ESTABILIDAD del EQUILIBRIO con el
METODO DIRECTO DE LYAPUNOV (1)

Un problema resuelto.

En los sistemas físicos, una candidata natural a función de Lyapunov es la energía en los almacenadores.- Cuando las Relac's de los almacenadores es lineal, la energía total es la suma de términos del tipo $\frac{1}{2} L I^2$, $\frac{1}{2} C U^2$, $\frac{1}{2L}\phi^2$, $\frac{1}{2C} q^2$, $\frac{1}{2} m v^2$, $\frac{1}{2} k \delta^2$, etc., según la elección de las variables de estado.-

Cuando no está clara la interpretación en términos físicos de las variables de estado (o directamente no la hay), no se puede recurrir a la energía, pero es común intentar (la prueba de estabilidad) con funciones cuadráticas del tipo

$$V(x_1, \ldots, x_n) := \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \cdots + \frac{1}{2} k_n x_n^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} k_i x_i^2$$

con coeficientes $k_i > 0 \ \forall i = 1, \ldots, n$ (para asegurar que V sea definida positiva), pero dejando indeterminado sus valores en primera instancia.- Luego, en la evaluación de $\mathring{V}$, se asigna valores adecuados a los k_i (respetando la restricción $k_i > 0$!), que permiten evaluar con mayor facilidad la definición (el "signo") de $\mathring{V}$.-

Está claro que la elección

$$V(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} k_i x_i^2$$ está inspirada ~~es una generalización~~

de la energía en almacenadores con RelaCs lineales.-

La primera parte de este problema ilustra lo dicho anteriormente.

Sea el sistema

$$(1)\begin{cases}\dot{x}_1 = -a\,|1-x_1^2-x_2^2|\cdot x_1 + b\,x_2 \\ \dot{x}_2 = -c\,x_1 - d\,|1-x_1^2-x_2^2|\cdot x_2\end{cases} \qquad \underline{a,b,c,d>0}$$

que tiene al origen como PE : $\bar{x} = [0, 0]^T$

Sea la candidata f. de Lyapunov

$$V(x_1,x_2) = \frac{1}{2}k_1 x_1^2 + \frac{1}{2}k_2 x_2^2 \quad , k_{1,2} > 0$$

a-priori indeterminados

$$\dot{V} = -a k_1\,|1-x_1^2-x_2^2|\cdot x_1^2 + b k_1 x_1 x_2$$
$$- c k_2 x_2 x_1 - d k_2\,|1-x_1^2-x_2^2|\cdot x_2^2$$

Vemos que en el entorno del origen $\|x_1^2+x_2^2\|<1$ la suma del 1er. y 4to. término tiene signo definido (negativo). Pero ni el 2do. ni el 3er término tienen signo definido (según los valores de los estados $x_{1,2}$ pueden ser positivos, negativos, o nulos).-

Sin embargo, la libertad de elegir los $k_{1,2}$ (en tanto se respete $k_{1,2} > 0$!) nos permite desembarazarnos de ellos anulando su suma: 3/

Con $b\, k_1 = c\, k_2$, o sea $k_1 = \frac{c}{b} k_2 > 0$

se logra

$$\boxed{\dot{V} = -\left(a\, k_1\, x_1^2 + d\, k_2\, x_2^2\right) \cdot \left|1 - x_1^2 - x_2^2\right|}$$

que es una f. d. negativa de (x_1, x_2) (*), y por lo tanto se puede afirmar que el origen es localmente asintóticamente estable.—

(*) en $D = \{ x \,/\, \|x\| < 1 \}$

Es interesante considerar el sistema para el caso particular $a = b = c = d = 1$.—

$$(2)\begin{cases} \dot{x}_1 = -\left|1 - x_1^2 - x_2^2\right| \cdot x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - \left|1 - x_1^2 - x_2^2\right| \cdot x_2 \end{cases}$$

El origen sigue siendo PE.- Para estudiar su estabilidad basta en este caso con considerar

$V(x) = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2$, es decir $k_{1,2} = 1$

Es fácil ver que

$$\boxed{\mathring{V} = -\ \left|1 - x_1^2 - x_2^2\right| \cdot \left(x_1^2 + x_2^2\right)}$$

definida negativa en el mismo dominio D anterior, y que por lo tanto el origen es <u>localmente</u> asintóticamente estable.

Es interesante analizar que ocurre en la variedad donde se anula $\mathring{V}$, es decir, en

$$\{ x \,/\, \|x\| = 1 \} = \partial D \qquad (\text{la frontera de } D)$$

Restringiendo la dinámica a ∂D se tiene

$$\begin{cases} \mathring{x}_1 = x_2 \\ \mathring{x}_2 = -x_1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \mathring{x}_{Restringido} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x_{Restringido} \\ \\ x_R(0) = x_{R0} \in \partial D \end{cases}$$

Como el RF de $\left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 \end{array}\right]$ es un centro con trayectorias sobre circunferencias centradas en el origen se tiene que las soluciones del sistema restringido son trayectorias sobre la circunferencia de radio unitario, es decir las trayectorias originadas en $x_{R0} \in \partial D$ permanecen en ∂D (la circunf. radio unitario) para todo tiempo.—

O sea, ∂D es invariante bajo la dinámica

Esta trayectoria sobre ∂D es lo que se llama un ciclo límite (CL): una trayectoria cerrada aislada (sólo posible en un sistema NL).–

Sabemos que

$\cdot$) en D, $\mathring{V} < 0$ (f.d.n.)

$\cdot\cdot$) en ∂D, $\mathring{V} = 0 \rightarrow$ C.L.

D y su frontera

$\because$) en $\mathbb{R}^2 - \overline{D} = \{ x \,/\, \|x\| > 1 \} \rightarrow \mathring{V} < 0$

De $(\cdot) \rightarrow \|x_0\| < 1 \rightsquigarrow \|x(t)\| < 1$, $x(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$

De $(\cdot\cdot) \rightarrow \|x_0\| = 1 \rightsquigarrow \|x(t)\| \equiv 1$ $\quad x(t) \in$ C.L. $\forall t$

De $(\because) \rightarrow \|x_0\| > 1 \rightsquigarrow \|x(t)\| > 1$ $\forall t$, $x(t) \rightarrow$ CL, $t \rightarrow \infty$

Además, para proponer un RF cualitativo del ΣNL, mediante un razonamiento heurístico-intuitivo, considérese a (2) reescrito así:

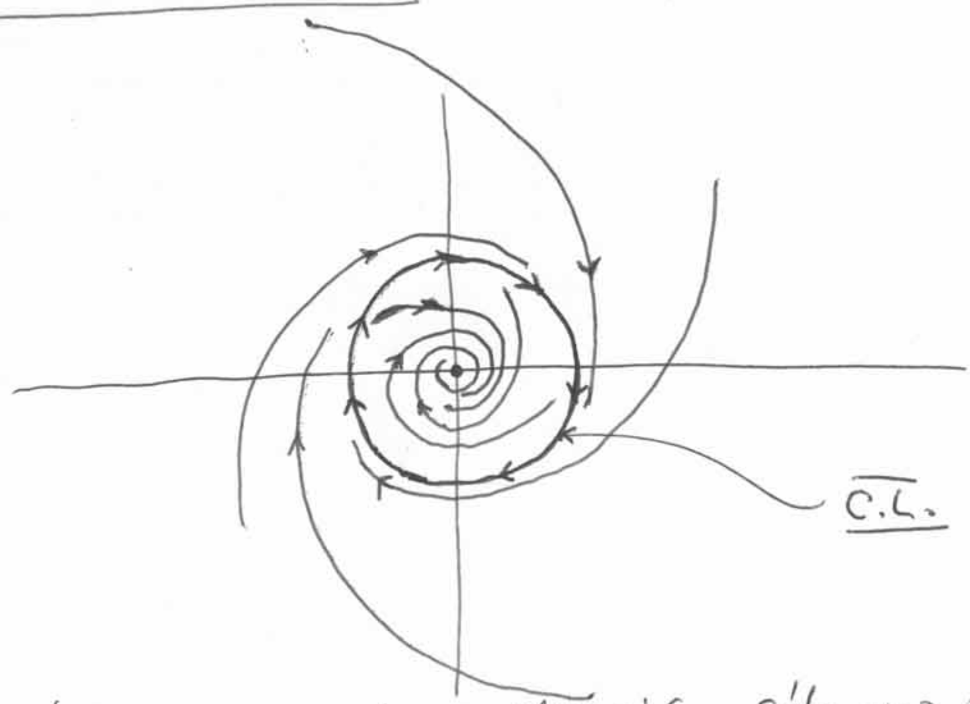
$$\begin{cases} \mathring{x}_1 = -\alpha(\|x\|^2)\, x_1 + x_2 \\ \mathring{x}_2 = -x_1 - \alpha(\|x\|^2)\, x_2 \end{cases}$$

$$\mathring{x} = \left[\begin{array}{c|c} -\alpha(\|x\|^2) & 1 \\ \hline -1 & -\alpha(\|x\|^2) \end{array}\right] x \qquad (3)$$

Donde la definición de la función α es obvia.- El sistema (3) (NL!) tiene una matriz $A(x)$ del tipo $\begin{bmatrix} -\alpha & \omega \\ -\omega & -\alpha \end{bmatrix}$ con $\omega = 1$

Para <u>α constante positivo</u>, esto da un RF <u>foco estable</u>

Con esta observación y el análisis previo se puede sospechar/inferir un <u>RF del ΣNL</u> del tipo:



Pero esto no es una demostración, sólo una presunción. Como ejercicio, se sugiere ratificarlo/rectificarlo por simulación.-

Podemos confirmar esta presunción analizando el problema en coordenadas polares (ρ, φ)

$$\begin{cases} \rho^2 = x_1^2 + x_2^2 \\ tg\,\varphi = x_2/x_1 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = \rho \cos\varphi \\ x_2 = \rho \,\mathrm{sen}\,\varphi \end{cases}$$

ρ^2 no es otra cosa que $2V$ (la f. Lyap. anterior)

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\rho^2) = 2\rho\dot{\rho} = 2\dot{V} = -2\,|1-\rho^2|\,\rho^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\rho} = -|1-\rho^2|\cdot\rho}$$

$$\frac{d}{dt}(tg\varphi) = \frac{\dot{\varphi}}{\cos^2\varphi} = \frac{d}{dt}(x_2/x_1) = \frac{\dot{x}_2 x_1 - x_2\dot{x}_1}{x_1^2}$$

Es fácil calcular $\dot{x}_2 x_1 - x_2\dot{x}_1 = -\rho^2$

$$\therefore \quad \frac{\dot{\varphi}}{\cos^2\varphi} = -\frac{\rho^2}{\rho^2\cos^2\varphi} \Rightarrow \boxed{\dot{\varphi} = -1}$$

$\therefore$ las EE en coord. polares son

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\rho} &= -|1-\rho^2|\cdot\rho \\ \dot{\varphi} &= -1 \end{aligned}}$$

lo cual confirma todo el análisis anterior y, en particular, la forma del RF global del ΣNL.