Análisis en el EE de Sistemas LyE

Problema 1

Dado el siguiente sistema de EE/ES:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -10x_1 - 7x_2$$
$$y = 2x_1$$

a) Calcule ***la matriz de transición*** MT. *Sugerimos* hallar la inversa de (sI-A), la matriz característica de la matriz de evolución A, y determinar la MT vía $\mathcal{L}^{-1}$.

b) Usando la MT hallada, determine ***la evolución del vector de estados*** a partir de c/u de las siguientes c.i.:

$$i)\ X_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad ii)\ X_O = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad iii)\ X_O = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

c) De lo calculado en los puntos anteriores, obtenga *por inspección* ***los autovectores*** de A.

Conceptos involucrados. En todos los problemas reflexione sobre los conceptos involucrados a partir de lo hecho. En este caso: Matriz de Transición. Direcciones invariantes bajo la dinámica del sistema ≡ direcciones invariantes de la MT ≡ direcciones invariantes de A (haga el producto de A por c/u de las c.i. ¿Qué observa?).

d) Usando la solución analítica de las EeyS, obtenga la expresión de la salida y(t) para c.i. y *i*) entradas genéricas, *ii*) entrada escalón, *iii*) entrada impulsiva (delta de Dirac).

Problema 2

Del sistema lineal y estacionario $\dot{x}(t) = A\,x(t)$ se conocen las siguientes trayectorias:

$x^{@}(t) = \begin{bmatrix} e^{-3t} \\ 2e^{-3t} \end{bmatrix}$, $x^{\#}(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-5t} \\ -e^{-5t} \end{bmatrix}$	1. Determine los autovalores de A. 2. Indique las condiciones iniciales de donde parte cada trayectoria. 3. Indique las direcciones invariantes bajo la dinámica del sistema. 4. Calcule la matriz de transición del sistema. 5. Calcule la matriz A. 6. Dibuje el RF del sistema libre.

Problema 3

Un modelo lineal y estacionario tiene la siguiente matriz de transición MT:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-\frac{t}{T_1}}\cos(2t) & -e^{-\frac{t}{T_1}}sen(2t) & 0 \\ e^{-\frac{t}{T_1}}sen(2t) & e^{-\frac{t}{T_1}}\cos(2t) & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$$

a) En t = 3 el sistema está en el estado $[1\ -3\ \ 4]^T$. ¿Donde estaba en t = 2 . Considere $T_1 = 1$.

b) Para c/u de los siguientes valores de T_1: *i*) $T_1 = 1$, *ii*) $1/T_1 = 0$, *iii*) $T_1 = -1$, determine numéricamente todos los autovalores (recuerde que son 3!) de la correspondiente ***matriz de evolución*** A. Dibújelos en un mismo plano complejo.

Problema 4

De un sistema Lineal y Estacionario de segundo orden se conoce

Autovalores: $\begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$, Autovectores: $V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

a) Calcular la matriz de transición.
b) Para cierta condición inicial $x(t=0) = x_0$, el sistema evoluciona pasando por $x(t=2)=\begin{bmatrix} 0,7683 \\ 0,5851 \end{bmatrix}$. Calcular la condición inicial x_0.
c) ¿Es posible que en algún momento $x_2 > x_1$ a lo largo de la trayectoria del punto anterior? Justifique su respuesta.
d) Dibujar en el espacio de estados la trayectoria x(t) a partir de la condición inicial calculada en el punto b).

Problema 5

Dibujar los retratos de fase a partir de las matrices de evolución de la derecha. En cada caso:

- Indicar los autovalores.
- Dibujar los autovectores y/o vectores principales cada vez que corresponda.

a) $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

Importante: **¡Piense antes de actuar (calcular)!**

Problema 6

Dibuje en el espacio de estados la trayectoria completa a partir de t=0 del sistema dinámico dado por las siguientes ecuaciones:

$$7\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -12 & -31 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

a partir de las condiciones iniciales

$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$, y con la entrada $u(t) = 35\,\mu(t-10)$.

Problema 7

Para cada uno de los siguientes retratos de fase:

a) Clasifíquelo (nodo estable, etc.).
b) Indique la estabilidad (Asintóticamente estable, Lyapunov estable, inestable).
c) Dibuje en el plano complejo la posición de los autovalores.
d) Diga si hay direcciones invariantes bajo la dinámica del sistema y márquelas claramente sobre el dibujo.
e) Elija y escriba numéricamente tantos autovectores l.i. como sea posible. Por ejemplo

$$V_1 = \begin{bmatrix}7\\2\end{bmatrix}, V_2 = \begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}.$$