes. (Sólo condición necesaria)</p> <p><b>Nota:</b> Se puede llegar a establecer la suficiencia de la condición para <math>n &gt; 2</math>. Para la obtención de la misma se conforma el llamado arreglo de Routh en base a cálculo de determinantes en función de los coeficientes del polinomio en análisis. Este método permite no sólo determinar la estabilidad si no también conocer el número de singularidades que se encuentran en semiplano real positivo del plano complejo.</p> <p>(ver Ogata, K. <i>Ingeniería de Control Moderna</i>, Segunda Edición, 1993, Prentice-Hall Hispanoamericana, Cap. 4)</p>	<p><math>\Sigma \Delta LE</math></p>	<p>1- <math>G_1(s) = \frac{K}{1+Ts}</math>, estable <math>\Leftrightarrow T &gt; 0</math></p> <p>2- <math>G_2(s) = \frac{K}{1+a_1s+a_2s^2}</math>, estable <math>\Leftrightarrow a_{1,2} &gt; 0</math></p> <p>3- <math>G_3(s) = \frac{1}{1+LCs^2}</math>, Inestable por ser su denominador incompleto.</p> <p>4- <math>G_4(s) = \frac{K}{1+a_1s+a_2s^2+a_3s^3}</math></p> <p><b>Inestable</b> si al menos un <math>a_i \leq 0</math>, <math>i=1, 2, 3</math>.</p> <p><b>Si <math>a_i &gt; 0 \forall i=1, 2, 3</math> no se puede asegurar la estabilidad.</b></p>

<u>Criterio</u>	<u>Formulación</u>	<u>Alcance</u>	<u>Ejemplos y Observaciones</u>																																																																										
<b><u>Routh-Hurwitz</u></b>	<p style="text-align: center;"><b><u>Arreglo de Routh-Hurwitz</u></b></p> <p>A partir de la función transferencia:</p> $G(S) = \frac{N(S)}{D(S)} \quad D(S) = a_0 S^n + a_1 S^{n-1} + \dots + a_{n-1} S + a_n$ <table style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>S^n</math></td><td style="padding: 5px;"><math>a_0</math></td><td style="padding: 5px;"><math>a_2</math></td><td style="padding: 5px;"><math>a_4</math></td><td style="padding: 5px;"><math>a_6</math></td><td style="padding: 5px;">...</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>S^{n-1}</math></td><td style="padding: 5px;"><math>a_1</math></td><td style="padding: 5px;"><math>a_3</math></td><td style="padding: 5px;"><math>a_5</math></td><td style="padding: 5px;"><math>a_7</math></td><td style="padding: 5px;">...</td> </tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"> <td style="padding: 5px;"><math>S^{n-2}</math></td><td style="padding: 5px;"><math>b_1</math></td><td style="padding: 5px;"><math>b_2</math></td><td style="padding: 5px;"><math>b_3</math></td><td style="padding: 5px;"><math>b_4</math></td><td style="padding: 5px;">...</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>S^{n-3}</math></td><td style="padding: 5px;"><math>c_1</math></td><td style="padding: 5px;"><math>c_2</math></td><td style="padding: 5px;"><math>c_3</math></td><td style="padding: 5px;"><math>c_4</math></td><td style="padding: 5px;">...</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>S^{n-4}</math></td><td style="padding: 5px;"><math>d_1</math></td><td style="padding: 5px;"><math>d_2</math></td><td style="padding: 5px;"><math>d_3</math></td><td style="padding: 5px;"><math>d_4</math></td><td style="padding: 5px;">...</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>\vdots</math></td><td style="padding: 5px;"><math>\vdots</math></td><td style="padding: 5px;"><math>\vdots</math></td><td></td><td></td><td></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>S^2</math></td><td style="padding: 5px;"><math>e_1</math></td><td style="padding: 5px;"><math>e_2</math></td><td></td><td></td><td></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>S</math></td><td style="padding: 5px;"><math>f_1</math></td><td></td><td></td><td></td><td></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>S^0</math></td><td style="padding: 5px;"><math>g_1</math></td><td></td><td></td><td></td><td></td> </tr> </table> <p>La Estabilidad se analiza con los coeficientes de la 1ra columna del arreglo: <math>a_0, a_1, b_1, c_1, d_1, \dots, e_1, f_1, g_1</math></p> <p>a) Si todos estos coeficientes son del mismo signo, entonces <math>D(s)</math> no tiene raíces con parte real positiva.</p> <p>b) Si hay cambios de signo, entonces el número de cambios de signo indica la cantidad de raíces con parte real positiva.</p>	$S^n$	$a_0$	$a_2$	$a_4$	$a_6$	...	$S^{n-1}$	$a_1$	$a_3$	$a_5$	$a_7$	...	$S^{n-2}$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	...	$S^{n-3}$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	...	$S^{n-4}$	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$	...	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				$S^2$	$e_1$	$e_2$				$S$	$f_1$					$S^0$	$g_1$					$\Sigma \Delta LE$	<p><b>Observación:</b> Cálculo de coeficientes.</p> $b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} \quad b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} \quad \dots$ $c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1} \quad c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1} \quad \dots$ $d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1} \quad d_2 = \frac{c_1 b_3 - b_1 c_3}{c_1} \quad \dots$ <p><b>Ejemplo:</b></p> $D(S) = S^4 + 4S^3 + 5S^2 + 14S + 24$ <table style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>S^4</math></td><td style="padding: 5px;"><math>1</math></td><td style="padding: 5px;"><math>5</math></td><td style="padding: 5px;"><math>24</math></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>S^3</math></td><td style="padding: 5px;"><math>4</math></td><td style="padding: 5px;"><math>14</math></td><td style="padding: 5px;"><math>0</math></td> </tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"> <td style="padding: 5px;"><math>S^2</math></td><td style="padding: 5px;"><math>3/2</math></td><td style="padding: 5px;"><math>24</math></td><td></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>S^1</math></td><td style="padding: 5px;"><math>-50</math></td><td style="padding: 5px;"><math>0</math></td><td></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>S^0</math></td><td style="padding: 5px;"><math>24</math></td><td></td><td></td> </tr> </table> $D(S) = (S+2) \cdot (S+3) \cdot (S^2 - S + 4)$ <p>Se tienen dos cambios de signo, esto nos dice que <math>D(s)</math> tiene dos raíces con parte real positiva.</p> <p><b>Aplicando este método se presentan muchas situaciones particulares, las cuales no han sido tratadas aquí.</b></p> <p><b>Bibliografía:</b> Ogata, K., <i>Ingeniería de Control Moderna</i>, Segunda Edición, 1993, Prentice-Hall Hispanoamericana, Cap. 4</p>	$S^4$	$1$	$5$	$24$	$S^3$	$4$	$14$	$0$	$S^2$	$3/2$	$24$		$S^1$	$-50$	$0$		$S^0$	$24$		
$S^n$	$a_0$	$a_2$	$a_4$	$a_6$	...																																																																								
$S^{n-1}$	$a_1$	$a_3$	$a_5$	$a_7$	...																																																																								
$S^{n-2}$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	...																																																																								
$S^{n-3}$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	...																																																																								
$S^{n-4}$	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$	...																																																																								
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$																																																																											
$S^2$	$e_1$	$e_2$																																																																											
$S$	$f_1$																																																																												
$S^0$	$g_1$																																																																												
$S^4$	$1$	$5$	$24$																																																																										
$S^3$	$4$	$14$	$0$																																																																										
$S^2$	$3/2$	$24$																																																																											
$S^1$	$-50$	$0$																																																																											
$S^0$	$24$																																																																												

<u>Criterio</u>	<u>Definición</u>	<u>Alcance</u>	<u>Ejemplos y Observaciones</u>
<p><b>Gráfico en el plano complejo</b></p>	<p><b>Criterio de Nyquist:</b> Se aplica a estructuras con realimentación:</p>  <p><math>F_a(s)</math>: Ganancia de lazo.  <math>F_a(s) = \frac{Z(s)}{U(s)} = G(s)R(s)</math></p> <p><math>F_c(s)</math>: Transferencia a lazo cerrado.  <math>F_c(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)R(s)} = \frac{G(s)}{1+F_a(s)}</math></p> <p>Conocida <math>F_a(s)</math> se estudia la curva o lugar geométrico de <math>F_a(j\omega)</math>, tomando <math>\omega \in (-\infty, \infty)</math>. La versión del criterio de Nyquist aquí adoptada considera <math>\omega \in [0, \infty)</math>.</p> <p>Dada una FT cualquiera, por ejemplo <math>F_a(s)</math>, se define la FT Armónica (FTA) asociada como la FT evaluada en <math>s = j\omega</math>.</p> <p>Este criterio estudia la curva de la FTA de la ganancia de lazo, para concluir sobre la estabilidad de la FT a lazo cerrado.</p> <p><b>Formulación:</b>  <math>F_c(j\omega)</math> es estable <math>\Leftrightarrow</math> la curva de <math>F_a(j\omega)</math> recorrida con <math>\omega</math> desde 0 a <math>\infty</math> no pasa ni encierra al punto <math>\chi = -1 + j0</math>.</p> <p><b>Formulación equivalente:</b>  <math>F_a(j\omega)</math> deja al punto <math>\chi = -1 + j0</math> a su izquierda.</p>	<p><math>\Sigma\Delta LE</math></p>	<p><b>Ejemplo 1:</b></p> $H(s) = \frac{K}{1 + 2\xi TS + T^2 S^2}$ $H(j\omega) = \frac{K}{1 - \left[\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2 + 2j\xi \left[\frac{\omega}{\omega_n}\right]}$  <p><b>Ejemplo 2: Sistema con Tiempo Muerto</b></p>  $G(s) = \frac{\frac{K}{S}}{1 + \frac{K}{S} e^{-T_M S}}$ <p><math>K, T_M &gt; 0</math></p> $F_a(j\omega) = \frac{K}{j\omega} e^{-j\omega T_M} = -j \frac{K}{\omega} e^{-j\omega T_M}$ $F_a(j\omega) = \frac{K}{\omega} e^{-j\left(\frac{\pi}{2} + \omega T_M\right)}$ <p>Encontraremos los puntos donde la fase de <math>F_a(j\omega)</math> sea igual a <math>\pi + 2\pi \cdot v</math> (puntos donde <math>F_a(j\omega)</math> corta al eje real negativo).</p>

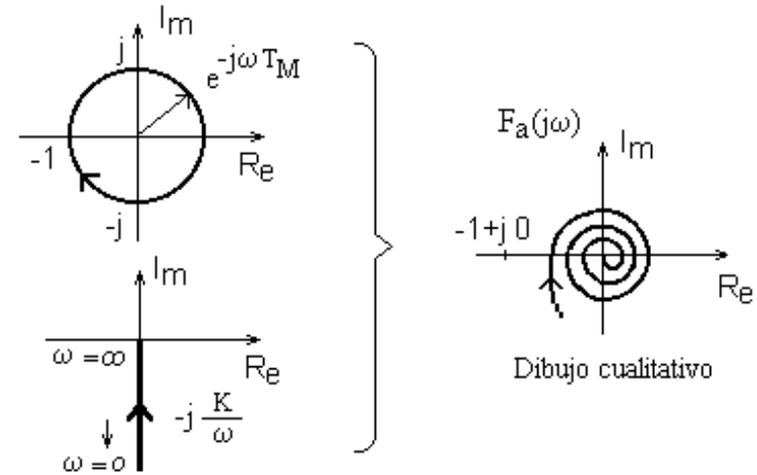
**Continuación**

$$F_a(j\omega) = \frac{K}{\omega} e^{-j\left(\frac{\pi}{2} + \omega T_M\right)} = \alpha e^{-j(\pi + 2\pi\nu)}$$

$$\alpha = \frac{K}{\omega} \left\{ \begin{array}{l} \pi + 2\pi\nu = \frac{\pi}{2} + \omega T_M \\ \pi + 2\pi\nu = \frac{\pi}{2} + \frac{K}{\alpha} T_M \end{array} \right.$$

$$\alpha = \frac{K T_M}{\frac{\pi}{2} + 2\pi\nu} \quad \text{para que sea estable tiene que ser } \alpha < 1$$

$$\frac{K T_M}{\frac{\pi}{2} + 2\pi\nu} < 1 \left\{ \begin{array}{l} K T_M < \frac{\pi}{2} + 2\pi\nu \quad \forall \nu \in \mathbb{N}_0 \\ K T_M < \frac{\pi}{2} \iff \text{Lazo Cerrado } F_c(s) \text{ es estable} \end{array} \right.$$



<u>Criterio</u>	<u>Definición</u>	<u>Alcance</u>	<u>Método de análisis</u>
<p><b>Gráfico sobre respuesta en frecuencia</b></p>	<p><b>Diagramas de Bode:</b> Una FTA se puede escribir en su representación polar. Por ejemplo la FTA de <math>H(j\omega)</math>:</p> $H(j\omega) =  H(j\omega)  e^{j\varphi(\omega)}$ <p>Los diagramas de Bode se construyen graficando el módulo (en dB) y la fase de <math>H(j\omega)</math> en función de <math>\log_{10}(\omega)</math>, cada uno en un diagrama separado. Se tienen, por lo tanto, los diagramas de bode de amplitud (módulo) y fase.</p>	<p align="center"><math>\Sigma\Delta\text{LE}</math></p>	<p><b>Aplicación del criterio de Nyquist a los diagramas de Bode:</b> Como el punto <math>-1+j0</math> tiene <b>módulo 1 y fase <math>-\pi</math></b>, el criterio que se enuncia a continuación es equivalente al de la página anterior:</p> <p><b>El sistema a lazo cerrado cuya FT es <math>F_c(s)</math> es estable <math>\iff</math> el retraso de fase de <math>F_a(j\omega)</math> en <math>\omega=\omega_c</math> es menor que <math>\pi</math>, siendo <math>\omega_c</math> la frecuencia a la cual se cumple que <math> H(j\omega_c) =1</math>.</b></p> <p><b>Ejemplo:</b> Interpretación gráfica comparativa:</p>

<p style="writing-mode: vertical-rl; transform: rotate(180deg);">Diagrama de Nyquist</p>			
<p style="writing-mode: vertical-rl; transform: rotate(180deg);">Diagrama de Bode</p>			