

## 1. Objetivos:

- 1.1. Afianzar el manejo de técnicas de modelado de Sistemas Físicos Dinámicos cuando es necesario considerar la dependencia espacial de las magnitudes y por lo tanto se obtienen modelos con ecuaciones en derivadas parciales ( $e\partial p$ ).
- 1.2. Abordar aspectos elementales de la resolución analítica y numérica de las  $e\partial p$ .
- 1.3. Explotar las posibilidades de simuladores estándar (p. ej. Simulink) para programar los esquemas de la resolución numérica de las  $e\partial p$ .

## 2. Resultados esperados:

- 2.1. Modelos de parámetros concentrados y de parámetros distribuidos del sistema propuesto.
- 2.2. Solución analítica de un modelo lineal simple en derivadas parciales.
- 2.3. Algoritmos de resolución numérica basados en la técnica de diferencias finitas.
- 2.4. Simulación digital en Simulink de Sistemas de Parámetros Distribuidos (SPD) espacialmente unidimensionales.
- 2.5. Informe de los resultados anteriores incluyendo:
  - 2.5.1. conclusiones relativas a aspectos metodológicos de modelado, análisis y simulación.
  - 2.5.2. gráficas de las simulaciones y conclusiones sobre el comportamiento dinámico de los sistemas.

## 3. Introducción

### 3.1. SPD y $e\partial p$ :

La distribución de los fenómenos sobre un continuo espacial hace necesario la descripción con magnitudes evaluadas en cada instante y en cada punto del espacio. Así es como en los modelos que expresan la rapidez de cambio de las variables descriptivas aparecen las derivadas parciales, para tener también en cuenta la variación espacial.

Estas  $e\partial p$  se deducen en la Física con técnicas de balance de masa, cantidad de movimiento, o de energía en dominios infinitesimales. Pero también se encuentran en otras disciplinas científicas tan diversas como Economía, Biología o Ciencias Ambientales, donde por ejemplo se balancean ventas, stocks (medidos en dinero), individuos de ciertas especies (microbios, células), o concentraciones de diversos componentes (efluentes, compuestos químicos, etc.).

Para ciertas clases de  $e\partial p$  se conocen las soluciones analíticas, pero en general es necesario buscar soluciones aproximadas, tanto como posible o necesario, a las soluciones exactas (desconocidas).

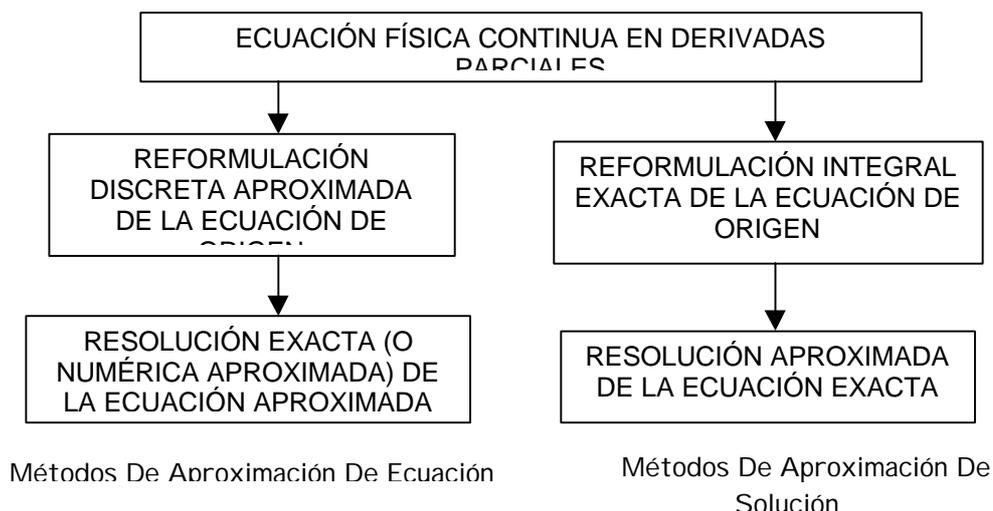
Una técnica corriente en la práctica ingenieril consiste en particionar el dominio espacial antes de construir el modelo matemático, y promediar espacialmente las variables descriptivas del sistema en cada uno de los subdominios finitos. Esto resulta en una concentración de los parámetros originalmente distribuidos en el espacio en nuevos parámetros que asumen valores uniformes en cada subdominio, y en la desaparición de la dependencia espacial de las variables descriptivas (y en realidad, en la desaparición del mismo espacio en el modelo), las que ahora son evaluadas solamente en el escenario temporal. Como consecuencia de todo esto, la dinámica del sistema resulta ahora descrita por EDOs en el tiempo.

Si bien en muchos casos da buenos resultados, este método puede ser insostenible por la cantidad de EDOs que produce (tantas por subdominio como balances se hagan en él), o por no reflejar importantes propiedades del sistema, o simplemente porque a priori no se dispone de criterios físicos (o sistémicos, en general) para realizar una partición adecuada.

### 3.2. Solución numérica de la $e\partial p$ :

El enfoque más general toma en cuenta el carácter continuo del espacio (conduce, como dijimos, a un conjunto usualmente pequeño de  $e\partial p$ ) y hace una discretización del espacio-tiempo sobre el modelo matemático deducido ( $e\partial p$ ), en muchas ocasiones luego de una conveniente reformulación previa.

La siguiente figura clasifica los métodos aproximados surgidos de este último enfoque en dos grandes familias. [1]



#### 3.2.1. Los métodos de aproximación de ecuación:

También son conocidos comúnmente como de **diferencias finitas**. En este práctico usaremos una variante de entre ellos.

Supongamos que el sistema está caracterizado por la variable descriptiva (escalar o vectorial)  $y = y(t, x_1, x_2, x_3)$ , y que está definido para  $t \geq t_0$  en todos los  $(x_1, x_2, x_3) \in \hat{D}$ , dominio espacial de frontera  $g$ . Notando  $W = D \times (t_0, \infty)$  y  $G = t_0 \times g$ , el modelo e $\partial$ p se puede simbolizar (el símbolo  $\times$  indica producto cartesiano):

$$(1). \quad \begin{aligned} L(y) &= g(u) && \text{en } W \\ B(y) &= h(u) && \text{en } G \\ y(t_0, x) &= f(u) && \text{en } D \times g \end{aligned}$$

Donde  $u = u(t, x_1, x_2, x_3)$  simboliza la entrada (escalar o vectorial),  $L$  y  $B$  son operadores en derivadas parciales, y  $g$  y  $h$  son, usualmente, funciones. Valgan como ejemplo los modelos de parámetros distribuidos de sistemas térmicos hechos en clase y el *Ejemplo 1* más adelante.

Discretizar  $W$ , i.e., sustituir el continuo  $(t, x)$  por una red de puntos  $(t_i, x_{1j}, x_{2k}, x_{3l})$  implica pasar de las derivadas parciales de los operadores  $L$  y  $B$  a aproximaciones en diferencias (finitas) de ellas, que en general surgen de desarrollos en serie de Taylor de las incógnitas, siendo determinado el error por el nivel de truncamiento de la serie.

Se obtiene un **esquema** o **modelo discreto** que notamos:

$$(2). \quad \begin{aligned} L_D(Y) &= g(U) && \text{en } W \\ B_D(Y) &= h(U) && \text{en } G \\ Y(t_0) &= f(U) && \text{en } W \times g \end{aligned}$$

$L_D$  y  $B_D$  son operadores discretos que dependen de los pasos de discretización elegidos (ver [Ejemplo 1](#) más adelante).

$Y$  y  $U$  son los vectores de variables dependientes y entradas que toman valores en cada uno de los puntos de la red de discretización de  $W$  y  $G$ .

Dado que en general no se conoce la solución exacta de la e $\partial$ p, es necesario disponer de criterios de validación de la solución aproximada. Sin profundizar, (para ello consultar [1], repasar [2]), daremos aquí cualitativamente tres condiciones referidas a este problema.

Condición 1: Coherencia o consistencia del modelo (2) con el (1)

*Definición:* La aproximación de  $L$  por  $L_D$  se dice *consistente* si el error de truncamiento (o de discretización) tiende a cero con el paso de discretización ( $\mathbf{D} \rightarrow 0$ ).

Si ahora se encara la resolución numérica de (2), se obtendrá una solución  $Y_D$  con cierto grado de aproximación a  $Y$ , se tiene la:

Condición 2: Estabilidad numérica del algoritmo (2)

*Definición:* Se dice que un proceso de cálculo iterativo es **estable** si los errores de redondeo no se amplifican a medida que el cálculo avanza.

Tenemos entonces:

$Y$ : solución exacta de la ecuación aproximada (2)

$Y_\Delta$ : solución aproximada a  $Y$

Lo que nos interesa es el grado con que  $Y_\Delta$  aproxima a  $y$ , la solución exacta del problema exacto.

### Condición 3: Convergencia

*Definición:* Se dice que el esquema discretizado es **convergente** si se verifica:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} (y - Y_\Delta) = 0$$

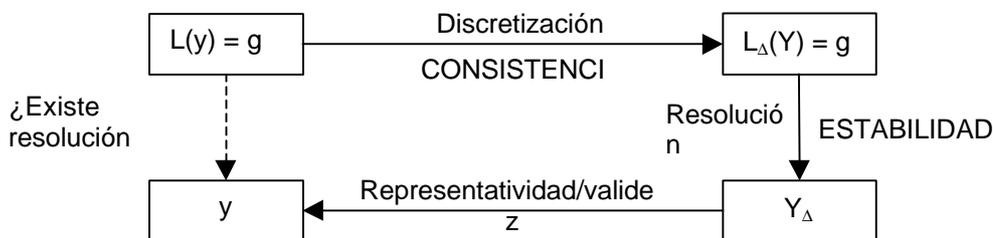
*Definición:* Un problema (modelo matemático) se dice **bien puesto (well-posed)** si su solución es única y depende en forma continua de las condiciones iniciales y de borde.

### Teorema de Lax:

**Versión 1:** Sea un problema lineal bien puesto para el cual se satisface la condición de consistencia. Entonces *convergencia* y *estabilidad* son condiciones equivalentes.

**Versión 2:** Un problema lineal bien puesto es convergente si se satisfacen las condiciones de consistencia y de estabilidad.

El siguiente esquema, tomado de [1], resume todo lo antedicho.



En este TP se modelarán *Sistemas Térmicos* bajo la idealización de distribución espacial unidimensional. Como variable(s) dependiente(s) se tendrá(n) la(s) temperatura(s) de un(varios) medio(s)  $q = q(t,x)$  (i.e.  $q_i = q_i(t,x)$ )

Para aprovechar el Simulink, en la primera etapa de aproximación sólo se discretizará explícitamente el espacio, por lo que los operadores  $L_\Delta$  y  $B_\Delta$  serán EDOs. Esta etapa la complementa el Simulink –es decir, discretiza el tiempo– con la elección de la rutina de integración, el paso y demás parámetros de la simulación de la EDO una vez que ingresamos el DB.

## EJEMPLO 1:

Sea el modelo:

$$(1'). \begin{cases} \frac{\partial y(t, x)}{\partial t} + 0,5 \frac{\partial y(t, x)}{\partial x} + y(t, x) = u_1(t) & ; 0 < x < 1, t > 0 \\ y(t, 0) = u_2(t) & ; t > 0 \\ y(0, x) = y_0(x) & ; 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Con la discretización espacial

$$x_i = i \cdot \Delta x \quad i = 1, 2, \dots, 5 ; (5 \cdot \Delta x = 1)$$

y los correspondientes valores

$$Y_i = Y_i(t) = y(t, x_i) \quad i = 1, 2, \dots, 5$$

hacemos la aproximación

$$\frac{\partial y(t, x)}{\partial x} \approx \frac{Y_i(t) - Y_{i-1}(t)}{\Delta x} \quad i = 1, 2, \dots, 5$$

que arroja el modelo (espacialmente) discreto

$$(2'). \begin{cases} \dot{Y}_1(t) = -3,5 \cdot Y_1(t) + 2,5 \cdot u_2(t) + u_1(t) \\ \dot{Y}_2(t) = 2,5 \cdot Y_1(t) - 3,5 \cdot Y_2(t) + u_1(t) \\ \vdots \\ \dot{Y}_5(t) = 2,5 \cdot Y_4(t) - 3,5 \cdot Y_5(t) + u_1(t) \\ Y_{i0} = y_0(x_i) \quad , i = 1, 2, \dots, 5 \end{cases}$$

### 3.2.2. Los métodos de aproximación de solución:

Son los más solicitados en problemas complejos multidimensionales. Sobre esta familia, sólo para ir "*sensibilizando el oído*", mencionamos aquí, entre los más conocidos, los métodos de: *residuos ponderados*, *Galerkin*, *de las funciones "splines"*, *de elementos finitos*, y *de elementos de contorno*.

### 3.3. Solución analítica:

En **algunos casos lineales** se puede obtener fácilmente la solución en forma cerrada con métodos analíticos.

Ilustraremos una técnica sobre la *ecuación del calor unidimensional*, sobre el modelo deducido en clase (ver también [3], 2.1), para el calentamiento de una barra metálica envuelta adiabáticamente en toda su longitud, y en contacto con dos fuentes de temperatura  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$  en sus extremos  $x = 0$  y  $x = l$ , respectivamente.

$$(3). \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{q}(t,x)}{\partial t} - s \frac{\partial^2 \mathbf{q}(t,x)}{\partial x^2} = 0 & \text{en } \mathbf{W} = (0,l), t > 0 \\ \mathbf{q}(t,0) = u_1(t) \\ \mathbf{q}(t,l) = u_2(t) \end{cases} \text{ condiciones de borde en } \mathbf{g} = (0,l), t > 0 \\ \mathbf{q}(0,x) = \mathbf{q}_0(x) \quad \text{c.i. en } [0,l], t = 0$$

$$s = \frac{I}{rc} : \text{termodifusividad}$$

Análogamente al caso de funciones de una variable, definimos la *transformación de Laplace* sobre  $\mathbf{q}(t,x)$ , **considerando a  $x$  como un parámetro:**

$$\mathbf{Q}(s,x) = \int_{t=0}^{\infty} \mathbf{q}(t,x) \cdot e^{-st} dt$$

La aplicamos a las ecuaciones anteriores en  $\mathbf{W}$  y  $\mathbf{g}$ , para obtener:

$$(4). \quad \begin{cases} s \cdot \mathbf{Q}(s,x) - \mathbf{q}_0(x) - s \frac{\partial^2 \mathbf{Q}(s,x)}{\partial x^2} = 0 & \text{en } \mathbf{W} \\ \mathbf{Q}(s,0) = U_1(s) \\ \mathbf{Q}(s,l) = U_2(s) \end{cases} \text{ en } \mathbf{g}$$

Se ha usado la regla habitual para la transformada de la derivada, y permutado la integral de la transformada de Laplace con la derivada segunda del Laplaciano.

Una vez en (4), consideramos a  $x$  como la variable y a  $s$  como el parámetro. Vemos que la ecuación en  $\mathbf{W}$  es una EDO con coeficientes complejos, que incorpora como excitación a la c.i.

O sea que debemos resolver una EDO con condiciones de borde. (Obsérvese que en caso de haberse tenido más de una dimensión espacial, se habría llegado a una  $e\partial p$  con sólo condiciones de bordes.)

Consideremos  $\mathbf{q}_0(x) \neq 0$  en  $[0,l]$  y estudiemos el efecto de las condiciones de borde sobre la barra. Para simplificar, notamos:

$$\mathbf{Q}'(s,x) = \frac{\partial \mathbf{Q}(s,x)}{\partial x} \quad ; \quad \mathbf{Q}''(s,x) = \frac{\partial^2 \mathbf{Q}(s,x)}{\partial x^2}$$

Con lo que la EDO de (4) se puede reescribir:

$$\mathbf{Q}''(s,x) - \frac{s}{s} \cdot \mathbf{Q}(s,x) = 0$$

Su ecuación característica es:

$$p^2 - \frac{s}{s} = 0 \quad \rightarrow \quad p_1 = \sqrt{\frac{s}{s}} \quad , \quad p_2 = -\sqrt{\frac{s}{s}}$$

De aquí obtenemos la solución general de la ecuación homogénea:

$$Q(s, x) = b_1(s) \cdot e^{\sqrt{\frac{s}{\rho c}} \cdot x} + b_2(s) \cdot e^{-\sqrt{\frac{s}{\rho c}} \cdot x}$$

Con las condiciones de borde se pueden determinar los coeficientes  $\beta_{1,2}(s)$ :

$$\begin{cases} x=0 \rightarrow b_1(s) + b_2(s) = U_1(s) \\ x=l \rightarrow b_1(s) \cdot e^{\sqrt{\frac{s}{\rho c}} \cdot l} + b_2(s) \cdot e^{-\sqrt{\frac{s}{\rho c}} \cdot l} = U_2(s) \end{cases}$$

Resolviendo este sistema obtenemos:

$$b_1(s) = \frac{U_2(s) - U_1(s) \cdot e^{-\sqrt{\frac{s}{\rho c}} \cdot l}}{e^{\sqrt{\frac{s}{\rho c}} \cdot l} - e^{-\sqrt{\frac{s}{\rho c}} \cdot l}}; \quad b_2(s) = \frac{U_1(s) \cdot e^{\sqrt{\frac{s}{\rho c}} \cdot l} - U_2(s)}{e^{\sqrt{\frac{s}{\rho c}} \cdot l} - e^{-\sqrt{\frac{s}{\rho c}} \cdot l}}$$

Reemplazando en la expresión general y operando, se obtiene:

$$Q(s, x) = \frac{e^{\sqrt{\frac{s}{\rho c}} \cdot (l-x)} - e^{-\sqrt{\frac{s}{\rho c}} \cdot (l-x)}}{e^{\sqrt{\frac{s}{\rho c}} \cdot l} - e^{-\sqrt{\frac{s}{\rho c}} \cdot l}} \cdot U_1(s) + \frac{e^{\sqrt{\frac{s}{\rho c}} \cdot x} - e^{-\sqrt{\frac{s}{\rho c}} \cdot x}}{e^{\sqrt{\frac{s}{\rho c}} \cdot l} - e^{-\sqrt{\frac{s}{\rho c}} \cdot l}} \cdot U_2(s)$$

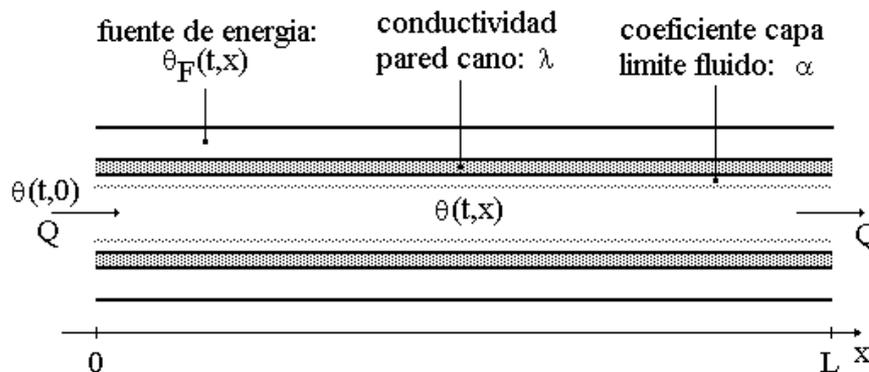
o, alternativamente:

$$Q(s, x) = \frac{\sinh\left(\sqrt{\frac{s}{\rho c}} \cdot (l-x)\right)}{\sinh\left(\sqrt{\frac{s}{\rho c}} \cdot l\right)} \cdot U_1(s) + \frac{\sinh\left(\sqrt{\frac{s}{\rho c}} \cdot x\right)}{\sinh\left(\sqrt{\frac{s}{\rho c}} \cdot l\right)} \cdot U_2(s)$$

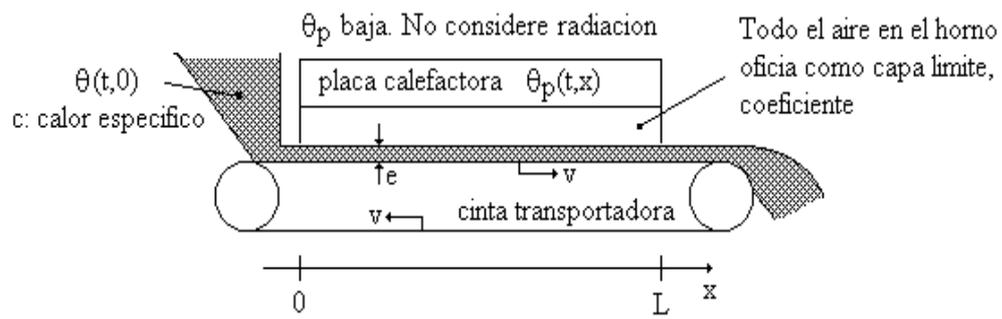
Vemos que obtenemos dos funciones transferencia **trascendentes** parametrizadas por la variable espacial  $x$ , que sólo desaparece si uno considera un punto determinado  $x_1 \in [0, l]$ .

#### 4. Sistemas Físicos:

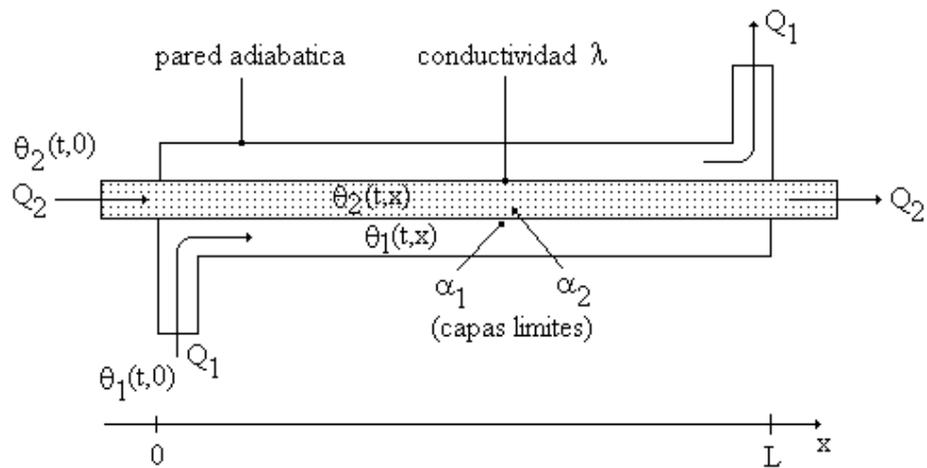
##### 4.1. Calentamiento/enfriamiento de un fluido líquido en una cañería.



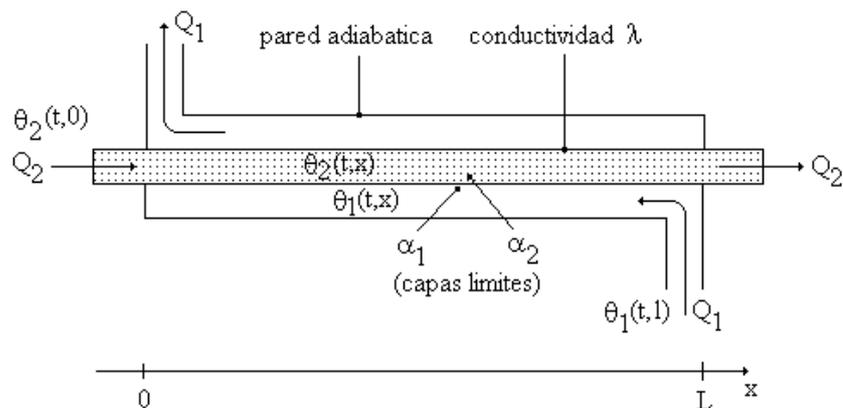
#### 4.2. Horno túnel.



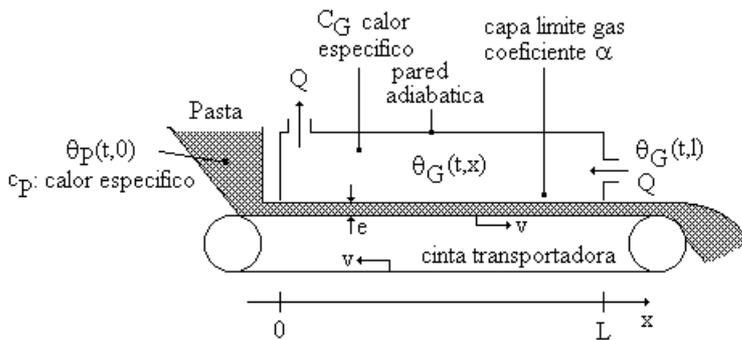
#### 4.3. Intercambiador de calor, flujo en paralelo.



#### 4.4. Intercambiador de calor, flujo en contracorriente.



#### 4.5. Horno túnel, con contracorriente gaseosa.



NOTA: Adoptar los parámetros geométricos que sean necesarios.

### 5. Tareas previas:

#### 5.1. Solución analítica [3]:

- Realice un *modelo de parámetros distribuidos* del sistema 4.1 o 4.2 (según grupo).
- Obtenga la expresión  $Q(s,x) = L\{q(t,x)\}$ , explicitándola como suma de sendos términos, cada uno de ellos debido a:
  - condiciones de borde constantes
  - condiciones iniciales uniformes
  - temperatura de la fuente constante y uniforme

En cada término ponga en evidencia la FT o la pseudo-FT, según corresponda.

- Realice un *DB normalizado* y un *DB Simulink (DB1)* con la expresión anterior.

Observe que con  $Q(s,x)$  puede hallar la solución analítica exacta  $q(t,x)$  o calcularla mediante SD con el DB Simulink, con muy poco error de truncamiento ya que sólo se discretiza con respecto al tiempo, reproduciéndose además los retardos de manera verdadera.

- Calcule *analíticamente*  $q(t,x)$ , analice la dependencia de la solución en función de los parámetros (coeficientes) del modelo matemático y de los parámetros físicos y esboce una gráfica de la solución.
- Obtenga el *perfil de temperatura*  $\bar{q}(x)$  en *régimen permanente*.
- Discretice el espacio (p. ej. en 5 zonas) antes de modelar y luego obtenga un *modelo de parámetros concentrados* (EDOs). Resuélvalo analíticamente y compare las soluciones  $q_i(t)$  de las EDOs con las variables correspondientes  $q(t,x_i)$  de la solución  $\partial p$ .

#### 5.2. Solución numérica

##### 5.2.1. Sistemas 4.1 y 4.2:

- a- Obtenga un esquema de resolución numérica por diferencias finitas de la  $e\partial p$  de 5.1.a-, con igual partición del espacio que la del modelo de parámetros concentrados de 5.1.f-. Compare ambos modelos, establezca y fundamente la relación.
- b- Realice un DB Simulink (DB2) del modelo de diferencias finitas anterior.

#### 5.2.2. *Sistemas 4.3, 4.4 y 4.5:*

- a- Realice un *modelo de parámetros distribuidos* de los sistemas 4.3, 4.4 y 4.5 (a cada grupo se le asignará un sistema, ver "transparente de DSF").
- b- Obtenga un esquema de resolución numérica por el método de diferencias finitas y construya el DB Simulink (DB3) para simularlo.

#### 5.2.3. *Preparación de la SD:*

La SD permite observar el comportamiento del sistema experimentando con distintas condiciones de operación (entradas, condiciones de borde y condiciones iniciales) y estudiar la dependencia de la dinámica ante distintos juegos de parámetros físicos y/o matemáticos.

Especifique un conjunto de experimentos de interés y construya una "*hoja de ruta*" para la simulación digital. Recomendamos llevar una propuesta de hoja de ruta a una consulta para su supervisión.

### 6. Simulación Digital:

Concurra a la preevaluación con las tareas previas documentadas como primera parte del Informe del TP.

La SD se hará sobre la base del DB y de la Hoja de ruta mencionados.

Para ahorrar trabajo de búsqueda y ajuste, los auxiliares le darán un juego de valores numéricos de entradas y parámetros para realizar la primera simulación.

Ensaye, en iguales condiciones de operación, los DB1 y DB2, y compare sus respuestas. Observe los errores dinámicos y estáticos.

### 7. Informe:

Con las conclusiones extraídas durante la simulación se completará un informe con las características mencionadas en 2.5.

### 8. Bibliografía:

La consulta de las Referencias [1], [4] y [5] no es necesaria para las aplicaciones de este TP. Pueden ser útiles para quien desee o necesite profundizar. La [5] es probablemente la más importante de las obras clásicas sobre el tema de las  $e\partial p$ , obra de dos matemáticos sobresalientes en este siglo. La [1] es una obra especialmente indicada para ingenieros: ofrece

una breve introducción a las eδp, para luego abordar métodos numéricos implementables en computadora.

- [1]. Le Pourhiet, Alain, *Résolution numérique des équations aux dérivées partielles*. CEPADUES-EDITIONS. Toulouse, 1988.
- [2]. S. Junco y S. Serra. A02LAB.90: *Métodos numéricos en la simulación digital de Sistemas Dinámicos*.
- [3]. S. Junco. A03C03.91: *Sistemas Térmicos*.
- [4]. Godunov, Serguei; Ecuaciones de la Física Matemática. Editorial MIR. Moscú, 1978.
- [5]. Courant R., Hilbert D.: *Methoden der Mathematischen Physik*. Tomos I y II. Springer-Verlag. Berlin, 1968. (En Biblioteca Facultad disponibles, esta versión y una en inglés).