

A. Kiselióv
M. Krasnov
G. Makarenko

PROBLEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Tercera edición

traducido del ruso por
EMILIANO APARICIO BERNARDO
candidato a doctor
en ciencias físico-matemáticas

EDITORIAL MIR
MOSCÚ

§ 1. CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Se llama *ecuación diferencial* una ecuación que liga la variable independiente x , la función incógnita $y = y(x)$ y sus derivadas $y', y'', \dots, y^{(n)}$, es decir, una ecuación de la forma

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

En otras palabras, se llama *ecuación diferencial* una ecuación en la que figura la derivada o diferencial de la función incógnita.

Si la función incógnita $y = y(x)$ depende de una sola variable independiente x , la ecuación diferencial se llama *ordinaria*.

Por ejemplo:

$$1) \frac{dy}{dx} + xy = 0, \quad 2) y'' + y' + x = \cos x,$$

$$3) (x^2 + y^2) dx + (x + y) dy = 0.$$

El orden de una ecuación diferencial es el de la derivada de mayor orden que figura en la ecuación. Por ejemplo: la ecuación diferencial $y' + xy = e^x$ es de primer orden; la ecuación diferencial $y'' + p(x)y = 0$, donde $p(x)$ es una función dada, es de 2º orden; la ecuación diferencial $y^{(1)}x - xy'' = x^2$, es de 9º orden.

Se llama *solución de la ecuación diferencial* una función $y = \varphi(x)$, determinada en el intervalo (a, b) junto con sus derivadas sucesivas hasta el orden n inclusive, tal que al hacer la sustitución $y = \varphi(x)$ en la ecuación diferencial, ésta, se convierte en una identidad con respecto a x en el intervalo (a, b) .

Por ejemplo, la función $y = \sin x + \cos x$ es solución de la ecuación $y'' + y = 0$. En efecto, derivando dos veces esta función, se tiene:

$$y' = \cos x - \sin x, \quad y'' = -\sin x - \cos x.$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial y'' e y por sus expresiones, resulta la identidad:

$$-\operatorname{sen} x - \cos x + \operatorname{sen} x + \cos x \equiv 0.$$

La gráfica de una solución de la ecuación diferencial se denomina curva integral de la ecuación.

La forma general de una ecuación de primer orden es.

$$F(x, y, y') = 0. \quad (1)$$

Si en la ecuación (1) es posible despejar y' , resulta

$$y' = f(x, y), \quad (2)$$

que representa una ecuación de primer orden, resuelta con respecto a la derivada.

Teorema de existencia y unicidad.

Sea dada una ecuación diferencial $y' = f(x, y)$, donde la función $f(x, y)$ está definida en un recinto D del plano XOY que contiene el punto (x_0, y_0) . Si la función $f(x, y)$ satisface a las condiciones:

a) $f(x, y)$ es una función continua de dos variables x e y , en el recinto D ;

b) $f(x, y)$ admite derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$, continua con respecto de x e y en el recinto D , entonces, existe una, y sólo una, solución $y = \varphi(x)$ de la ecuación dada que satisface a la condición $y|_{x=x_0} = y_0$.

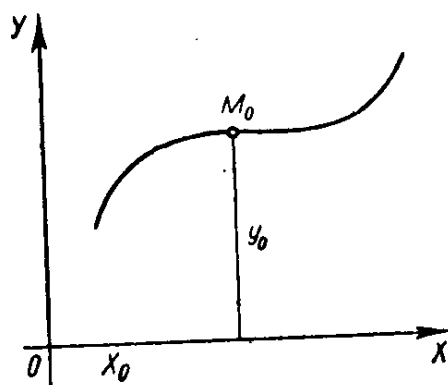


Fig. 1

La condición $y|_{x=x_0} = y_0$ se llama *condición inicial*.

El problema de la búsqueda de la solución de la ecuación $y' = f(x, y)$ que satisface a la condición inicial $y|_{x=x_0} = y_0$, lleva el nombre de *Cauchy*.

Geométricamente esto significa que se busca la curva integral que pasa por el punto dado $M_0(x_0, y_0)$ del plano XOY (fig. 1).

El teorema expresa las condiciones suficientes para la existencia de solución única del problema de Cauchy para la ecuación $y' = f(x, y)$, pero estas condiciones no son necesarias. Precisamente, puede existir una solución única

de la ecuación $y' = f(x, y)$ que satisface a la condición $y|_{x=x_0} = y_0$, a pesar de que en el punto (x_0, y_0) no se cumpla la condición a) o la condición b), o estas dos condiciones simultáneamente.

Ejemplo 1.

$$y' = \frac{1}{y^2}.$$

Aquí, $f(x, y) = \frac{1}{y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2}{y^3}$.

En los puntos $(x_0, 0)$ del eje OX no se cumplen las condiciones a) y b) (la función $f(x, y)$ y su derivada par-

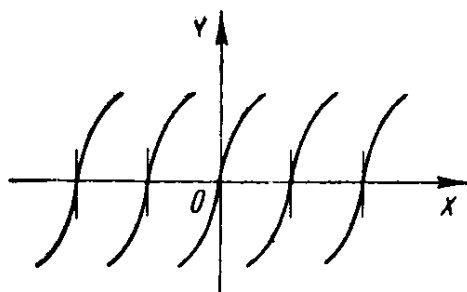


Fig. 2

cial $\frac{\partial f}{\partial y}$ son discontinuas en el eje OX), mas, por cada punto del eje OX pasa una sola curva integral $y = \sqrt[3]{3(x - x_0)}$, (fig. 2).

Ejemplo 2.

$$y' = xy + e^{-y}.$$

El segundo miembro de la ecuación $f(x, y) = xy + e^{-y}$ y su derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y} = x - e^{-y}$ son continuas con respecto a x e y en todos los puntos del plano XOY . En virtud del teorema de existencia y unicidad, el recinto en el que la ecuación dada tiene solución única es todo el plano XOY .

Ejemplo 3.

$$y' = \frac{3}{2} \sqrt[3]{y^2}.$$

El segundo miembro de la ecuación $f(x, y) = \frac{3}{2} \sqrt[3]{y^2}$ es una función definida y continua en todos los puntos del

plano XOY. La derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt[3]{y}}$ se hace infinita para $y = 0$, o sea, en el eje OX, de modo que para $y = 0$ se infringe la condición b) del teorema de existencia y unicidad. Por consiguiente, es posible que no haya unicidad en los puntos del eje OX. Fácilmente se comprueba que la función $y = \frac{(x+c)^3}{8}$ es solución de la ecuación considerada.

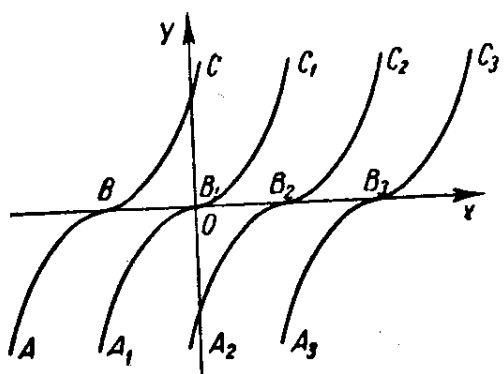


Fig. 3

Además, la ecuación tiene la solución evidente $y \equiv 0$. Así, pues, por cada punto del eje OX pasan al menos dos curvas integrales y, por consiguiente, en los puntos de este eje, verdaderamente, queda infringida la unicidad (fig. 3).

Son también líneas integrales las formadas por trozos de las parábolas cúbicas

$y = \frac{(x+c)^3}{8}$ y los segmentos del eje OX; por ejemplo, las líneas $ABOC_1$, ABB_2C_2 , A_2B_2x , etc. De este modo, por cada punto del eje OX pasan infinitas líneas integrales.

Aplicando el teorema de existencia y unicidad señalar en los problemas que siguen los recintos en los que las ecuaciones dadas admiten solución única.

1. $y' = x^2 + y^2$.

2. $y' = \frac{x}{y}$.

3. $y' = y + 3\sqrt[3]{y}$.

4. $y' = \sqrt{x-y}$.

5. $y' = \sqrt{x^2 - y} - x$.

6. $y' = \sqrt{1-y^2}$.

7. $y' = \frac{y+1}{x-y}$.

8. $y' = \sin y - \cos x$.

9. $y' = 1 - \operatorname{ctg} y$.

10. $y' = \sqrt[3]{3x-y} - 1$.

Se llama solución general de la ecuación diferencial (2) una función

$$y = \varphi(x, C), \quad (3)$$

que depende de una constante arbitraria C y que cumple las condiciones:

1) ésta satisface a la ecuación (2) para cualesquiera valores de la constante C ;

2) cualquiera que sea la condición inicial

$$y|_{x=x_0} = y_0 \quad (y(x_0) = y_0) \quad (4)$$

siempre se puede asignar un valor C_0 a la constante C tal, que la función $y = \varphi(x, C_0)$ satisfaga a la condición inicial (4) dada. Se supone que el punto (x_0, y_0) pertenece al recinto en el que se cumplen las condiciones de existencia y unicidad de la solución.

Se llama solución particular de la ecuación diferencial (2) a la que se obtiene de la solución general (3) asignado cualquier valor determinado a la constante arbitraria C .

Ejemplo 1. Comprobar que la función $y = x + C$ es la solución general de la ecuación diferencial $y' = 1$ y hallar la solución particular que satisface a la condición inicial $y|_{x=0} = 0$. Interpretar geométricamente el resultado.

Solución. La función $y = x + C$ satisface a la ecuación dada para cualesquiera valores de la constante arbitraria C . En efecto,

$$y' = (x + C)' = 1.$$

Consideremos una condición inicial arbitraria $y|_{x=x_0} = y_0$. Poniendo $x = x_0, y = y_0$ en la igualdad $y = x + C$, hallamos que $C = y_0 - x_0$. Poniendo este valor de C en la función dada, se tiene: $y = x + y_0 - x_0$. Esta función satisface a la condición inicial dada; en efecto, poniendo $x = x_0$ resulta $y = x_0 + y_0 - x_0 = y_0$. Así, pues, hemos demostrado que la función $y = x + C$ es la solución general de la ecuación dada.

En particular, poniendo $x_0 = 0, y_0 = 0$, obtenemos la solución particular $y = x$.

La solución general de la ecuación considerada, o sea, la función $y = x + C$, determina en el plano XOY una familia de rectas paralelas de coeficiente angular $k = 1$. Por cada punto $M_0(x_0, y_0)$ del plano XOY pasa la única curva integral: $y = x + y_0 - x_0$. La solución particular $y = x$ determina una de las curvas integrales, a saber, la recta que pasa por el origen de coordenadas (fig. 4).

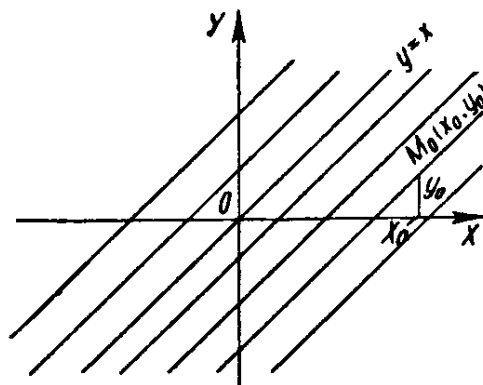


Fig. 4

Ejemplo 2. Comprobar que la función $y = Ce^x$ es la solución general de la ecuación $y' - y = 0$ y hallar la solución particular que satisface a la condición inicial $y|_{x=1} = -1$.

Solución. Se tiene $y = Ce^x$, $y' = Ce^x$. Poniendo en la ecuación dada las expresiones de y e y' , resulta, $Ce^x - Ce^x \equiv 0$, o sea, la función $y = Ce^x$ satisface a la ecuación considerada para cualesquiera valores de la constante C .

Asignemos una condición inicial arbitraria $y|_{x=x_0} = y_0$. Sustituyendo en la función $y = Ce^x$, x e y por x_0 , y_0 , se tiene $y_0 = Ce^{x_0}$, de donde $C = y_0 e^{-x_0}$. La función $y = y_0 e^{x-x_0}$ satisface a la condición inicial. En efecto, poniendo $x = x_0$, resulta $y = y_0 e^{x_0-x_0} = y_0$. La función $y = Ce^x$ es la solución general de la ecuación dada.

Para $x_0 = 1$, $y_0 = -1$, obtenemos la solución particular

$$y = -e^{x-1}.$$

Geométricamente, la solución general determina una familia de curvas integrales que representan las gráficas de funciones exponenciales; la solución particular es la curva integral que pasa por el punto $M_0(1, -1)$ (fig. 5).

Verificar, en los ejercicios que se dan a continuación, que las funciones dadas son soluciones de las ecuaciones diferenciales indicadas:

11. $y = \frac{\sin x}{x}$, $xy' + y = \cos x$.

12. $y = Ce^{-2x} + \frac{1}{3}e^x$,
 $y' + 2y + e^x$.

13. $y = 2 + C\sqrt{1+x^2}$,
 $(1-x^2)y' + xy = 2x$.

14. $y = x\sqrt{1-x^2}$,
 $yy' = x - 2x^3$.

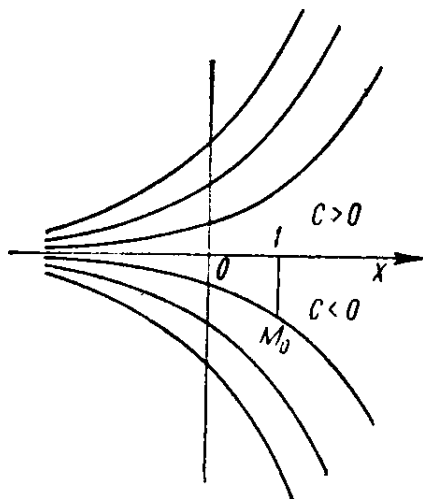


Fig. 5

15. $y = e^{\arcsen Cx}, \quad xy' = y \operatorname{tg} \ln y.$
16. $y = e^x \int_0^x e^t dt + Ce^x, \quad y' - y = e^{x+x^2}.$
17. $y = x \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt, \quad xy' = y + x \operatorname{sen} x.$
18. $y = x \left(\int \frac{e^x}{x} dx + C \right), \quad xy' - y = xe^x$
19. $\left. \begin{array}{l} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{array} \right\}, \quad x + yy' = 0.$
20. $\left. \begin{array}{l} x = te^t \\ y = e^{-t} \end{array} \right\}, \quad (1 + xy)y' + y^2 = 0.$
21. $\left. \begin{array}{l} x = e^{\operatorname{arctg} t} \\ y = e^{-\operatorname{arctg} t} \end{array} \right\}, \quad y - xy' = 0.$
22. $\left. \begin{array}{l} x = t \ln t \\ y = t^2(2 \ln t + 1) \end{array} \right\}, \quad y' \ln \frac{y'}{4} = 4x.$
23. $\left. \begin{array}{l} x = \ln t + \operatorname{sen} t \\ y = t(1 + \operatorname{sen} t) + \cos t \end{array} \right\}, \quad x = \ln y' + \operatorname{sen} y'.$
24. $\left. \begin{array}{l} x = t + \arcsen t \\ y = \frac{t^2}{2} - \sqrt{1-t^2} \end{array} \right\}, \quad x = y' + \arcsen y'.$
25. $\left. \begin{array}{l} x = t^2 + e^t \\ y = \frac{2}{3} t^3 + (t-1)e^t \end{array} \right\}, \quad y'^2 + e^{y'} = x.$

Verificar que las funciones dadas son las soluciones generales de las ecuaciones diferenciales indicadas:

26. $y = \frac{C}{\cos x}, \quad y' - \operatorname{tg} x \cdot y = 0.$
27. $y = -\frac{1}{3x+C}, \quad y' = 3y^2.$
28. $y = \ln(C + e^x), \quad y' = e^{x-y}.$
29. $y = \sqrt{x^2 - Cx}, \quad (x^2 + y^2) dx - 3xy dy = 0.$
30. $y = x(C - \ln|x|), \quad (x - y) dx + x dy = 0.$

$$31. x = ye^{Cy+1}, \quad y' = \frac{y}{x(\ln x - \ln y)}.$$

$$32. x = y \ln Cy, \quad y'(x+y) = y.$$

La relación $\Phi(x, y, C) = 0$, que de forma implícita determina la solución general, se llama integral general de la ecuación diferencial de primer orden.

La relación que se obtiene en la integral general al atribuir a la constante C un valor determinado, se llama integral particular de la ecuación diferencial.

El problema de resolución o de integración de una ecuación diferencial consiste en hallar la solución general o la integral general de la ecuación diferencial considerada. Si, además, se ha dado alguna condición inicial, se pide también hallar la solución particular o la integral particular que satisface a la condición inicial considerada.

Como geoméricamente las coordenadas x e y son equipotentes, además de la ecuación $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ se considerará también la ecuación $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}$.

Comprobar si las relaciones dadas son integrales de las ecuaciones diferenciales indicadas o no lo son ($C = \text{const.}$):

$$33. e^{-y} - Cx = 1, \quad xy' + 1 = e^y.$$

$$34. y^3 = \frac{1}{x} + \frac{C}{x^3}, \quad xy^2 dy + y^3 dx = \frac{dx}{x}.$$

$$35. x^3 - 4x^2y + 2xy^2 - y^3 = 0, \\ (3x^2 - 8xy + 2y^2) dx - (4x^2 - 4xy + 3y^2) dy = 0.$$

$$36. y^2 + 2Cx = C^2, \quad yy'^2 + 2xy' = y + 1$$

$$37. \arctg \frac{y}{x} - \ln(C \sqrt{x^2 + y^2}) = 0, \\ (x+y) dx - (x-y) dy = 0.$$

$$38. x = y \int_0^x \sin t^2 dt, \quad y = xy' + y^2 \sin x^2.$$

$$39. x \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = y \ln y,$$

$$xy' + x \ln y = x \sin x + y \ln y.$$

L. ELSGOLTZ

Ecuaciones Diferenciales y cálculo variacional

1969

EDITORIAL MIR

MOSCU

Ecuaciones diferenciales de primer orden

§ 1. ECUACIONES DE PRIMER ORDEN RESUELTAS RESPECTO A LA DERIVADA

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden y de primer grado, si se resuelve respecto a la derivada, puede escribirse en la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Un ejemplo simple de tal ecuación,

$$\frac{dy}{dx} = f(x),$$

se analiza en el curso de cálculo integral. En este caso simple, la solución

$$y = \int f(x) dx + c$$

contiene una constante arbitraria, que puede determinarse si se conoce el valor $y(x_0) = y_0$; entonces

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(x) dx.$$

Más adelante será demostrado que, bajo algunas limitaciones establecidas sobre la función $f(x, y)$, la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

tiene también una solución única, que satisface la condición $y(x_0) = y_0$, y su *solución general*, es decir, el conjunto de soluciones que contiene sin excepción a todas las soluciones, depende de una constante arbitraria.

La ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ establece una dependencia entre las coordenadas de un punto y el coeficiente angular de la

tangente $\frac{dy}{dx}$ a la gráfica de la solución en ese punto. Conociendo a x y a y , se puede calcular $\frac{dy}{dx}$. Por consiguiente, la ecuación diferencial de la forma considerada

determina un campo de direcciones (fig. 1.1), y el problema de la integración de la ecuación diferencial se reduce a hallar las llamadas *curvas integrales*, para las cuales la dirección de las tangentes a éstas coincide en cada punto con la dirección del campo

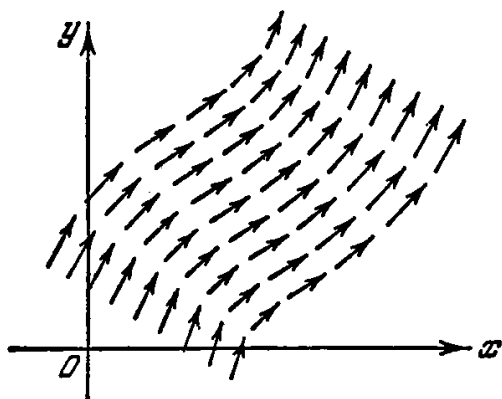


Fig. 1.1

Ejemplo 1.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

En cada punto, diferente del punto $(0, 0)$, el coeficiente angular de la tangente a la curva integral buscada es igual a la razón $\frac{y}{x}$, o sea, coincide con el coeficiente angular de la recta dirigida desde el origen de coordenadas al mismo punto (x, y) . En la fig. 1.2 está representado con flechas el campo de direcciones determinado por la ecuación estudiada. Evidentemente, en este caso las curvas

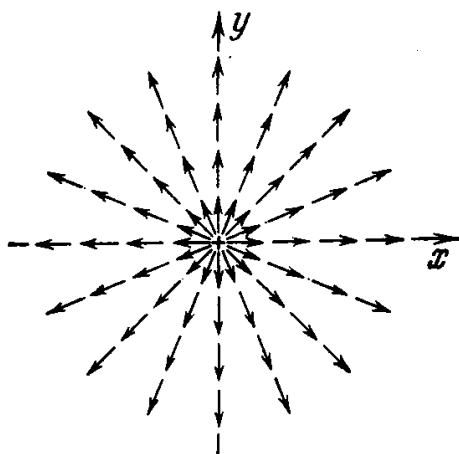


Fig. 1.2

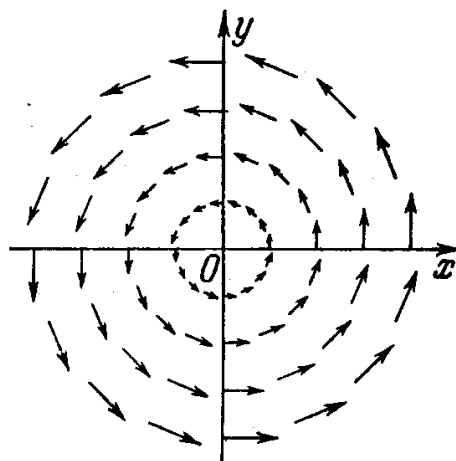


Fig. 1.3

integrales serán las rectas $y=cx$, ya que las direcciones de estas rectas coinciden en todas partes con la dirección del campo.

Ejemplo 2.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Obsérvese que el coeficiente angular de la tangente a las curvas integrales buscadas, $-\frac{x}{y}$, y el coeficiente angular $\frac{y}{x}$ de la tangente a las curvas integrales

del ejemplo 1, satisfacen en cada punto la condición de ortogonalidad: $-\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x} = -1$. Por lo tanto, el campo de direcciones definido por la ecuación diferencial considerada es ortogonal al campo representado en la fig. 1.2. Es evidente que las curvas integrales de la ecuación $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ son circunferencias con centro en el origen de coordenadas: $x^2 + y^2 = c^2$ (fig. 1.3) (más exactamente, semicircunferencias, $y = \sqrt{c^2 - x^2}$ e $y = -\sqrt{c^2 - x^2}$).

Ejemplo 3.

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Para la construcción del campo direccional, hallemos el lugar geométrico de los puntos en los cuales las tangentes a las curvas integrales buscadas conservan una dirección constante. Tales líneas se llaman *isoclinas*. La ecuación de las isoclinas se obtiene considerando $\frac{dy}{dx} = k$, donde k es una constante; $\sqrt{x^2 + y^2} = k$, ó $x^2 + y^2 = k^2$. Por consiguiente, en este caso las isoclinas son circunferencias con centro en el origen de coordenadas, y el coeficiente angular de la tangente a las

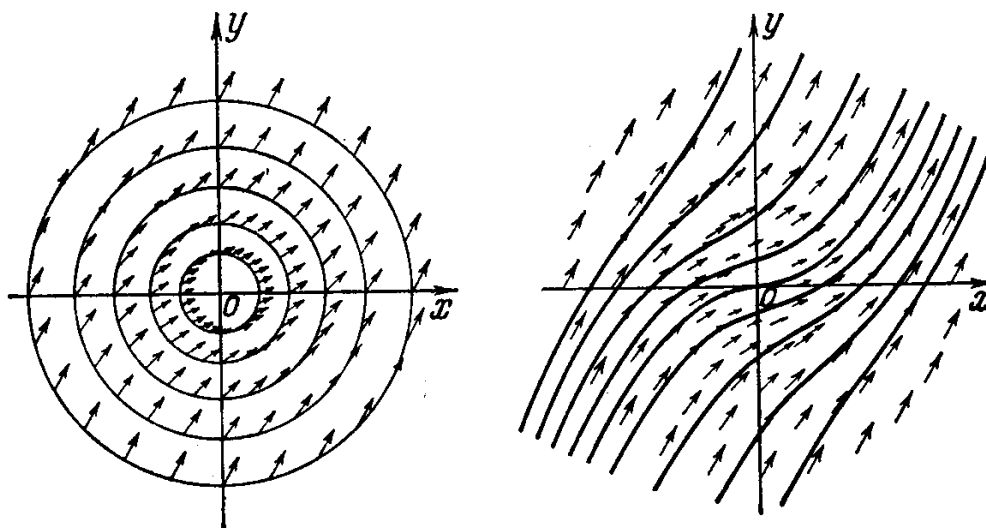


Fig. 1.4

curvas integrales buscadas es igual al radio de dichas circunferencias. Para construir el campo direccional, damos a la constante k ciertos valores determinados (véase la fig. 1.4, parte izquierda). Luego de esto se pueden ya trazar en forma aproximada las curvas integrales buscadas (fig. 1.4, parte derecha).

Ejemplo 4.

$$y' = 1 + xy.$$

Las isoclinas son las hipérbolas $k = xy + 1$, o bien $xy = k - 1$; para $k = 1$, la hipérbola degenera en el par de rectas $x = 0$ e $y = 0$ (fig. 1.5). Para $k = 0$, obtenemos la isoclina $1 + xy = 0$. Esta hipérbola divide al plano en partes, en cada una de las cuales y' conserva el signo constante (fig. 1.6). Las curvas integrales $y = y(x)$, al cruzar la hipérbola $1 + xy = 0$, pasan del campo de crecimiento de la función $y(x)$ al campo de su decrecimiento, o viceversa. Por ello, en las ramas

de esta hipérbola se hallan los puntos de máximo y de mínimo de las curvas integrales.

Determinemos seguidamente el signo de la segunda derivada en las diferentes regiones del plano:

$$y'' = xy' + y, \text{ o bien } y'' = x(1 + xy) + y = x + (x^2 + 1)y.$$

La curva $x + (x^2 + 1)y = 0$ ó,

$$y = -\frac{x}{1+x^2} \quad (1.1)$$

(fig. 1.7) divide al plano en dos partes, en una de las cuales $y'' < 0$ y, por consiguiente, las curvas integrales son cóncavas hacia las y negativas, y en la otra

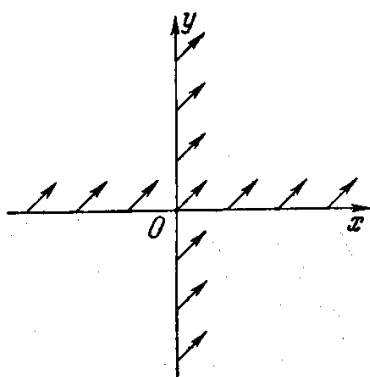


Fig. 1.5

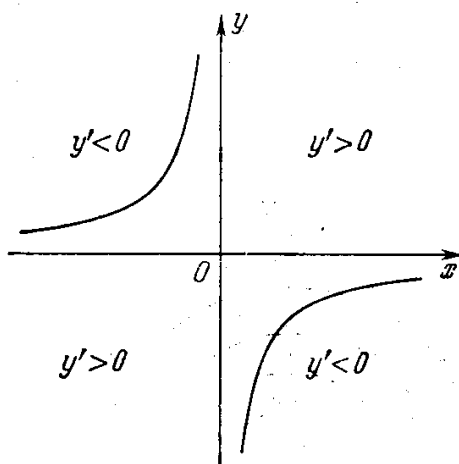


Fig. 1.6

$y'' > 0$, lo que significa que las curvas integrales son cóncavas hacia las y positivas. Al cruzar la curva (1.1), las curvas integrales pasan de la convexidad a la concavidad y, por consiguiente, en esta curva se encuentran los puntos de inflexión de las curvas integrales.

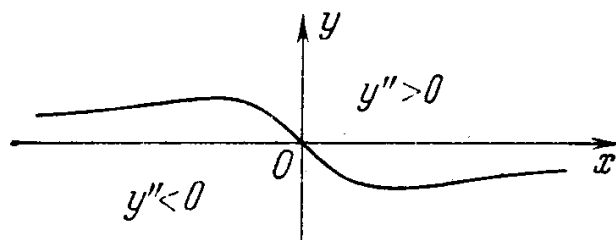


Fig. 1.7

Como resultado del análisis realizado, se conocen el campo de crecimiento y el de decrecimiento de las curvas integrales, la ubicación de los máximos y de los mínimos, la región de convexidad y la de concavidad, así como la disposición de los puntos de inflexión, y la isoclina $k=1$. Estos datos son suficientes para

hacer un esbozo de la disposición de las curvas integrales (fig. 1.8), pero se hubieran podido trazar algunas isoclinas más, lo que nos permitiría precisar más dicha disposición.

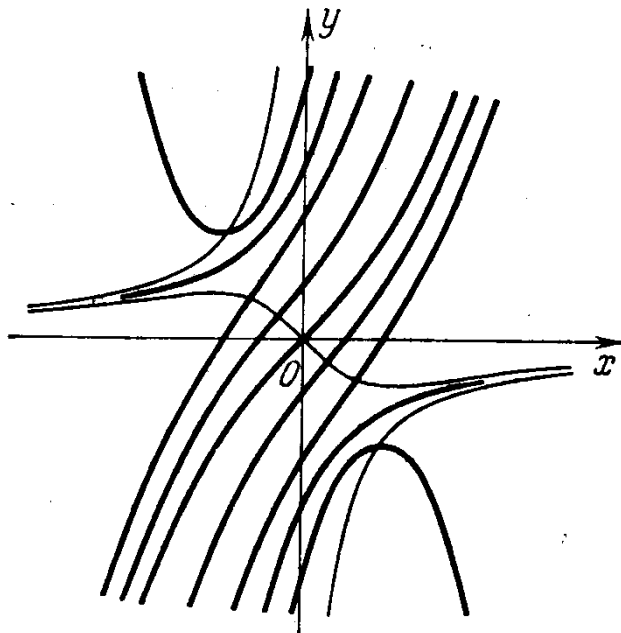


Fig. 1.8

En muchos problemas, en particular en casi todos los problemas de carácter geométrico, las variables x e y son equivalentes. Por ello, en dichos problemas, si éstos se reducen a la resolución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (1.2)$$

es natural considerar, conjuntamente con (1.2), también

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}. \quad (1.3)$$

Si ambas ecuaciones tienen sentido, entonces son equivalentes, ya que si la función $y = y(x)$ es solución de la ecuación (1.2), la función inversa $x = x(y)$ es solución de (1.3) y, por lo tanto, las ecuaciones (1.2) y (1.3) poseen curvas integrales comunes.

Si, en cambio, en algunos puntos una de las ecuaciones (1.2) o (1.3) pierde su sentido, entonces en esos puntos es natural sustituirla por la otra ecuación.

Por ejemplo, la ecuación $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ carece de sentido para $x = 0$. Sustituyéndola por la ecuación $\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y}$, cuyo segundo miembro ya no pierde el sentido para $x = 0$, hallamos, como complemento a las soluciones encontradas anteriormente $y = cx$ (véase la pág. 18) otra curva integral, $x = 0$, de esta ecuación.

§ 2. ECUACIONES CON VARIABLES SEPARABLES

Las ecuaciones diferenciales del tipo

$$f_2(y) dy = f_1(x) dx \quad (1.4)$$

se llaman *ecuaciones con variables separadas*. Consideremos que las funciones $f_1(x)$ y $f_2(y)$ son continuas.

Supongamos que $y(x)$ es solución de esta ecuación; entonces, al sustituir $y(x)$ en la ecuación (1.4), obtenemos una identidad que, al ser integrada, da

$$\int f_2(y) dy = \int f_1(x) dx + c, \quad (1.5)$$

donde c es una constante arbitraria.

Hemos obtenido una ecuación finita *) (1.5), satisfecha por todas las soluciones de la ecuación (1.4). Además, cada solución de la ecuación (1.5) es solución de la (1.4), ya que si una función $y(x)$, al ser sustituida en la ecuación (1.5), la transforma en una identidad, entonces derivando dicha identidad obtenemos que $y(x)$ satisface también a (1.4).

La ecuación finita $\Phi(x, y) = 0$, que determina la solución $y(x)$ de la ecuación diferencial como función implícita de x , se llama *integral* de la ecuación diferencial considerada.

Si esta ecuación finita determina sin excepción todas las soluciones de la ecuación diferencial dada, entonces se llama *integral general* de dicha ecuación diferencial. Por consiguiente, la ecuación (1.5) es integral general de la ecuación (1.4). Para que (1.5) determine y como función implícita de x , es suficiente exigir que $f_2(y) \neq 0$.

Es posible que en algunos problemas no sea posible expresar las integrales indefinidas $\int f_1(x) dx$ y $\int f_2(y) dy$ en funciones elementales; pero, a pesar de esto, consideraremos resuelto también en este caso el problema de la integración de la ecuación diferencial (1.4), en el sentido de que lo hemos reducido a un problema más simple, ya estudiado en el curso de cálculo integral: el problema del cálculo de las integrales indefinidas (de cuadraturas **).

Si hay que obtener la resolución particular que satisface la condición $y(x_0) = y_0$, ésta evidentemente se determina por la ecuación

$$\int_{y_0}^y f_2(y) dy = \int_{x_0}^x f_1(x) dx,$$

*) Es decir, una ecuación en la que no figuran ni derivadas ni diferenciales (N. de la Red.).

**) Como el término "integral" en la teoría de ecuaciones diferenciales se utiliza frecuentemente en el sentido de integral de la ecuación diferencial, entonces para evitar confusiones, para las integrales de las funciones, $\int f(x) dx$, generalmente se utiliza el término "cuadratura".

la cual se obtiene de

$$\int_{y_0}^y f_2(y) dy = \int_{x_0}^x f_1(x) dx + c,$$

utilizando las condiciones iniciales $y(x_0) = y_0$.

Ejemplo 1.

$$x dx + y dy = 0.$$

Las variables están separadas, ya que el coeficiente de dx es función sólo de x , y el coeficiente de dy , sólo de y . Integrando, obtenemos

$$\int x dx + \int y dy = c, \text{ o bien } x^2 + y^2 = c_1^2,$$

que es una familia de circunferencias con centro en el origen de coordenadas (compárese con el ejemplo 2, pág. 18).

Ejemplo 2.

$$e^{x^2} dx = \frac{dy}{\ln y}.$$

Integrando, obtenemos

$$\int e^{x^2} dx = \int \frac{dy}{\ln y} + c.$$

Las integrales $\int e^{x^2} dx$ y $\int \frac{dy}{\ln y}$ no se resuelven en funciones elementales; sin embargo, la ecuación original se considera integrada, puesto que el problema fue reducido a cuadraturas.

Las ecuaciones del tipo

$$\varphi_1(x) \psi_1(y) dx = \varphi_2(x) \psi_2(y) dy,$$

en las cuales los coeficientes de las diferenciales se descomponen en factores dependientes sólo de x o de y , se llaman *ecuaciones diferenciales con variables separables*, ya que dividiendo entre $\psi_1(y) \varphi_2(x)$, éstas se reducen a una ecuación de variables separadas:

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} dx = \frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)} dy.$$

Obsérvese que la división entre $\psi_1(y) \varphi_2(x)$ puede conducir a la pérdida de soluciones particulares, que reducen a cero el producto $\psi_1(y) \cdot \varphi_2(x)$; si las funciones $\psi_1(y)$ y $\varphi_2(x)$ pueden ser discontinuas, es posible la aparición de soluciones superfluas, que reducen a cero el factor

$$\frac{1}{\psi_1(y) \varphi_2(x)}.$$

Ejemplo 3.

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ (compárese con el ejemplo 1, pág. 18). Separamos variables e integramos:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\ln |y| = \ln |x| + \ln c, \quad c > 0.$$

Potenciando, obtenemos $|y| = c|x|$. Si se consideran sólo soluciones lisas*), entonces la ecuación $|y| = c|x|$, donde $c > 0$, es equivalente a la ecuación $y = \pm cx$, o bien $y = c_1 x$, donde c_1 puede tomar valores positivos o negativos, pero $c_1 \neq 0$. Si tomamos en cuenta que al dividir entre y se pierde la solución $y=0$, entonces se puede considerar que en la solución $y = c_1 x$, la constante c_1 adquiere también el valor $c_1 = 0$, para el cual obtenemos la solución anteriormente perdida. $y=0$.

Observación. Si en el ejemplo 3 se considera que las variables x e y son equivalentes, entonces la ecuación $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$, que pierde el sentido para $x=0$, debe ser completada con la ecuación $\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y}$ (véase la pág. 21), la cual evidentemente posee la solución $x=0$, que no está contenida en la solución $y = c_1 x$ hallada anteriormente.

Ejemplo 4.

$$x(1+y^2)dx - y(1+x^2)dy = 0.$$

Separamos variables e integramos:

$$\frac{y dy}{1+y^2} = \frac{x dx}{1+x^2}; \quad \int \frac{y dy}{1+y^2} = \int \frac{x dx}{1+x^2} + c;$$

$$\ln(1+y^2) = \ln(1+x^2) + \ln c_1; \quad 1+y^2 = c_1(1+x^2).$$

Ejemplo 5.

$$\frac{dx}{dt} = 4t \sqrt{x}.$$

Hallar la solución $x(t)$ que satisface la condición $x(1)=1$.

Separamos variables e integramos:

$$\int_1^x \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \int_1^t 2t dt, \quad \sqrt{x} = t^2, \quad x = t^4.$$

Ejemplo 6. Como ya fue mencionado en la introducción, se ha establecido que la velocidad de desintegración radioactiva es proporcional a la cantidad x de sustancia aún no desintegrada. Hallar la dependencia de x respecto al tiempo t , si en el momento inicial para $t=t_0$, era $x=x_0$.

Supondremos conocido el coeficiente de proporcionalidad k , llamado constante de desintegración. La ecuación diferencial del proceso tendrá la forma

$$\frac{dx}{dt} = -kx \quad (1.6)$$

*) Es decir, soluciones que poseen primera derivada continua (N. de la Red.).

(el signo — indica que x decrece cuando t aumenta, $k > 0$). Separando variables e integrando, se obtiene

$$\frac{dx}{x} = -k dt; \quad \ln |x| - \ln |x_0| = k(t - t_0),$$

de donde

$$x = x_0 e^{-k(t-t_0)}.$$

Determinemos también el período de semidesintegración τ (o sea, el tiempo durante el cual se desintegra $\frac{1}{2} x_0$). Haciendo $t - t_0 = \tau$, obtenemos $\frac{1}{2} x_0 = x_0 e^{-k\tau}$, de donde $\tau = \frac{\ln 2}{k}$.

No solamente la desintegración radioactiva, sino también cualquier otra reacción monomolecular, en base a la ley de acción de las masas, se describe por la ecuación $\frac{dx}{dt} = -kx$, donde x es la cantidad de sustancia que aún no ha reaccionado.

La ecuación

$$\frac{dx}{dt} = kx, \quad k > 0, \quad (1.7)$$

que se diferencia de la (1.6) sólo en el signo del segundo miembro, describe muchos procesos de "reproducción" (o "multiplicación"), por ejemplo, la "reproducción" de la cantidad de neutrones en las reacciones nucleares en cadena, o la reproducción de la cantidad de bacterias, suponiendo que se encuentren en un ambiente óptimo y que, por ello, la velocidad de su crecimiento sea proporcional a la cantidad de bacterias presentes.

La solución de la ecuación (1.7) que satisface la condición $x(t_0) = x_0$ tiene la forma $x = x_0 e^{k(t-t_0)}$ y, a diferencia de las soluciones de (1.6), $x(t)$ no disminuye, sino que crece exponencialmente con el incremento de t .

Ejemplo 7.

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \rho(\rho - 2)(\rho - 4).$$

Trazar las curvas integrales sin integrar la ecuación; ρ y φ son las coordenadas polares.

La ecuación tiene las soluciones evidentes $\rho = 0$, $\rho = 2$ y $\rho = 4$. Para $0 < \rho < 2$, $\frac{d\rho}{d\varphi} > 0$; para $2 < \rho < 4$, $\frac{d\rho}{d\varphi} < 0$ y para $\rho > 4$, $\frac{d\rho}{d\varphi} > 0$.

Por lo tanto, las curvas integrales son las circunferencias $\rho = 2$ y $\rho = 4$, y las espirales que se "envuelven", al aumentar φ , en la circunferencia $\rho = 2$ y se "desenvuelven" de la circunferencia $\rho = 4$. Las curvas integrales cerradas, en entornos suficientemente pequeños de las cuales todas las curvas integrales son espirales, se llaman *ciclos límite*. En el presente ejemplo las circunferencias $\rho = 2$ y $\rho = 4$ son ciclos límite.

Ejemplo 8. Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de parábolas $y = ax^2$.

Se denominan *trayectorias ortogonales* de una familia dada de curvas a las líneas que cortan en ángulo recto las curvas de dicha familia. Los coeficientes angulares y'_1 e y'_2 de las tangentes a las curvas de la familia dada y a las trayectorias ortogonales buscadas, deben satisfacer en cada punto a la condición de

ortogonalidad $y'_2 = -\frac{1}{y'_1}$. Para la familia de parábolas $y' = ax^2$, hallamos $y' = 2ax$, o bien, puesto que $a = \frac{y}{x^2}$, $y' = \frac{2y}{x}$. Por consiguiente la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales buscadas tiene la forma $y' = -\frac{x}{2y}$.

Separando variables, hallamos $2y dy + x dx = 0$, e integrando, obtenemos la familia de elipses

$$\frac{x^2}{2} + y^2 = c^2$$

(fig. 1.9).

Ejemplo 9. Sea $u = xy$ el potencial de las velocidades de una corriente líquida plano-paralela. Hallar la ecuación de las líneas de la corriente.

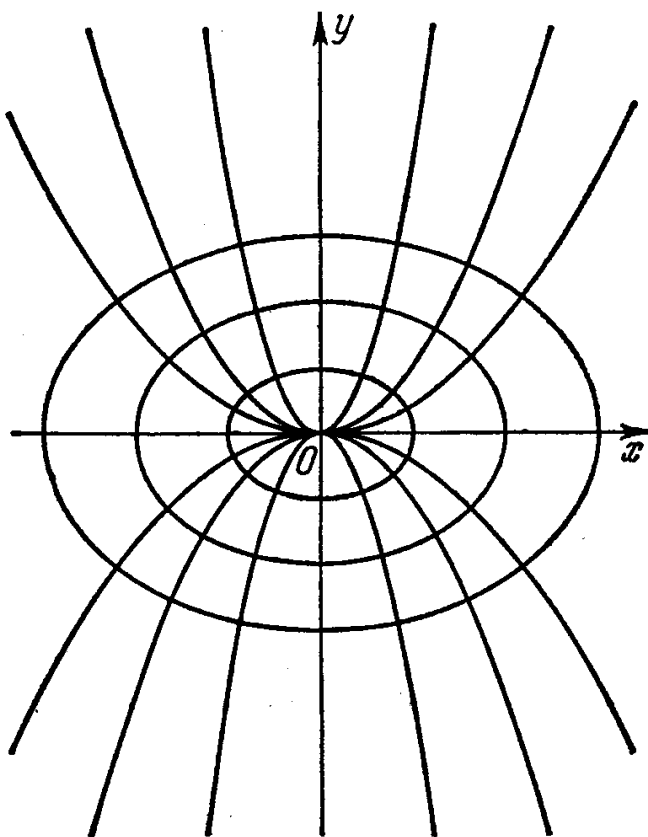


Fig. 1.9

Las líneas de la corriente son las trayectorias ortogonales de la familia de líneas equipotenciales $xy = c$. Hallamos el coeficiente angular de la tangente a las líneas equipotenciales: $xy' + y = 0$, $y' = -\frac{y}{x}$. En consecuencia, la ecuación diferencial de las líneas de la corriente tiene la forma $y' = \frac{x}{y}$, o bien $y dy = x dx$; integrando, obtenemos $x^2 - y^2 = c$, que es una familia de hipérbolas.

Ejemplo 10. Una esfera metálica hueca homogénea, de radio interior r_1 y exterior r_2 , se encuentra en estado térmico estacionario. Su temperatura en la

superficie interior es igual a T_1 , y en la exterior, a T_2 . Hallar la temperatura T a la distancia r del centro de la esfera, $r_1 \leq r \leq r_2$.

Por simetría se deduce que T es sólo función de r .

Puesto que entre dos esferas concéntricas que tienen por centro común el de la esfera original (sus radios pueden variar desde r_1 hasta r_2) la cantidad de calor permanece constante, entonces a través de cada esfera pasa una misma cantidad de calor Q . Por lo tanto, la ecuación diferencial que describe el proceso considerado tiene la forma

$$-4\pi k r^2 \frac{dT}{dr} = Q,$$

donde k es el coeficiente de conductibilidad térmica.

Separando variables e integrando, obtenemos la dependencia buscada de T respecto a r :

$$4\pi k dT = -\frac{Q dr}{r^2};$$

$$4\pi k \int_{T_1}^T dT = -Q \int_{r_1}^r \frac{dr}{r^2},$$

$$4\pi k (T - T_1) = Q \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right).$$

Para la determinación de Q utilizamos la condición: $T = T_2$ cuando $r = r_2$;

$$Q = \frac{4\pi k (T_2 - T_1)}{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}} = \frac{4\pi k (T_2 - T_1) r_1 r_2}{r_1 - r_2}.$$

§ 3. ECUACIONES QUE SE REDUCEN A ECUACIONES DE VARIABLES SEPARABLES

Muchas ecuaciones diferenciales pueden ser reducidas a ecuaciones con variables separables mediante una sustitución de variables. A dicho grupo pertenecen, por ejemplo, las ecuaciones de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by),$$

donde a y b son magnitudes constantes, las cuales se transforman en ecuaciones con variables separables por medio de la sustitución $z = ax + by$. Efectivamente, pasando a las nuevas variables x y z , tendremos

$$\frac{dz}{dx} = a + b \frac{dy}{dx}, \quad \frac{dz}{dx} = a + bf(z),$$

o bien

$$\frac{dz}{a + bf(z)} = dx,$$

con lo que hemos separado las variables. Integrando, obtenemos

$$x = \int \frac{dz}{a + bf(z)} + c.$$

Ejemplo 1.

$$\frac{dy}{dx} = 2x + y.$$

Haciendo $z = 2x + y$, tendremos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 2, \quad \frac{dz}{dx} - 2 = z.$$

Separando variables e integrando, se obtiene

$$\frac{dz}{z+2} = dx, \quad \ln|z+2| = x + \ln c, \quad z = -2 + ce^x,$$

$$2x + y = -2 + ce^x, \quad y = ce^x - 2x - 2.$$

Ejemplo 2.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x-y} + 1.$$

Haciendo $x - y = z$, obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{dz}{dx}, \quad 1 - \frac{dz}{dx} = \frac{1}{z} + 1;$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{z}, \quad z dz = -dx, \quad z^2 = -2x + c, \quad (x-y)^2 = -2x + c.$$

A ecuaciones con variables separables se reducen también las *ecuaciones diferenciales homogéneas de primer orden*, que tienen la forma

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

En efecto, después de la sustitución $z = \frac{y}{x}$, o bien $y = xz$, obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = x \frac{dz}{dx} + z, \quad x \frac{dz}{dx} + z = f(z), \quad \frac{dz}{f(z)-z} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{dz}{f(z)-z} = \ln|x| + \ln c, \quad x = ce^{\int \frac{dz}{f(z)-z}}.$$

Obsérvese que el segundo miembro de la ecuación homogénea es una función homogénea de variables x e y de grado nulo de homogeneidad; por eso la ecuación del tipo

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

será homogénea si $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son funciones homogéneas de x e y , del mismo grado de homogeneidad, puesto que en este caso

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Ejemplo 3.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$$

Haciendo $y = xz$, $\frac{dy}{dx} = x \frac{dz}{dx} + z$ y sustituyendo en la ecuación inicial, obtenemos

$$x \frac{dz}{dx} + z = z + \operatorname{tg} z, \quad \frac{\cos z \, dz}{\operatorname{sen} z} = \frac{dx}{x},$$

$$\ln |\operatorname{sen} z| = \ln |x| + \ln c, \quad \operatorname{sen} z = cx, \quad \operatorname{sen} \frac{y}{x} = cx.$$

Ejemplo 4.

$$(x+y) \, dx - (y-x) \, dy = 0.$$

Haciendo $y = xz$, $dy = x \, dz + z \, dx$, obtenemos

$$(x+xz) \, dx - (xz-x)(x \, dz + z \, dx) = 0,$$

$$(1+2z-z^2) \, dx + x(1-z) \, dz = 0,$$

$$\frac{(1-z) \, dz}{1+2z-z^2} + \frac{dx}{x} = 0, \quad \frac{1}{2} \ln |1+2z-z^2| + \ln |x| =$$

$$= \frac{1}{2} \ln c, \quad x^2(1+2z-z^2) = c, \quad x^2 + 2xy - y^2 = c.$$

Las ecuaciones del tipo

$$\frac{dy}{dx} = f \left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} \right) \quad (1.8)$$

pueden reducirse a ecuaciones homogéneas, si trasladamos el origen de coordenadas al punto de intersección (x_1, y_1) de las rectas

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{y} \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Efectivamente, el miembro independiente en las ecuaciones de estas rectas en las nuevas coordenadas $X = x - x_1$, $Y = y - y_1$, será igual a cero; los coeficientes de las coordenadas permanecen invariables; $\frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX}$, y la ecuación (1.8) toma la forma

$$\frac{dY}{dX} = f \left(\frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y} \right),$$

o bien

$$\frac{dY}{dX} = f \left(\frac{a_1 + b_1 \frac{Y}{X}}{a_2 + b_2 \frac{Y}{X}} \right) = \varphi \left(\frac{Y}{X} \right),$$

que ya es una ecuación homogénea.

Este método no se puede aplicar sólo en el caso de paralelismo de las rectas $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ y $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Pero en este caso los coeficientes de las coordenadas son proporcionales:

$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = k$, y la ecuación (1.8) se puede escribir en la forma

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{k(a_1x + b_1y) + c_2}\right) = F(a_1x + b_1y);$$

por consiguiente, como se demuestra en la pág. 27, el cambio de variables $z = a_1x + b_1y$ transforma la ecuación considerada en una ecuación con variables separables.

Ejemplo 5.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y+1}{x+y-3}.$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones $x-y+1=0$, $x+y-3=0$, obtenemos $x_1=1$, $y_1=2$. Haciendo $x=X+1$, $y=Y+2$, tendremos

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X-Y}{X+Y}.$$

El cambio de variables $z = \frac{Y}{X}$, o bien $Y = zX$ conduce a una ecuación de variables separables:

$$\begin{aligned} z + X \frac{dz}{dX} &= \frac{1-z}{1+z}, \quad \frac{(1+z) dz}{1-2z-z^2} = \frac{dX}{X}, \\ -\frac{1}{2} \ln |1-2z-z^2| &= \ln |X| - \frac{1}{2} \ln c, \\ (1-2z-z^2) X^2 &= c, \quad X^2 - 2XY - Y^2 = c, \\ x^2 - 2xy - y^2 + 2x + 6y &= c_1. \end{aligned}$$

§ 4. ECUACIONES LINEALES DE PRIMER ORDEN

Se llama *ecuación diferencial lineal de primer orden* a una ecuación lineal con respecto a la función desconocida y a su derivada. La ecuación lineal tiene la forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x), \quad (1.9)$$

donde $p(x)$ y $f(x)$ se considerarán en lo sucesivo funciones continuas de x en la región en que se exige integrar la ecuación (1.9).

Si $f(x) \equiv 0$, la ecuación (1.9) se llama *lineal homogénea*. En la ecuación lineal homogénea las variables se separan:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0, \text{ de donde } \frac{dy}{y} = -p(x)dx,$$

e integrando, obtenemos

$$\begin{aligned} \ln |y| &= -\int p(x)dx + \ln c_1, \quad c_1 > 0, \\ y &= ce^{-\int p(x)dx}, \quad c \neq 0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Al dividir entre y se perdió la solución $y \equiv 0$; sin embargo, ésta puede ser incluida en la familia de soluciones hallada (1.10), si se considera que c puede tomar también el valor 0.

Para integrar la ecuación lineal no homogénea

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x) \quad (1.9)$$

puede ser aplicado el así llamado *método de variación de la constante*. Al aplicar dicho método, primeramente se integra la ecuación homogénea correspondiente (o sea, la que tiene el mismo primer miembro):

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0,$$

cuya solución general, como fue indicado anteriormente, tiene la forma

$$y = ce^{-\int p(x) dx}.$$

Cuando c es constante, la función $ce^{-\int p(x) dx}$ es la solución de la ecuación homogénea. Probemos ahora satisfacer la ecuación no homogénea considerando c como función de x , o sea, realizando en esencia la sustitución de variables

$$y = c(x)e^{-\int p(x) dx},$$

donde $c(x)$ es una nueva función desconocida de x .

Calculando la derivada

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dc}{dx} e^{-\int p(x) dx} - c(x)p(x)e^{-\int p(x) dx}$$

y sustituyéndola en la ecuación no homogénea inicial (1.9), se obtiene

$$\frac{dc}{dx} e^{-\int p(x) dx} - c(x)p(x)e^{-\int p(x) dx} + p(x)c(x)e^{-\int p(x) dx} = f(x),$$

o bien

$$\frac{dc}{dx} = f(x)e^{\int p(x) dx}.$$

de donde, integrando, se halla

$$c(x) = \int f(x)e^{\int p(x) dx} dx + c_1$$

y, por consiguiente,

$$y = c(x)e^{-\int p(x) dx} = c_1 e^{-\int p(x) dx} + e^{-\int p(x) dx} \int f(x)e^{\int p(x) dx} dx. \quad (1.11)$$

De este modo, la solución general de la ecuación lineal no homogénea es igual a la suma de la solución general de la ecuación homogénea correspondiente

$$c_1 e^{-\int p(x) dx}$$

y de la solución particular de la ecuación no homogénea

$$e^{-\int p(x) dx} \int f(x) e^{\int p(x) dx} dx$$

que se obtiene de (1.11) si $c_1 = 0$.

Obsérvese que en ejemplos concretos no es conveniente utilizar la fórmula (1.11), compleja y difícil de recordar; es más sencillo repetir cada vez todas las operaciones expuestas más arriba.

Ejemplo 1.

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x^2.$$

Integramos la ecuación homogénea correspondiente

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0, \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, \quad \ln |y| = \ln |x| + \ln c, \quad y = cx.$$

Consideramos c como función de x ; entonces $y = c(x)x$, $\frac{dy}{dx} = \frac{dc}{dx}x + c(x)$ y, sustituyendo en la ecuación inicial obtenemos, luego de simplificar,

$$\frac{dc}{dx}x = x^2, \text{ o bien } dc = x dx, \quad c(x) = \frac{x^2}{2} + c_1.$$

Por lo tanto, la solución general es:

$$y = c_1 x + \frac{x^3}{2}.$$

Ejemplo 2.

$$\frac{dy}{dx} - y \operatorname{ctg} x = 2x \operatorname{sen} x.$$

Integramos la ecuación homogénea correspondiente

$$\frac{dy}{dx} - y \operatorname{ctg} x = 0, \quad \frac{dy}{y} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} dx, \\ \ln |y| = \ln |\operatorname{sen} x| + \ln c, \quad y = c \operatorname{sen} x.$$

Variamos la constante

$$y = c(x) \operatorname{sen} x, \quad y' = c'(x) \operatorname{sen} x + c(x) \cos x.$$

Sustituyendo en la ecuación inicial, obtenemos

$$c'(x) \operatorname{sen} x + c(x) \cos x - c(x) \cos x = 2x \operatorname{sen} x, \\ c'(x) = 2x, \quad c(x) = x^2 + c_1, \\ y = x^2 \operatorname{sen} x + c_1 \operatorname{sen} x.$$

Ejemplo 3. En un circuito eléctrico con autoinducción tiene lugar el paso de corriente alterna. La tensión U es una función dada del tiempo, $U = U(t)$, la resistencia R y la autoinducción L son constantes; la intensidad inicial de la corriente $I(0) = I_0$ es dada. Hallar la dependencia de la intensidad de la corriente $I = I(t)$ respecto al tiempo.

Aplicando la ley de Ohm para un circuito eléctrico con autoinducción, obtenemos

$$U - L \frac{dI}{dt} = RI.$$

La solución de esta ecuación lineal que satisface la condición inicial $I(0) = I_0$, de acuerdo con (1.11), tiene la forma

$$I = e^{-\frac{R}{L}t} \left[I_0 + \frac{1}{L} \int_0^t U(t) e^{\frac{R}{L}t} dt \right]. \quad (1.12)$$

Para una tensión constante $U = U_0$, obtenemos

$$I = \frac{U_0}{R} + \left(I_0 - \frac{U_0}{R} \right) e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Es interesante el caso de tensión alterna sinusoidal: $U = A \sin \omega t$. En este caso, según (1.12), obtenemos

$$I = e^{-\frac{R}{L}t} \left(I_0 + \frac{A}{L} \int_0^t e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t dt \right).$$

La integral del segundo miembro se toma fácilmente.

Muchas ecuaciones diferenciales pueden ser reducidas a ecuaciones lineales mediante un cambio de variables. Por ejemplo, la *ecuación de Bernoulli*, que tiene la forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)y^n, \quad n \neq 1,$$

o bien

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + p(x)y^{1-n} = f(x), \quad (1.13)$$

con el cambio de variables $y^{1-n} = z$, se reduce a una ecuación lineal. Efectivamente, derivando $y^{1-n} = z$, hallamos $(1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$, y sustituyendo en (1.13), obtenemos la ecuación lineal

$$\frac{1}{1-n} \frac{dz}{dx} + p(x)z = f(x).$$

Ejemplo 4.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{y}{2x} + \frac{x^2}{2y}, \\ 2y \frac{dy}{dx} &= \frac{y^2}{x} + x^2, \quad y^2 = z, \quad 2y \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}, \\ \frac{dz}{dx} &= \frac{z}{x} + x^2\end{aligned}$$

y se prosigue como en el ejemplo 1 de la pág. 32.

La ecuación

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y + q(x)y^2 = f(x),$$

llamada *ecuación de Riccati*, en general no se integra en cuadraturas, pero por sustitución de variables puede ser transformada en una ecuación de Bernoulli, si se conoce una solución particular $y_1(x)$ de esta ecuación. Efectivamente, haciendo $y = y_1 + z$, se obtiene

$$y_1' + z' + p(x)(y_1 + z) + q(x)(y_1 + z)^2 = f(x)$$

o, como $y_1' + p(x)y_1 + q(x)y_1^2 = f(x)$, tendremos la ecuación de Bernoulli

$$z' + [p(x) + 2q(x)y_1]z + q(x)z^2 = 0.$$

Ejemplo 5.

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - \frac{2}{x^2}.$$

En este ejemplo no es difícil hallar la solución particular $y_1 = \frac{1}{x}$. Haciendo $y = z + \frac{1}{x}$, obtenemos $y' = z' - \frac{1}{x^2}$, $z' - \frac{1}{x^2} = \left(z + \frac{1}{x}\right)^2 - \frac{2}{x^2}$, o bien $z' = z^2 + \frac{2}{x}$, que es una ecuación de Bernoulli.

$$\frac{z'}{z^2} = \frac{2}{xz} + 1, \quad u = \frac{1}{z}, \quad \frac{du}{dx} = -\frac{z'}{z^2},$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{2u}{x} - 1, \quad \frac{du}{u} = -\frac{2dx}{x},$$

$$\ln |u| = -2 \ln |x| + \ln c, \quad u = \frac{c}{x^2}, \quad u = \frac{c(x)}{x^2},$$

$$\frac{c'(x)}{x^2} = -1, \quad c(x) = -\frac{x^3}{3} + c_1,$$

$$u = \frac{c_1}{x^2} - \frac{x}{3}, \quad \frac{1}{z} = \frac{c_1}{x^2} - \frac{x}{3}, \quad \frac{1}{y - \frac{1}{x}} = \frac{c_1}{x^2} - \frac{x}{3},$$

$$y = \frac{1}{x} + \frac{3x^2}{c_2 - x^3}.$$

§ 5. ECUACIONES EN DIFERENCIALES TOTALES

Puede suceder que el primer miembro de la ecuación diferencial

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (1.14)$$

sea la diferencial total de cierta función $u(x, y)$:

$$du(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

y que, por consiguiente, la ecuación (1.14) tome la forma

$$du(x, y) = 0.$$

Si la función $y(x)$ es solución de la ecuación (1.14), entonces

$$du(x, y(x)) \equiv 0,$$

de donde

$$u(x, y(x)) = c, \quad (1.15)$$

donde c es una constante. Recíprocamente, si cierta función $y(x)$ convierte en identidad la ecuación finita (1.15), entonces, derivando la identidad obtenida, tendremos $du(x, y(x)) = 0$ y, por consiguiente, $u(x, y) = c$, donde c es una constante arbitraria, es integral general de la ecuación inicial.

Si las condiciones iniciales $y(x_0) = y_0$ están dadas, la constante c se determina de (1.15): $c = u(x_0, y_0)$ y

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) \quad (1.15_1)$$

es la integral particular buscada. Si $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) \neq 0$ en el punto (x_0, y_0) , entonces la ecuación (1.15₁) determina y como función implícita de x .

Para que el primer miembro de la ecuación (1.14)

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

sea la diferencial total de cierta función $u(x, y)$, como se sabe, es necesario y suficiente que

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}. \quad (1.16)$$

Si esta condición, señalada por primera vez por Euler, se cumple, entonces la ecuación (1.14) se integra fácilmente. En efecto,

$$du = Mdx + Ndy.$$

Por otra parte,

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy.$$

Por consiguiente,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y); \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y),$$

de donde

$$u(x, y) = \int M(x, y) dx + c(y).$$

Al calcular la integral $\int M(x, y) dx$, la magnitud y se considera constante; por eso, $c(y)$ es una función arbitraria de y .

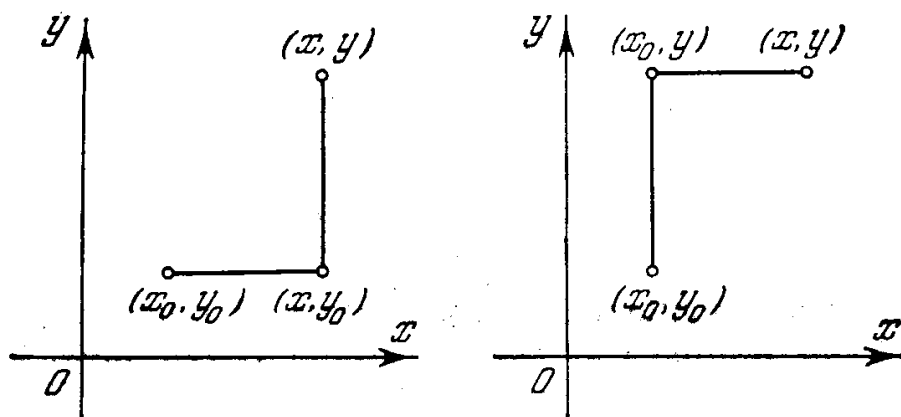


Fig. 1.10

Para determinar la función $c(y)$, derivamos la función hallada $u(x, y)$ respecto a y y, como $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$, obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\int M(x, y) dx \right) + c'(y) = N(x, y).$$

De esta ecuación se determina $c'(y)$, e integrando se halla $c(y)$.

Como es sabido del curso de análisis matemático, se puede determinar aún más fácilmente la función $u(x, y)$ por su diferencial total $du = M(x, y) dx + N(x, y) dy$, tomando la integral curvilínea de $M(x, y) dx + N(x, y) dy$ desde cierto punto fijo (x_0, y_0) hasta un punto con coordenadas variables (x, y) , por cualquier camino:

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} M(x, y) dx + N(x, y) dy.$$

Con frecuencia, en calidad de camino de integración es cómodo tomar una línea quebrada, compuesta por dos segmentos paralelos a los ejes de coordenadas (fig. 1.10); en este caso

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} M dx + N dy = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y_0)} M dx + \int_{(x, y_0)}^{(x, y)} N dy,$$

o bien

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} M dx + N dy = \int_{(x_0, y_0)}^{(x_0, y)} N dy + \int_{(x_0, y)}^{(x, y)} M dx.$$

Ejemplo 1.

$$(x+y+1) dx + (x-y^2+3) dy = 0.$$

El primer miembro de la ecuación es la diferencial total de cierta función $u(x, y)$, puesto que

$$\begin{aligned} \frac{\partial (x+y+1)}{\partial y} &\equiv \frac{\partial (x-y^2+3)}{\partial x}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= x+y+1, \quad u = \frac{x^2}{2} + xy + x + c(y), \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= x+c'(y), \quad x+c'(y) = x-y^2+3, \\ c'(y) &= -y^2+3, \quad c(y) = -\frac{y^3}{3} + 3y + c_1, \\ u &= \frac{x^2}{2} + xy + x - \frac{y^3}{3} + 3y + c_1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la integral general tiene la forma

$$3x^2 + 6xy + 6x - 2y^3 + 18y = c_2. \quad (1.17)$$

Se puede utilizar también el otro método de determinación de la función $u(x, y)$:

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (x+y+1) dx + (x-y^2+3) dy.$$

Como punto inicial (x_0, y_0) escogemos, por ejemplo, el origen de coordenadas, y en calidad de camino de integración, la quebrada de la fig. 1.11. Entonces

$$u(x, y) = \int_{(0, 0)}^{(x, 0)} (x+1) dx + \int_{(x, 0)}^{(x, y)} (x-y^2+3) dy = \frac{x^2}{2} + x + xy - \frac{y^3}{3} + 3y$$

y la integral general tiene la forma

$$\frac{x^2}{2} + x + xy - \frac{y^3}{3} + 3y = c,$$

o bien como en (1.17).

En algunos casos, si el primer miembro de la ecuación

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad (1.14)$$

no es diferencial total, resulta fácil escoger una función $\mu(x, y)$, luego del producto por la cual el primer miembro de (1.14) se transforma en una diferencial total:

$$du = \mu M dx + \mu N dy.$$

Esta función μ se llama *factor integrante*. Obsérvese que la multiplicación por el factor integrante $\mu(x, y)$ puede conducir a que aparezcan soluciones particulares superfluas, que reducen este factor a cero.

Ejemplo 2.

$$x dx + y dy + (x^2 + y^2) x^2 dx = 0.$$

Es evidente que después de multiplicar por el factor $\mu = \frac{1}{x^2 + y^2}$, el primer miembro se transforma en diferencial total. Efectivamente, luego del producto por $\mu = \frac{1}{x^2 + y^2}$, obtenemos

$$\frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} + x^2 dx = 0,$$

o integrando: $\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + \frac{x^3}{3} = \ln c_1$. Multiplicando por 2 y potenciando, tendremos

$$(x^2 + y^2) e^{\frac{2}{3} x^3} = c.$$

Es claro que no siempre el factor integrante se escoge tan fácilmente. En general, para hallar dicho factor es necesario escoger por lo menos una solución particular no idénticamente nula de la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial \mu M}{\partial y} = \frac{\partial \mu N}{\partial x}$$

o, en forma desarrollada,

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} M + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} N + \mu \frac{\partial N}{\partial x},$$

la cual, después de dividir entre μ y de cambiar de miembro algunos términos, se reduce a

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} M - \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} N = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}. \quad (1.18)$$

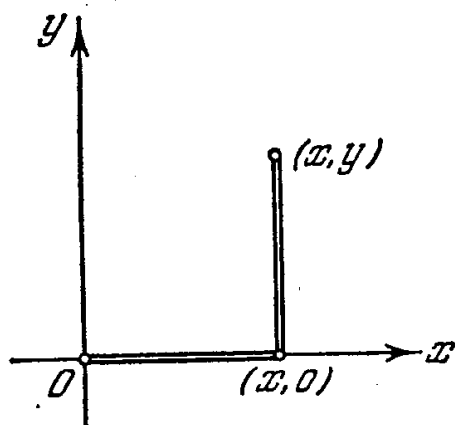


Fig. 1.11

En general, la integración de esta ecuación en derivadas parciales no es un problema menos simple que la integración de la ecuación inicial. Sin embargo, a veces la elección de la solución particular de (1.18) no presenta dificultades.

Aparte de ello, considerando que el factor integrante es función de un solo argumento (por ejemplo, es función sólo de $x + y$ o de $x^2 + y^2$, o función sólo de x o de y , etc.), se puede integrar ya sin dificultad la ecuación (1.18) e indicar las condiciones bajo las cuales existe un factor integrante del tipo considerado. Con esto se obtie-

nen clases de ecuaciones para las cuales el factor integrante puede ser hallado fácilmente.

Por ejemplo, encontremos las condiciones bajo las cuales la ecuación $M dx + N dy = 0$ tiene factor integrante que depende sólo de x , $\mu = \mu(x)$. En este caso, la ecuación (1.18) se simplifica y toma la forma

$$-\frac{d \ln \mu}{dx} N = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y},$$

de donde, considerando $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ función continua de x , obtenemos

$$\begin{aligned} \ln \mu &= \int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx + \ln c, \\ \mu &= ce^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Se puede considerar $c=1$, ya que es suficiente tener sólo un factor integrante.

Si $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ es función sólo de x , entonces existe un factor integrante que depende sólo de x , y es igual a (1.19). En caso contrario, no existe ningún factor de la forma $\mu(x)$.

La condición de existencia de un factor integrante que depende sólo de x se cumple, por ejemplo, para la ecuación lineal

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x), \quad \text{o bien } [p(x)y - f(x)] dx + dy = 0.$$

Efectivamente, $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = p(x)$ y, por lo tanto, $\mu = e^{\int p(x) dx}$. De manera análoga se pueden hallar las condiciones de existencia de factores integrantes de la forma

$$\mu(y), \mu(x \pm y), \mu(x^2 \pm y^2), \mu(xy), \mu\left(\frac{y}{x}\right) \text{ etc.}$$

Ejemplo 3. ¿Tiene la ecuación

$$x dx + y dy + x dy - y dx = 0 \quad (1.20)$$

un factor integrante de la forma $\mu = \mu(x^2 + y^2)$?

Designemos $x^2 + y^2 = z$. La ecuación (1.18) para $\mu = \mu(x^2 + y^2) = \mu(z)$ toma la forma

$$2(My - Nx) \frac{d \ln \mu}{dz} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y},$$

de donde

$$\ln |\mu| = \frac{1}{2} \int \varphi(z) dz + \ln c,$$

o bien

$$\mu = ce^{\frac{1}{2} \int \varphi(z) dz}, \quad (1.21)$$

donde

$$\varphi(z) = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{My - Nx}.$$

Para la existencia de un factor integrante del tipo dado, es necesario —y, en caso de que $\varphi(z)$ sea continua, suficiente— que $\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{My - Nx}$ sea función sólo de $x^2 + y^2$. En nuestro caso,

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{My - Nx} = -\frac{2}{x^2 + y^2};$$

por lo tanto, el factor integrante $\mu = \mu(x^2 + y^2)$ existe y es igual a (1.21). Para $c = 1$, obtenemos:

$$\mu = e^{-\int \frac{dz}{z}} = \frac{1}{z} = \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

Multiplicando la ecuación (1.20) por $\mu = \frac{1}{x^2 + y^2}$, la reducimos a la forma

$$\frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} + \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = 0,$$

o bien

$$\frac{\frac{1}{2} d(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} + \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = 0,$$

$$\frac{1}{2} d \ln(x^2 + y^2) + d \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = 0.$$

Integrando, obtenemos

$$\ln \sqrt{x^2 + y^2} = -\operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \ln c$$

y, luego de potenciar, tendremos

$$\sqrt{x^2 + y^2} = ce^{-\operatorname{arctg} \frac{y}{x}},$$

o, en coordenadas polares $\rho = ce^{-\varphi}$, que es una familia de espirales logarítmicas.

Ejemplo 4. Hallar la forma de un espejo que refleje paralelamente a una dirección dada todos los rayos que salen de un punto fijo.

Coloquemos el origen de coordenadas en el punto dado, y dirijamos el eje de las abscisas paralelamente a la dirección indicada en las condiciones del problema.

Supongamos que un rayo incide en el espejo en el punto $M(x, y)$. Consideremos el corte del espejo, representado en la fig. 1.12, por el plano Oxy , que pasa por el eje de las abscisas y por el punto M . Tracemos la tangente MN al corte considerado de la superficie del espejo en el punto $M(x, y)$. Puesto que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión, el triángulo MNO es isósceles. Por lo tanto,

$$\operatorname{tg} \varphi = y' = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

La ecuación homogénea obtenida se integra fácilmente con el cambio de variables

$$\frac{x}{y} = z,$$

pero puede hacerse de manera aún más simple: racionalizando el denominador la escribimos en la forma

$$x dx + y dy = \sqrt{x^2 + y^2} dx.$$

La ecuación tiene el factor integrante evidente

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = dx, \quad \sqrt{x^2 + y^2} = x + c, \quad y^2 = 2cx + c^2$$

(familia de parábolas).

Observación. Este problema se resuelve aún más fácilmente en coordenadas x y p , donde $p = \sqrt{x^2 + y^2}$. En este caso, la ecuación del corte de las superficies buscadas toma la forma

$$dx = dp, \quad p = x + c.$$

Se puede demostrar la existencia del factor integrante, o lo que es lo mismo, la existencia de una solución no nula de la ecuación en derivadas parciales (1.18) (véase la pág. 38) en cierta región, si las funciones M y N tienen derivadas continuas y por lo menos una de estas funciones no es igual a cero. Por lo tanto, el método del factor integrante se puede considerar como un método general de integración de la ecuación del tipo

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0.$$

Sin embargo, debido a la dificultad de hallar el factor integrante, este método se utiliza con mayor frecuencia sólo en aquellos casos en que dicho factor es evidente.

§ 6. TEOREMAS DE EXISTENCIA Y UNICIDAD

DE LA SOLUCION DE LA ECUACION $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$

La clase de las ecuaciones diferenciales integrables en cuadraturas es sumamente limitada; por ello, ya desde los tiempos de Euler obtuvieron gran importancia los métodos aproximados en la teoría de ecuaciones diferenciales.

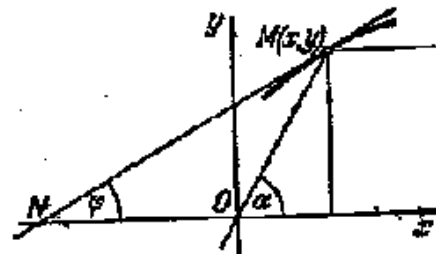


Fig. 1.12

En la actualidad, gracias al rápido desarrollo de la técnica de cálculo, los métodos de aproximación adquieren un valor incomparablemente mayor.

Ahora, a menudo resulta conveniente utilizar métodos aproximados aún en los casos en que la ecuación se integra en cuadraturas. Es más, aún si la solución puede ser expresada en forma sencilla en funciones elementales, frecuentemente la utilización de las tablas de estas funciones resulta más difícil que la integración

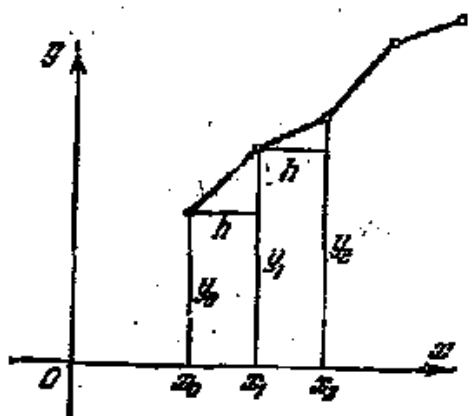


Fig. 1.13

aproximada de la ecuación en calculadoras electrónicas. Sin embargo, para aplicar uno u otro método de integración aproximada de la ecuación diferencial, hay que estar seguro ante todo de la existencia de la solución buscada, así como de la unicidad de la misma, ya que cuando no tiene lugar la unicidad, no queda claro cuál solución debe ser determinada aproximadamente.

Con gran frecuencia la demostración de teoremas de existencia de la solución da también un método para la determinación exacta

o aproximada de la solución, lo cual aumenta aún más la importancia de los teoremas de existencia. Por ejemplo el teorema (1.1), demostrado más adelante, da la fundamentación del *método de Euler* de integración aproximada de ecuaciones diferenciales. Este método consiste en que la curva integral buscada de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, que pasa por el punto (x_0, y_0) , se susti-

tuye por una quebrada constituida por segmentos lineales (fig. 1.13), cada uno de los cuales es tangente a la curva integral en uno de sus puntos frontera. Al aplicar este método para el cálculo aproximado del valor de la solución buscada $y(x)$ en el punto $x=b$, el segmento $x_0 \leq x \leq b$ (si $b > x_0$) se divide en n partes iguales por medio de los puntos $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$, donde $x_n = b$. La longitud de cada segmento $x_{i+1} - x_i = h$ se llama *paso del cálculo*. El valor aproximado de la solución buscada en los puntos x_i se designará por y_i .

Para el cálculo de y_1 se sustituye en el intervalo $x_0 \leq x \leq x_1$ la curva integral buscada por el segmento de su tangente en el punto (x_0, y_0) . Por lo tanto, $y_1 = y_0 + hy'_0$, donde $y'_0 = f(x_0, y_0)$ (véase la fig. 1.13). En forma análoga, calculamos

$$y_2 = y_1 + hy'_1, \text{ donde } y'_1 = f(x_1, y_1);$$

$$y_3 = y_2 + hy'_2, \text{ donde } y'_2 = f(x_2, y_2);$$

$$y_n = y_{n-1} + hy'_{n-1}, \text{ donde } y'_{n-1} = f(x_{n-1}, y_{n-1}).$$

Si $b < x_0$, el esquema del cálculo permanece invariable, pero el paso h es negativo.

Es natural esperar que para $h \rightarrow 0$ las quebradas de Euler se aproximen a la gráfica de la curva integral buscada. Por lo tanto, al disminuir el paso h el método de Euler da un valor cada vez más exacto de la solución buscada en el punto b . La demostración de esta afirmación nos conduce al mismo tiempo al siguiente teorema fundamental de existencia y unicidad de la solución de la ecuación $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ con la condición inicial $y(x_0) = y_0$, bajo condiciones suficientes muy amplias impuestas a la función $f(x, y)$.

Teorema 1.1 (de existencia y unicidad de la solución). Si en la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1.22)$$

la función $f(x, y)$ es continua en el rectángulo D :

$$x_0 - a \leq x \leq x_0 + a, \quad y_0 - b \leq y \leq y_0 + b,$$

y satisface en D la condición de Lipschitz:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq N |y_1 - y_2|,$$

donde N es una constante, entonces existe una solución única $y = \bar{y}(x)$, $x_0 - H \leq x \leq x_0 + H$ de la ecuación (1.22), que satisface la condición $y(x_0) = y_0$, donde

$$H < \min \left(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{N} \right)$$

$$M = \max |f(x, y)| \text{ en } D.$$

Las condiciones del teorema necesitan ciertas aclaraciones. No es posible afirmar que la solución buscada $y = \bar{y}(x)$ de la ecuación (1.22), que satisface la condición $y(x_0) = y_0$, existirá para $x_0 - a \leq x \leq x_0 + a$, ya que la curva integral $y = \bar{y}(x)$ puede salir del rectángulo D a través de sus lados superior o inferior $y = y_0 \pm b$ (fig. 1.14) para cierto valor $x = x_1$, $x_0 - a < x_1 < x_0 + a$, y entonces, si $x_1 > x_0$, para $x > x_1$ la solución puede no estar definida (si $x_1 < x_0$, la solución puede no estar definida para $x < x_1$). Podemos garantizar que la curva integral $y = \bar{y}(x)$ no sale de los límites de D cuando x varía en el segmento $x_0 - H \leq x \leq x_0 + H$, donde H es el menor de los números a y $\frac{b}{M}$.

(fig. 1.15), puesto que el coeficiente angular de la tangente a la curva integral buscada se encuentra entre los coeficientes angulares M y $-M$ de las rectas representadas en la figura 1.15. Si estas rectas, entre las cuales se encuentra la curva integral buscada, salen de los límites de rectángulo D a través de sus lados horizontales $y = y_0 \pm b$, entonces las abscisas de los puntos de corte de estos lados serán $x_0 \pm \frac{b}{M}$. Por lo tanto, la abscisa del punto

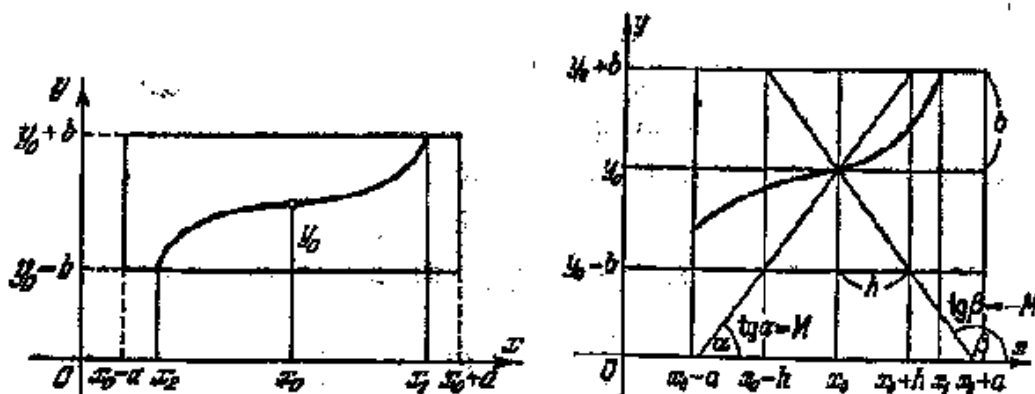


Fig. 1.15

de salida de la curva integral del rectángulo D puede ser sólo menor que o igual a $x_0 + \frac{b}{M}$, y mayor que o igual a $x_0 - \frac{b}{M}$.

Se puede demostrar la existencia de la solución buscada en el segmento $x_0 - H \leq x \leq x_0 + H$, donde $H = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$; sin embargo, es más sencillo demostrar antes la existencia de la solución en el segmento $x_0 - H \leq x \leq x_0 + H$, donde $H < \min\left(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{N}\right)$. Más adelante serán indicadas condiciones, bajo las cuales la solución puede ser continuada.

La condición de Lipschitz

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq N |y_1 - y_2|$$

puede ser sustituida por otra, un tanto más grosera, pero en cambio a menudo fácilmente comprobable: la condición de existencia de la derivada parcial acotada $f_y(x, y)$ en la región D .

En efecto, si en el rectángulo D

$$|f_y(x, y)| \leq N$$

entonces, aplicando el teorema sobre el incremento, finito, obtenemos

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |f_y(x, \xi)| \cdot |y_1 - y_2|,$$

donde ξ es un valor intermedio entre y_1 e y_2 . Por lo tanto, el punto (x, ξ) se encuentra en D ; por eso

$$|f_y(x, \xi)| \leq N, \text{ y } |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq N|y_1 - y_2|.$$

No es difícil presentar ejemplos de funciones $f(x, y)$ (por ejemplo $f(x, y) = |y|$ en un entorno de los puntos $(x, 0)$), para las cuales la condición de Lipschitz se cumple, pero la derivada $\frac{\partial f}{\partial y}$ en ciertos puntos no existe; por lo tanto, la condición $|\frac{\partial f}{\partial y}| \leq N$ es más grosera que la condición de Lipschitz.

Demostración del teorema de existencia y unicidad. Sustituyamos la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1.22)$$

con condición inicial

$$y(x_0) = y_0 \quad (1.23)$$

por la ecuación integral equivalente

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y) dx. \quad (1.24)$$

En efecto, si cierta función $y = \bar{y}(x)$ al ser sustituida en la ecuación (1.22) la convierte en una identidad, y satisface a la condición (1.23), entonces integrando la identidad (1.22) y tomando en cuenta la condición (1.23), obtenemos que $y = \bar{y}(x)$ convierte también en identidad la ecuación (1.24). Si, en cambio, cierta función $y = \bar{y}(x)$ al ser sustituida en la ecuación (1.24) la convierte en una identidad, entonces es evidente que ella satisface también a la condición (1.23) y, derivando la identidad (1.24), obtenemos que $y = \bar{y}(x)$ convierte también en identidad la ecuación (1.22).

Construyamos la quebrada de Euler $y = y_n(x)$ que parte del punto (x_0, y_0) con un paso $h_n = \frac{H}{n}$ en el segmento $x_0 \leq x \leq x_0 + H$, n es un entero positivo (en forma completamente análoga se demuestra la existencia de solución en el segmento $x_0 - H \leq x \leq x_0$). La quebrada de Euler que pasa por el punto (x_0, y_0) no puede salir de la región D para $x_0 \leq x \leq x_0 + H$ (o bien $x_0 - H \leq x \leq x_0$), ya que el coeficiente angular de cada segmento de la quebrada es menor que M en valor absoluto.

La demostración subsiguiente del teorema la dividiremos en tres etapas:

1) La sucesión $y_n = y_n(x)$ es uniformemente convergente.

2) La función $\bar{y}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$ es la solución de la ecuación integral (1.24).

3) La solución $\bar{y}(x)$ de la ecuación (1.24) es única.

Demostración de 1). Por definición de la quebrada de Euler

$$y'_n(x) = f(x_k, y_k) \text{ para } x_k \leq x \leq x_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

(en el punto angular x_k se toma la derivada derecha), o

$$y'_n(x) = f(x, y_n(x)) + [f(x_k, y_k) - f(x, y_n(x))]; \quad (1.25)$$

denotemos

$$f(x_k, y_k) - f(x, y_n(x)) = \eta_n(x).$$

En virtud de la continuidad uniforme de la función $f(x, y)$ en D , obtenemos

$$|\eta_n(x)| = |f(x_k, y_k) - f(x, y_n(x))| \leq \varepsilon_n, \quad (1.26)$$

si $n > N(\varepsilon_n)$, donde $\varepsilon_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, puesto que $|x - x_k| \leq h_n$, y $|y_k - y_n(x)| < Mh_n$, donde $h_n = \frac{H}{n} \rightarrow 0$ para $n \rightarrow \infty$.

Integrando (1.25) con respecto a x entre los límites desde x_0 hasta x , y teniendo en cuenta que $y_n(x_0) = y_0$, obtenemos

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt + \int_{x_0}^x \eta_n(t) dt. \quad (1.27)$$

Aquí n puede tomar cualquier valor entero positivo; por lo tanto, para un entero $m > 0$,

$$y_{n+m}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n+m}(t)) dt + \int_{x_0}^x \eta_{n+m}(t) dt. \quad (1.28)$$

Restando (1.27) miembro a miembro de (1.28) y tomando el módulo de la diferencia, obtenemos

$$\begin{aligned} |y_{n+m}(x) - y_n(x)| &= \left| \int_{x_0}^x [f(t, y_{n+m}(t)) - f(t, y_n(t))] dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_{x_0}^x \eta_{n+m}(t) dt - \int_{x_0}^x \eta_n(t) dt \right| \leq \\ &\leq \int_{x_0}^x |f(t, y_{n+m}(t)) - f(t, y_n(t))| dt + \\ &\quad + \int_{x_0}^x |\eta_{n+m}(t)| dt + \int_{x_0}^x |\eta_n(t)| dt, \end{aligned}$$

si $x_0 \leq x \leq x_0 + H$ ó, tomando en cuenta (1.26) y la condición de Lipschitz:

$$|y_{n+m}(x) - y_n(x)| \leq N \int_{x_0}^x |y_{n+m}(t) - y_n(t)| dt + (e_{n+m} + e_n) \cdot H.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \max_{x_0 \leq x \leq x_0 + H} |y_{n+m}(x) - y_n(x)| &\leq \\ &\leq N \max_{x_0 \leq x \leq x_0 + H} \int_{x_0}^x |y_{n+m}(t) - y_n(t)| dt + (e_{n+m} + e_n) \cdot H, \end{aligned}$$

de donde

$$\max_{x_0 \leq x \leq x_0 + H} |y_{n+m}(x) - y_n(x)| \leq \frac{(e_{n+m} + e_n)H}{1 - NH} < \varepsilon$$

para todo $\varepsilon > 0$ y para un número suficientemente grande $n > N_1(\varepsilon)$

De este modo,

$$\max_{x_0 \leq x \leq x_0 + H} |y_{n+m}(x) - y_n(x)| < \varepsilon$$

para $n > N_1(\varepsilon)$, es decir, la sucesión de funciones continuas $y_n(x)$ es uniformemente convergente en $x_0 \leq x \leq x_0 + H$:

$$y_n(x) \rightrightarrows \bar{y}(x),$$

donde $\bar{y}(x)$ es una función continua.

Demostración de 2). Pasemos al límite en la ecuación (1.27) cuando $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = y_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f(x, y_n(x)) dx + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x \eta_n(x) dx,$$

o bien

$$\bar{y}(x) = y_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f(x, y_n(x)) dx + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x \eta_n(x) dx. \quad (1.29)$$

En virtud de la convergencia uniforme de $y_n(x)$ a $\bar{y}(x)$ y de la continuidad uniforme de la función $f(x, y)$ en D , la sucesión $f(x, y_n(x)) \rightrightarrows f(x, \bar{y}(x))$.

En efecto,

$$|f(x, \bar{y}(x)) - f(x, y_n(x))| < \varepsilon,$$

donde $\varepsilon > 0$, si $|\bar{y}(x) - y_n(x)| < \delta(\varepsilon)$; pero $|\bar{y}(x) - y_n(x)| < \delta(\varepsilon)$ si $n > N_1(\delta(\varepsilon))$ para todas las x del segmento $x_0 \leq x \leq x_0 + H$.

De este modo, $|f(x, \bar{y}(x)) - f(x, y_n(x))| < \varepsilon$ para $n > N_1(\delta(\varepsilon))$, donde N_1 no depende de x .

En base a la convergencia uniforme de la sucesión $f(x, \bar{y}_n(x))$ a $f(x, \bar{y}(x))$, en (1.29) es posible el paso al límite dentro del signo de integral. Tomando en cuenta, además que $|\eta_n(x)| < \varepsilon_n$, donde $\varepsilon_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, obtenemos en definitiva en (1.29):

$$\bar{y}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, \bar{y}(x)) dx.$$

De esta manera, $\bar{y}(x)$ satisface a la ecuación (1.24).

Demostración de 3). Supongamos la existencia de dos soluciones distintas $y_1(x)$ e $y_2(x)$ de la ecuación (1.24). Entonces

$$\max_{x_0 \leq x \leq x_0 + H} |y_1(x) - y_2(x)| \neq 0.$$

Restando miembro a miembro de la identidad

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_1(x)) dx$$

la identidad

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_2(x)) dx,$$

se obtiene

$$y_1(x) - y_2(x) = \int_{x_0}^x [f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x))] dx.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} & \max_{x_0 \leq x \leq x_0 + H} |y_1(x) - y_2(x)| = \\ &= \max_{x_0 \leq x \leq x_0 + H} \left| \int_{x_0}^x [f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x))] dx \right| \leq \\ &\leq \max_{x_0 \leq x \leq x_0 + H} \left| \int_{x_0}^x |f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x))| dx \right|. \end{aligned}$$

Aplicando la condición de Lipschitz, tendremos

$$\begin{aligned} & \max_{x_0 \leq x \leq x_0 + H} |y_1(x) - y_2(x)| \leq N \max_{x_0 \leq x \leq x_0 + H} \left| \int_{x_0}^x |y_1(x) - y_2(x)| dx \right| \leq \\ &\leq N \max_{x_0 \leq x \leq x_0 + H} |y_1(x) - y_2(x)| \max_{x_0 \leq x \leq x_0 + H} \left| \int_{x_0}^x dx \right| = \\ &= NH \max_{x_0 \leq x \leq x_0 + H} |y_1(x) - y_2(x)|. \end{aligned}$$

La desigualdad obtenida

$$\max_{x_0 \leq x \leq x_0 + H} |y_1(x) - y_2(x)| \leq NH \max_{x_0 \leq x \leq x_0 + H} |y_1(x) - y_2(x)| \quad (1.30)$$

es contradictoria si $\max_{x_0 \leq x \leq x_0 + H} |y_1(x) - y_2(x)| \neq 0$, puesto que por la hipótesis del teorema $H < \frac{1}{N}$, y de (1.30) se deduce que $NH \geq 1$.

La contradicción cesa sólo si

$$\max_{x_0 \leq x \leq x_0 + H} |y_1(x) - y_2(x)| = 0,$$

es decir, si $y_1(x) \equiv y_2(x)$ para $x_0 \leq x \leq x_0 + H$.

Observación 1. La existencia de la solución de la ecuación (1.22) se podría demostrar de otra manera sólo suponiendo que la función $f(x, y)$ es continua (sin la condición de Lipschitz); sin embargo, la sola continuidad de esta función no es suficiente para demostrar la unicidad de la solución.

Observación 2. La existencia y la unicidad de la solución $y = y(x)$ se han demostrado sólo en el segmento $x_0 - H \leq x \leq x_0 + H$; no obstante, tomando el punto $(x_0 + H, y(x_0 + H))$ como inicial, se puede repetir el razonamiento anterior y continuar la solución en un segmento más de longitud H_1 , si, claro está, en un entorno del nuevo punto inicial se cumplen las condiciones del teorema de existencia y unicidad de la solución. Prosiguiendo este proceso, en ciertos casos se puede continuar la solución en todo el semieje $x \geq x_0$, o aún en todo el eje $-\infty < x < \infty$, si se continúa la solución también en el sentido negativo del eje x . Sin embargo, son posibles también otros casos, aún cuando la función $f(x, y)$ esté determinada para valores cualesquiera de x e y .

Es posible que la curva integral no pueda ser continuada debido al acercamiento a un punto donde no se cumplen las condiciones del teorema de existencia y unicidad de la solución, o a que la curva integral se aproxima a una asíntota paralela al eje Oy .

Estas posibilidades se ilustran con los ejemplos siguientes:

- 1) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$, $y(0) = 1$. Separando variables e integrando, obtenemos

$$x^2 + y^2 = c^2, y = \pm \sqrt{c^2 - x^2}, c = 1, y = \sqrt{1 - x^2}.$$

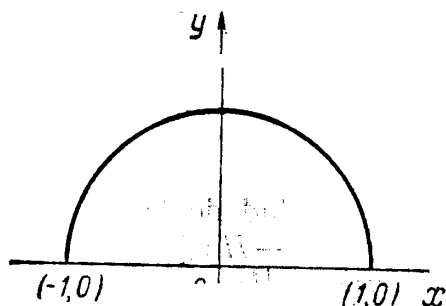
La solución no se puede continuar fuera de los límites del intervalo $-1 < x < 1$. En los puntos frontera $(-1, 0)$ y $(1, 0)$ el segundo miembro de la ecuación $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ es discontinuo. Las condiciones del teorema de existencia y unicidad de la solución no se cumplen (fig. 1.16).

- 2) $\frac{dy}{dx} = y^2$, $y(1) = 1$. Separando variables e integrando, se obtiene

$$y = -\frac{1}{x - c}, c = 2, y = -\frac{1}{x - 2}.$$

y la curva integral puede ser continuada sólo hasta asinto $2 (-\infty < x < 2)$ (fig. 1.17).

En la actualidad los teoremas de existencia y unicidad de las soluciones no sólo de ecuaciones diferenciales, sino también de ecuaciones de otros tipos, se demuestran muy frecuentemente por el método de los puntos fijos. Uno de los teoremas más sencillos sobre puntos fijos es el principio de las transformaciones de contracción*).



6

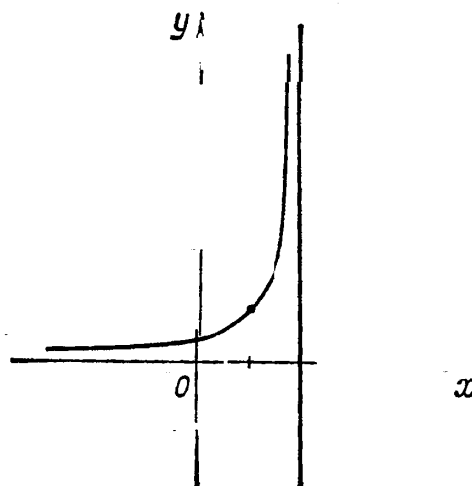


Fig.

Principio de las transformaciones de contracción. Si en un espacio métrico**) completo***) M está dado un operador A , que satisface las siguientes condiciones:

- 1) el operador A transforma los puntos del espacio M en puntos del mismo espacio: si $y \in M$, entonces $A[y] \in M$;
- 2) el operador A acerca los puntos; más exactamente,

$$\rho(A[y], A[z]) \leq \alpha \rho(y, z),$$

donde y y z son puntos cualesquiera del espacio M ; $\alpha < 1$ y no depende de la elección de y y de z ; $\rho(y, z)$ es la distancia entre

*) También llamado principio de Caccioppoli-Banach (N. del Red.)

**) El espacio M se llama métrico, si en éste está definida una función $\rho(y, z)$ de un par de puntos de dicho espacio que satisface, para puntos arbitrarios y, z y u de éste, las condiciones:

1) $\rho(y, z) \geq 0$; además $\rho(y, y) = 0$, y $\rho(y, z) = 0$ implica $y = z$;

2) $\rho(y, z) = \rho(z, y)$;

3) $\rho(y, z) \leq \rho(y, u) + \rho(u, z)$ (desigualdad triangular). La función ρ se llama distancia en el espacio M .

***) El espacio métrico M se llama completo, si cada sucesión fundamental de puntos del espacio M converge en éste. Recuerdese que la sucesión $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ se llama fundamental si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número $N(\varepsilon)$ tal que para $n \geq N(\varepsilon)$ la distancia $\rho(y_n, y_{n+m}) < \varepsilon$ para cualquier número entero $m > 0$.

Por lo tanto,

$$\rho(\bar{y}, \bar{y}) = 0 \text{ e } \bar{y} = \bar{y}, \quad A[\bar{y}] = \bar{y}.$$

Queda por demostrar que el punto fijo $\bar{y}$ es único. Si existiera otro punto fijo $\bar{z}$, entonces sería $\rho(A[\bar{y}], A[\bar{z}]) = \rho(\bar{y}, \bar{z})$, lo que contradice a la condición 2) del teorema.

Apliquemos el principio de las transformaciones de contracción a la demostración del teorema de existencia y unicidad de la solución $y(x)$ ($x_0 - h_0 \leq x \leq x_0 + h_0$) de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ que satisface la condición $y(x_0) = y_0$, bajo la condición de que en la región D :

$$x_0 - a \leq x \leq x_0 + a, \quad y_0 - b \leq y \leq y_0 + b$$

la función f sea continua y, por lo tanto, acotada, $|f| \leq M$, y satisfaga la condición de Lipschitz

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leq N |y - z|.$$

El número h_0 es $h_0 \leq \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$, y será escogido con mayor exactitud más adelante.

Consideremos el espacio métrico completo C , cuyos puntos son todas las posibles funciones continuas $y(x)$, definidas en el segmento $x_0 - h_0 \leq x \leq x_0 + h_0$, y cuyas gráficas se encuentran en D . La distancia se define por la igualdad

$$\rho(y, z) = \max |y - z|,$$

donde el máximo se escoge para todas las x del segmento

$$x_0 - h_0 \leq x \leq x_0 + h_0.$$

Este espacio se considera con frecuencia en diferentes problemas del análisis matemático, y recibe el nombre de *espacio de convergencia uniforme*, ya que la convergencia en el sentido de la métrica de dicho espacio es la convergencia uniforme.

Sustituyamos la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ con la condición inicial $y(x_0) = y_0$ por la ecuación integral equivalente

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y) dx. \quad (1.24)$$

Consideremos el operador

$$A[y] = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y(x)) dx,$$

que pone en correspondencia a cada función continua $y(x)$, dada en el segmento $x_0 - h_0 \leq x \leq x_0 + h_0$ y que no sale de D , la función continua $A[y]$, definida en ese mismo segmento y cuya gráfica

tampoco sale de D , puesto que $\left| \int_{x_0}^x f(x, y) dx \right| \leq M h_0 \leq b$. El operador $A[y]$, por lo tanto, satisface a la condición 1) del principio de las transformaciones de contracción.

Con esta notación, la ecuación (1.24) se escribe en la forma $y = A[y]$; por consiguiente, para la demostración del teorema de existencia y unicidad, queda por demostrar la existencia en el espacio C de un punto fijo único $\bar{y}(x)$ del operador A , puesto que en este caso tendremos $\bar{y} = A[\bar{y}]$ y la ecuación (1.24) será satisfecha.

Para la demostración del teorema queda por comprobar si el operador A satisface o no la condición 2) del principio de las transformaciones de contracción:

$$\rho(A[y], A[z]) \leq \alpha \rho(y, z), \quad \alpha < 1,$$

donde

$$\rho(A[y], A[z]) = \max \left| \int_{x_0}^x [f(x, y) - f(x, z)] dx \right|.$$

Aplicando la desigualdad de Lipschitz, se obtiene

$$\begin{aligned} \rho(A[y], A[z]) &\leq N \max \left| \int_{x_0}^x |y - z| dx \right| \leq \\ &\leq N \max |y - z| \max \left| \int_{x_0}^x dx \right| = N h_0 \max |y - z| = N h_0 \rho(y, z). \end{aligned}$$

Tomando h_0 de manera que $N h_0 \leq \alpha < 1$, se logra que el operador A satisfaga la condición

$$\rho(A[y], A[z]) \leq \alpha \rho(y, z), \quad \alpha < 1.$$

De este modo, según el principio de las transformaciones de contracción, existe un punto fijo único $\bar{y}(x)$ del operador A o, lo que es lo mismo, una solución continua única de la ecuación (1.24), la cual puede ser hallada por el método de las aproximaciones sucesivas.

De manera completamente análoga se puede demostrar el teorema de existencia y unicidad de la solución $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ del sistema de ecuaciones

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad y_i(x_0) = y_{i0} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.32)$$

o bien

$$y_i - y_{i0} + \int_{x_0}^x f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) dx \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.33)$$

suponiendo que en la región D , definida por las desigualdades

$$x_0 - a \leq x \leq x_0 + a, \quad y_{i0} - b_i \leq y_i \leq y_{i0} + b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

los segundos miembros de las ecuaciones (1.32) satisfacen las condiciones:

1) todas las funciones $f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) son continuas y, por lo tanto, acotadas, $|f_i| \leq M$;

2) todas las funciones f_i ($i = 1, 2, \dots, n$) satisfacen la condición de Lipschitz:

$$|f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) - f_i(x, z_1, z_2, \dots, z_n)| \leq N \sum_{i=1}^n |y_i - z_i|.$$

Un punto en el espacio C será ahora un sistema de n funciones continuas $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ o sea, una función vectorial n -dimensional $Y(x)$ de coordenadas $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, definida en el segmento $x_0 - h_0 \leq x \leq x_0 + h_0$, donde $h_0 \leq \min\left(a, \frac{b_1}{M}, \dots, \frac{b_n}{M}\right)$ y será escogido más adelante con mayor exactitud. La distancia en el espacio C se define por la igualdad

$$\rho(Y(x), Z(x)) = \sum_{i=1}^n \max |y_i - z_i|,$$

donde $z_1, z_2, \dots, z_n$ son las coordenadas de la función vectorial $Z(x)$.

No es difícil comprobar que con esta definición de la distancia el conjunto C de funciones vectoriales n -dimensionales $Y(x)$ se transforma en un espacio métrico completo. El operador A se define por la igualdad

$$A[Y] = \left(y_{10} + \int_{x_0}^x f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) dx, \right. \\ \left. y_{20} + \int_{x_0}^x f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) dx, \dots, y_{n0} + \int_{x_0}^x f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) dx \right),$$

o sea, que al actuar dicho operador sobre el punto $(y_1, y_2, \dots, y_n)$, se obtiene un punto del mismo espacio C de coordenadas iguales a los segundos miembros del sistema (1.33).

El punto $A[Y]$ pertenece al espacio C , puesto que todas sus coordenadas son funciones continuas que no salen de la región D ,

si las coordenadas de la función vectorial Y tampoco salen de D .

En efecto,

$$\left| \int_{x_0}^x f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) dx \right| \leq M \left| \int_{x_0}^x dx \right| \leq M h_0 \leq b_i,$$

y, por lo tanto, $|y_i - y_{i0}| \leq b_i$.

Queda por comprobar el cumplimiento de la condición 2) del principio de las transformaciones de contracción:

$$\begin{aligned} \rho(A[Y], A[Z]) &= \\ &= \sum_{i=1}^n \max \left| \int_{x_0}^x [f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) - f_i(x, z_1, z_2, \dots, z_n)] dx \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \max \left| \int_{x_0}^x f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) - f_i(x, z_1, z_2, \dots, z_n) dx \right| \leq \\ &\leq N \sum_{i=1}^n \max \left| \int_{x_0}^x \sum_{l=1}^n |y_l - z_l| dx \right| \leq \\ &\leq N \sum_{i=1}^n \max |y_i - z_i| \sum_{l=1}^n \max \left| \int_{x_0}^x dx \right| = N n h_0 \rho(Y, Z). \end{aligned}$$

Por lo tanto, si escogemos $h_0 \leq \frac{\alpha}{nN}$, donde $0 < \alpha < 1$, o bien $N n h_0 \leq \alpha < 1$, la condición 2) del principio de las transformaciones de contracción se cumple, y existe un punto fijo $\bar{Y}$ único, el cual se puede hallar por el método de las aproximaciones sucesivas. Pero la condición $\bar{Y} = \bar{y}_2[\bar{Y}]$, por definición del operador A , es equivalente a las identidades

$$\bar{y}_i = y_{i0} + \int_{x_0}^x f_i(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n) dx \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

donde $\bar{y}_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) son las coordenadas de la función vectorial $\bar{Y}$, o sea que $\bar{Y}$ es la única solución del sistema (1.33).

Ejemplo 1. Hallar algunas aproximaciones sucesivas y_1, y_2, y_3 de la solución de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2; \quad y(0) = 0, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 1.$$

$$y = \int_0^x (x^2 + y^2) dx, \quad h_0 = \min \left(x, \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

Haciendo $y_0(x) \equiv 0$, obtenemos

$$y_1 = \int_0^x x^2 dx = \frac{x^3}{3}, \quad y_2 = \int_0^x \left(x^2 + \frac{x^6}{9} \right) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}.$$

$$y_3 = \int_0^x \left[x^2 + \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} \right)^2 \right] dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} \left(1 + \frac{2x^4}{33} + \frac{x^8}{945} \right).$$

Ejemplo 2. ¿Bajo qué limitaciones la ecuación lineal

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)$$

satisface las condiciones del teorema de existencia y unicidad?

Para el cumplimiento de la primera condición del teorema es suficiente que en el segmento considerado de variación de x , $a_1 \leq x \leq a_2$, las funciones $p(x)$ y $f(x)$ sean continuas. En este caso se cumplirá también la segunda condición del teorema de existencia y unicidad, ya que la derivada parcial respecto a y del segundo miembro de la ecuación $\frac{dy}{dx} = -p(x)y + f(x)$ es igual a $-p(x)$ y, como consecuencia de la continuidad de la función $p(x)$ en el segmento $a_1 \leq x \leq a_2$, está acotada en valor absoluto (véase la pág. 44). De este modo, si $p(x)$ y $f(x)$ son continuas en el segmento $a_1 \leq x \leq a_2$, entonces por cada punto (x_0, y_0) , donde $a_1 < x_0 < a_2$ e y_0 es arbitrario, pasa una curva integral única de la ecuación lineal considerada.

Teorema 1.2 (Sobre la dependencia continua de la solución con respecto al parámetro y a los valores iniciales). Si el segundo miembro de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, \mu) \quad (1.34)$$

es continuo en μ para $\mu_0 \leq \mu \leq \mu_1$ y satisface las condiciones del teorema de existencia y unicidad, y la constante de Lipschitz N no depende de μ , entonces la solución $y(x, \mu)$ de la ecuación considerada que satisface la condición $y(x_0) = y_0$, depende en forma continua de μ .

Construyamos las quebradas de Euler $y_n = y_n(x, \mu)$, que son funciones continuas en μ . Repitiendo los razonamientos de las págs. 45—47, obtenemos que la sucesión $y_n(x, \mu)$ converge uniformemente no sólo respecto a x , sino también respecto a μ para $x_0 \leq x \leq x_0 + H$, $\mu_0 \leq \mu \leq \mu_1$, puesto que N y H no dependen de μ , si $H < \min\left(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{N}\right)$, donde $M \geq |f(x, y, \mu)|$. Por consiguiente, la solución $y = \bar{y}(x, \mu)$ de la ecuación

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y, \mu) dx, \quad (1.35)$$

la solución respecto a los parámetros x_0 e y_0 , si la función f es continua y satisface la condición de Lipschitz.

Por medio de estos mismos métodos pueden ser demostrados teoremas análogos para los sistemas de ecuaciones.

Obsérvese que la dependencia continua de la solución $y(x, x_0, y_0)$, $x_0 \leq x \leq b$ (o bien $b \leq x \leq x_0$) de las condiciones iniciales x_0 e y_0 significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta(\varepsilon, b) > 0$ tal que de las desigualdades

$$|x_0 - \bar{x}_0| < \delta(\varepsilon, b) \quad \text{y} \quad |y_0 - \bar{y}_0| < \delta(\varepsilon, b)$$

se deduce la desigualdad

$$|y(x, x_0, y_0) - y(x, \bar{x}_0, \bar{y}_0)| < \varepsilon \quad (1.36)$$

para $x_0 \leq x \leq b$ (fig. 1.18).

Al aumentar b , disminuye, en general, $\delta(\varepsilon, b)$, y puede tender a cero cuando $b \rightarrow \infty$. Por eso, no siempre es posible escoger un número $\delta(\varepsilon) > 0$ para el cual se satisfaga la desigualdad (1.36) para todas las $x > x_0$; es decir que no siempre las soluciones cercanas en las condiciones iniciales permanecen cercanas para valores arbitrariamente grandes del argumento.

La solución que varía poco al variar las condiciones iniciales en forma arbitraria, pero suficientemente pequeña, para valores del argumento arbitrariamente grandes, se llama estable. Para más detalles sobre las soluciones estables, véase el cap. 4.

Teorema 1.3 (sobre la dependencia analítica de la solución con respecto al parámetro, teorema de Poincaré). La solución $x(t, \mu)$ de la ecuación diferencial $\dot{x} = f(t, x, \mu)$ que satisface la condición $x(t_0) = x_0$, depende analíticamente del parámetro μ en un entorno del valor $\mu = \mu_0$, si la función f en la región dada de variación de t y de x y en cierto entorno del punto μ_0 , es continua en t y depende analíticamente de μ y de x .

Una afirmación análoga tiene lugar también para el sistema de ecuaciones

$$\dot{x}_i(t) = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \mu) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

En este caso se presupone que las funciones f_i son continuas en el primer argumento y dependen analíticamente de los argumentos restantes.

No daremos una demostración detallada de este teorema, así como de otros teoremas que exigen la aplicación de la teoría de las funciones analíticas. Recomendamos al lector el artículo de A. N. Tíjonov, que contiene la demostración más sencilla del teorema sobre la dependencia analítica de la solución con respecto al parámetro.

La idea de la demostración de A. N. Tíjonov se reduce a lo siguiente: considerando que μ puede tomar también valores complejos, se demuestra la existencia del límite $\lim_{\Delta\mu \rightarrow 0} \frac{\Delta_\mu x(t, \mu)}{\Delta\mu} = \frac{\partial x}{\partial \mu}$, lo cual significa precisamente que la solución depende analíticamente de μ . La existencia de este límite se deduce del hecho que la razón $\frac{\Delta_\mu x}{\Delta\mu}$ satisface la ecuación diferencial lineal

$$\frac{d}{dt} \frac{\Delta_\mu x}{\Delta\mu} - \frac{f(t, x(t, \mu + \Delta\mu), \mu + \Delta\mu) - f(t, x(t, \mu), \mu + \Delta\mu)}{\Delta\mu} \frac{\Delta_\mu x(t, \mu)}{\Delta\mu} + \\ + \frac{f(t, x(t, \mu), \mu + \Delta\mu) - f(t, x(t, \mu), \mu)}{\Delta\mu}, \quad \frac{\Delta_\mu x}{\Delta\mu} \Big|_{t=t_0} = 0,$$

cuya solución es única y, al tender el incremento $\Delta\mu$ de cualquier modo a cero, tiende a la solución única de la ecuación

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} z + \frac{\partial f}{\partial \mu}, \quad z(t_0) = 0.$$

Teorema 1.4 (sobre la derivabilidad de las soluciones). Si en un entorno del punto (x_0, y_0) la función $f(x, y)$ tiene derivadas continuas hasta de k -ésimo orden inclusive, la solución $y(x)$ de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} \equiv f(x, y) \tag{1.37}$$

que satisface la condición inicial $y(x_0) = y_0$ tendrá derivadas continuas hasta de $(k+1)$ -ésimo orden inclusive en cierto entorno del punto (x_0, y_0) .

Demostración. Sustituyendo $y(x)$ en la ecuación (1.37), obtenemos la identidad

$$\frac{dy}{dx} \equiv f(x, y(x)). \tag{1.37_1}$$

Por lo tanto, la solución $y(x)$ tiene la derivada continua $f(x, y(x))$ en un entorno del punto considerado. Entonces, debido a la existencia de derivadas continuas de la función f , existirá la derivada segunda continua de la solución

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f(x, y(x)).$$

Si $k > 1$, entonces, en virtud de la existencia de las derivadas continuas de segundo orden de la función f , se puede, derivando nuevamente la identidad (1.37₁), obtener la existencia y la continuidad de la tercera derivada de la solución

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} f + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} f^2 + \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f \right).$$

Repitiendo este procedimiento k veces, se demuestra el teorema.

Consideremos ahora los puntos (x_0, y_0) en cierto entorno de los cuales no existe la solución de la ecuación $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ que satisface la condición $y(x_0) = y_0$ o existe pero no es única. Estos puntos se llaman *puntos singulares*.

La curva formada enteramente por puntos singulares se llama *singular*. Si la gráfica de cierta solución está formada enteramente por puntos singulares, dicha solución se llama *singular*.

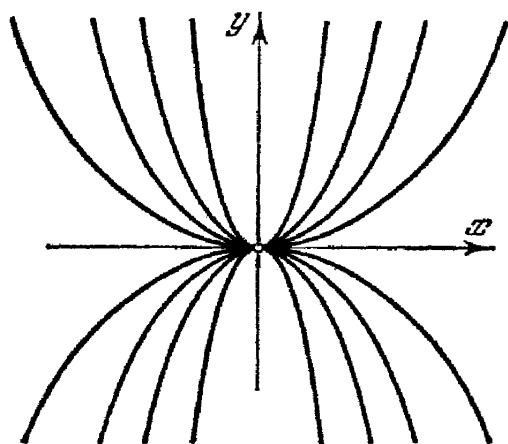


Fig. 1.19

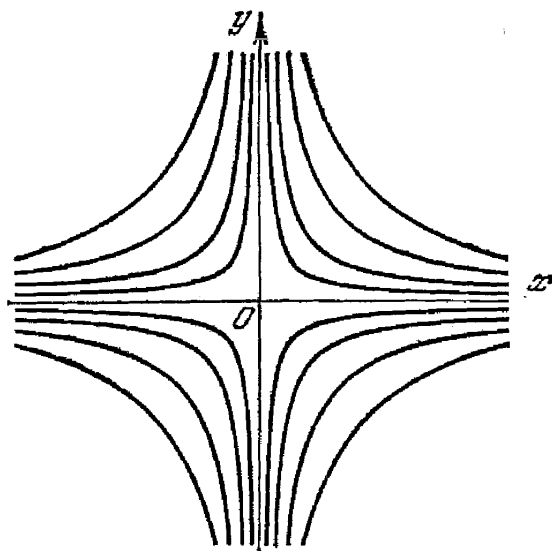


Fig. 1.20

Para hallar los puntos singulares o las curvas singulares, hay que encontrar ante todo el conjunto de puntos en los cuales no se cumplen las condiciones del teorema de existencia y unicidad de la solución, puesto que sólo entre dichos puntos pueden haber singulares. Naturalmente, no cada punto en el cual no se cumplen las condiciones de dicho teorema es necesariamente singular, ya que las condiciones del mismo son suficientes para la existencia y unicidad de la solución, pero no necesarias.

La primera condición del teorema indicado (véase la pág. 43) no se cumple en los puntos de discontinuidad de la función $f(x, y)$. Además, si al acercarse por cualquier camino a cierto punto aislado de discontinuidad (x_0, y_0) , el módulo de la función $f(x, y)$ crece indefinidamente, entonces en los problemas en que las variables x e y son equivalentes, la ecuación $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, como hemos convenido más arriba, debe ser sustituida por $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}$, cuyo segundo miembro ya es continuo en el punto (x_0, y_0) si consideramos que $\frac{1}{f(x_0, y_0)} = 0$.

Por consiguiente, en los problemas en que las variables x e y son equivalentes, la primera condición del teorema de existencia y unicidad no se cumple en los puntos en que las funciones $f(x, y)$ y $\frac{1}{f(x, y)}$ son discontinuas.

Con particular frecuencia nos encontramos con ecuaciones de la forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x, y)}{N(x, y)}, \quad (1.38)$$

donde las funciones $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son continuas. En este caso, las funciones $\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$ y $\frac{N(x, y)}{M(x, y)}$ serán simultáneamente discontinuas sólo en los puntos (x_0, y_0) en los cuales $M(x_0, y_0) = N(x_0, y_0) = 0$ y no existan los límites

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

y

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{N(x, y)}{M(x, y)}.$$

Veamos algunos puntos singulares típicos de la ecuación (1.38).

Ejemplo 3.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}.$$

El segundo miembro de la ecuación dada, y el de la ecuación $\frac{dx}{dy} = \frac{x}{2y}$ son discontinuos en el punto $x=0, y=0$. Integrando, obtenemos $y=cx^2$, que es una familia de parábolas (fig. 1.19), y $x=0$. En el origen de coordenadas tenemos un punto singular, llamado *nudo*.

Ejemplo 4.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$

El segundo miembro de la ecuación dada, y el de la ecuación $\frac{dx}{dy} = -\frac{x}{y}$ son discontinuos en el punto $x=0, y=0$. Integrando, obtenemos $y = \frac{c}{x}$, que es una familia de hipérbolas (fig. 1.20), y la recta $x=0$. En el origen de coordenadas se tiene un punto singular, llamado *montura*.

Ejemplo 5.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}.$$

El segundo miembro de esta ecuación, y el de la ecuación $\frac{dx}{dy} = \frac{x-y}{x+y}$ son discontinuos en el punto $x=0, y=0$. Integrando la ecuación homogénea

considerada (comparese con el ejemplo 3 de la pág. 39), obtenemos

$$\sqrt{x^2 + y^2} = ce^{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}},$$

o, en coordenadas polares, $\rho = ce^{\varphi}$, que son espirales logarítmicas (fig. 21). Un punto singular de este tipo se llama *foco*.

Ejemplo 6.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

El segundo miembro de esta ecuación y el de la ecuación $\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x}$ son discontinuos en el punto $x=0, y=0$. Integrando, obtenemos $x^2 + y^2 = c^2$, que

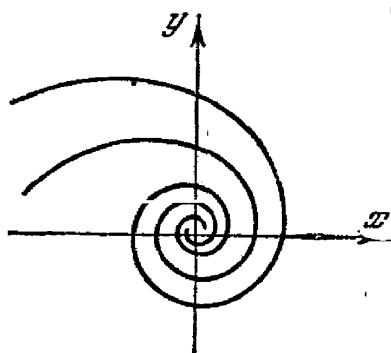


Fig. 21

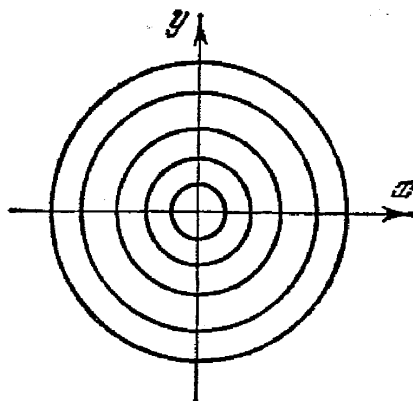


Fig. 22

es una familia de circunferencias con centro en el origen de coordenadas (fig. 22). Este tipo de punto singular, o sea, un punto singular cuyo entorno está cubierto por una familia de curvas integrales cerradas, se llama *centro*. En este ejemplo no existe ninguna solución que satisfaga la condición $y(0)=0$.

El problema de los puntos singulares y de su clasificación será enfocado desde un punto de vista un tanto diferente en el capítulo 4.

La segunda condición del teorema 1.1 de existencia y unicidad de la solución: la condición de Lipschitz, o la condición más grosera de la existencia de la derivada parcial acotada $\frac{\partial f}{\partial y}$, con mayor frecuencia no se cumple en los puntos en que $\frac{\partial f}{\partial y}$ crece indefinidamente al aproximarse a ellos, o sea, en los puntos donde $\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}} = 0$.

La ecuación $\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}} = 0$, en general, define cierta curva, en cuyos puntos puede no tener lugar la unicidad. Si en los puntos de esta

curva la unicidad se viola, entonces la curva será singular. Si, además, esta curva es integral, obtendremos una curva integral singular.

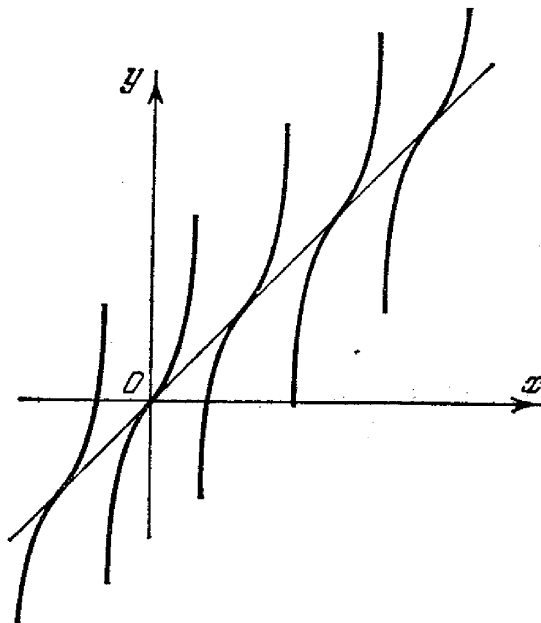


Fig. 23

Es posible que la curva $\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}} = 0$ tenga varias ramas; entonces para cada una de ellas hay que resolver el problema de si esta rama es una curva singular, o bien una curva integral, o no.

Ejemplo 7. ¿Tiene solución singular la ecuación $\frac{dy}{dx} = y^2 + x^2$?

Las condiciones del teorema de existencia y unicidad se cumplen en un entorno de cualquier punto; por lo tanto, no hay solución singular.

Ejemplo 8. ¿Tiene solución singular la ecuación $\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{(y-x)^2} + 5$?

El segundo miembro es continuo, pero la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{3}(y-x)^{-\frac{1}{3}}$ crece indefinidamente al aproximarse a la recta $y=x$; por lo tanto, en dicha recta puede no cumplirse la unicidad. Sin embargo, la función $y=x$ no satisface la ecuación considerada y, por consiguiente, no hay solución singular.

Ejemplo 9. ¿Tiene solución singular la ecuación $\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{(y-x)^2} + 1$?

Al igual que en el ejemplo anterior, la ecuación $\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}} = 0$ tiene la forma $y=x$, pero esta vez la función $y=x$ satisface la ecuación dada. Queda por

aclarar si se viola o no la unicidad en los puntos de esta recta. Mediante la sustitución de variables $z = y - x$, se reduce la ecuación inicial a una ecuación de variables separables, luego de lo cual hallamos sin dificultad la solución:

$y - x = \frac{(x-c)^3}{27}$. Las curvas de esta familia pasan por los puntos de la gráfica de la solución $y = x$ (fig. 1.23). Por consiguiente, en cada punto de la recta $y = x$ la unicidad se viola, y la función $y = x$ es una solución singular.

Este ejemplo demuestra que la sola continuidad del segundo miembro de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

no es suficiente para la unicidad de la solución del problema inicial fundamental; sin embargo, se puede demostrar que la existencia de la solución con ello ya está garantizada.

§ 7. METODOS APROXIMADOS DE INTEGRACION DE LAS ECUACIONES DE PRIMER ORDEN

En el párrafo anterior ya hemos visto dos métodos aproximados de integración de ecuaciones diferenciales: el método de Euler y el método de las aproximaciones sucesivas. Sin embargo, ambos métodos tienen insuficiencias sustanciales, por lo que son relativamente poco utilizados en la práctica del cálculo aproximado.

Las virtudes de los métodos aproximados se valoran por la exactitud de los resultados que éstos dan y por la simplicidad de los cálculos. Las insuficiencias del método de las aproximaciones sucesivas son la relativamente lenta convergencia a la solución de las aproximaciones y la complejidad de los cálculos. La insuficiencia del método de Euler es la poca exactitud, para elevar la cual hay que tomar un paso h muy pequeño. Esto conduce a cálculos muy largos.

A propósito, un pequeño perfeccionamiento del *método de Euler*, el llamado *emparejamiento* (o iteración), conduce ya a un esquema de cálculo bastante cómodo. Al aplicar el método de Euler con emparejamiento, se divide el segmento $x_0 \leq x \leq b$, en el que hay que calcular la solución de la ecuación $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ determinada

por la condición $y(x_0) = y_0$, en partes iguales de longitud $h = \frac{b-x_0}{n}$.

Denotando $x_0 + kh = x_k$, $y(x_0 + kh) = y_k$, $y'(x_0 + kh) = y'_k$, se calcula y_{k+1} , si y_k ya fue hallado, al principio por la fórmula de Euler:

$$y_{k+1} = y_k + hy'_k, \text{ o bien } \Delta y_k = y_{k+1} - y_k = hy'_k, \quad (1.39)$$

es decir, en el segmento $x_0 + kh \leq x \leq x_0 + (k+1)h$ se sustituye la curva integral que pasa por el punto (x_k, y_k) por un segmento

de su tangente en ese mismo punto (véase la fig. 1.13, pág. 42). Después se precisa el valor calculado y_{k+1} , para lo cual se determina la derivada $y'_{k+1} = f(x_{k+1}, y_{k+1})$ y se aplica nuevamente la fórmula de Euler (1.39), pero tomando en lugar de y'_k la media aritmética de los valores calculados de las derivadas en los puntos frontera $\frac{y'_k + y'_{k+1}}{2}$, es decir, se considera

$$\bar{y}_{k+1} = y_k + h \frac{y'_k + y'_{k+1}}{2}. \quad (1.40)$$

El valor nuevamente calculado $\bar{y}_{k+1}$ nos permite calcular un nuevo valor de la derivada: $\bar{y}'_{k+1} = f(x_{k+1}, \bar{y}_{k+1})$, después de lo cual se vuelve a calcular la media aritmética de las derivadas $\frac{y'_k + \bar{y}'_{k+1}}{2}$, y se aplica de nuevo la fórmula (1.40)

$$\bar{\bar{y}}_{k+1} = y_k + h \frac{y'_k + \bar{y}'_{k+1}}{2}.$$

Este proceso se continúa hasta que coincidan, en los límites de la exactitud dada, los resultados de dos cálculos sucesivos de los valores de y_{k+1} . Luego, por el mismo método, se calcula y_{k+2} etc.

El método de Euler con emparejamiento da en cada paso un error de orden h^3 y con frecuencia se aplica en la práctica del cálculo. Sin embargo, con mucho mayor frecuencia se utilizan métodos más exactos (como los de Störmer, Runge, Milne y otros), basados en la sustitución de la solución buscada por varios miembros de su desarrollo de Taylor

$$y_{k+1} \approx y_k + h y'_k + \frac{h^2}{2!} y''_k + \dots + \frac{h^n}{n!} y^{(n)}_k, \quad (1.41)$$

es decir, en la sustitución de la curva integral buscada por una parábola de n -ésimo grado, que tenga un contacto de orden n con la curva integral en el punto $x = x_k, y = y_k$.

La aplicación directa de la fórmula de Taylor (1.41) en cada paso conduce a cálculos complejos y no de un mismo tipo, por lo que ésta se aplica comúnmente sólo para calcular algunos valores cercanos a $x = x_0$, necesarios para la aplicación de esquemas de cálculo más cómodos. Entre éstos se debe mencionar ante todo el *método de Störmer*, en el cual el cálculo se realiza mediante una de las siguientes fórmulas, según el grado de la parábola de aproximación:

$$y_{k+1} = y_k + q_k + \frac{1}{2} \Delta q_{k-1}, \quad (1.42)$$

$$y_{k+1} = y_k + q_k + \frac{1}{2} \Delta q_{k-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 q_{k-2}, \quad (1.43)$$

$$y_{k+1} = y_k + q_k + \frac{1}{2} \Delta q_{k-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 q_{k-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 q_{k-3}, \quad (1.44)$$

$$y_{k+1} = y_k + q_k + \frac{1}{2} \Delta q_{k-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 q_{k-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 q_{k-3} + \frac{251}{720} \Delta^4 q_{k-4} \quad (1.45)$$

donde

$$\begin{aligned} q_k &= y'_k h, \quad \Delta q_{k-1} = q_k - q_{k-1}, \quad \Delta^2 q_{k-2} = \Delta q_{k-1} - \Delta q_{k-2} \\ \Delta^3 q_{k-3} &= \Delta^2 q_{k-2} - \Delta^2 q_{k-3}, \quad \Delta^4 q_{k-4} = \Delta^3 q_{k-3} - \Delta^3 q_{k-4}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Las fórmulas de Störmer pueden ser obtenidas mediante la integración, desde x_k hasta x_{k+1} , de la identidad $y' \equiv f(x, y(x))$, en la cual $y(x)$ es la solución buscada:

$$y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x)) dx,$$

y aplicando la fórmula de cuadratura, conocida del curso de análisis:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(x) dx \approx h \left[\varphi_k + \frac{1}{2} \Delta \varphi_{k-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 \varphi_{k-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 \varphi_{k-3} + \frac{251}{270} \Delta^4 \varphi_{k-4} + \dots \right]. \quad (1.46)$$

Recordemos que esta fórmula de cuadratura se obtiene mediante la sustitución de la función subintegral $\varphi(x)$ por un polinomio de aproximación según la fórmula de interpolación de Newton y el cálculo de las integrales de cada sumando.

La apreciación del resto de la fórmula de cuadratura (1.46) muestra que el error en la fórmula (1.42) en un paso es de orden h^3 ; en la fórmula (1.43), de orden h^4 ; en la (1.44), de orden h^5 ; en la (1.45), de orden h^6 . Si se toma en cuenta que para varios pasos los errores se pueden sumar, entonces para la apreciación del error en n pasos hay que multiplicar las apreciaciones obtenidas para un paso por $n = \frac{b-x_0}{h}$, lo cual puede conducir a la variación del orden del error mencionado más arriba.

Observación. Se puede demostrar, por desarrollo directo según la fórmula de Taylor en un entorno del punto $x = x_k$, que el segundo miembro de la fórmula de Störmer (1.42) coincide con los tres primeros términos del desarrollo de y_{k+1} según la fórmula de Taylor (1.41), con exactitud de hasta los términos que contienen a h en potencias mayores que 2:

$$y_k + h y'_k + \frac{h^2}{2!} y''_k; \quad (1.47)$$

el segundo miembro de la fórmula siguiente de Störmer (1.43), con exactitud de hasta los términos que contienen a h en potencias mayores que 3, coincide con

$$y_k + hy'_k + \frac{h^2}{2!} y''_k + \frac{h^3}{3!} y'''_k.$$

etc. Para la fórmula (1.42), por ejemplo, obtenemos:

$$y_k + hy'_k + \frac{1}{2} h \Delta y'_{k-1} = y_k + hy'_k + \frac{1}{2} h (y'_k - y'_{k-1}), \quad (1.48)$$

o, desarrollando

$$y'_{k-1} = y'(x_{k-1})$$

por la fórmula de Taylor

$$y'(x_{k-1}) = y'(x_k) - hy''(x_k) + \frac{1}{2} h^2 y'''(x_k) + \dots$$

y sustituyendo en (1.48), obtenemos:

$$y_k + hy'_k + \frac{1}{2} h (y'_k - y'_{k-1}) = y_k + hy'_k + \frac{1}{2} h^2 y''_k - \frac{1}{4} h^3 y'''_k + \dots$$

por lo tanto, los tres primeros términos coinciden con los tres términos del desarrollo según la fórmula de Taylor (1.47).

Para comenzar el cálculo por las fórmulas de Störmer es necesario conocer los valores de la función buscada no en uno, sino en varios puntos (al aplicar la fórmula (1.42), en dos puntos: x_0 y $x_0 + h$; al aplicar (1.43), en tres: x_0 , $x_0 + h$ y $x_0 + 2h$, etc.). Estos primeros valores pueden ser calculados por el método de Euler con paso disminuido, o aplicando la fórmula de Taylor (1.41), o por el *método de Runge* expuesto brevemente más abajo.

Tomemos, por ejemplo, la fórmula (1.44):

$$y_{k+1} = y_k + q_k + \frac{1}{2} \Delta q_{k-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 q_{k-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 q_{k-3},$$

y supongamos que, aparte del valor inicial dado y_0 , ya hemos hallado y_1 , y_2 e y_3 . Entonces se pueden calcular:

$$\begin{aligned} q_0 &= f(x_0, y_0)h, & q_1 &= f(x_1, y_1)h, \\ q_2 &= f(x_2, y_2)h, & q_3 &= f(x_3, y_3)h, \end{aligned}$$

y, por lo tanto, también

$$\begin{aligned} \Delta q_0 &= q_1 - q_0, & \Delta q_1 &= q_2 - q_1, & \Delta q_2 &= q_3 - q_2, \\ \Delta^2 q_0 &= \Delta q_1 - \Delta q_0, & \Delta^2 q_1 &= \Delta q_2 - \Delta q_1, & \Delta^3 q_0 &= \Delta^2 q_1 - \Delta^2 q_0. \end{aligned}$$

Ahora, mediante la fórmula (1.44), calculamos el valor y_4 y, conociendo éste, obtenemos q_4 , Δq_3 , $\Delta^2 q_2$ y $\Delta^3 q_1$. Luego, por medio de la misma fórmula (1.44), calculamos y_5 , etc.

Los resultados del cálculo se anotan en la tabla siguiente, que se va llenando gradualmente:

x	y	q	Δq	$\Delta^2 q$	$\Delta^3 q$
x_0	y_0	q_0	Δq_0	$\Delta^2 q_0$	$\Delta^3 q_0$
x_1	y_1	q_1	Δq_1	$\Delta^2 q_1$	
x_2	y_2	q_2	Δq_2		
x_3	y_3	q_3			
x_4					
x_5					
x_6					

Generalmente se exige calcular con una exactitud dada el valor de la solución buscada de la ecuación diferencial en cierto punto $x=b$. Entonces surge de inmediato la pregunta: ¿cuál de las fórmulas de Störmer convendría utilizar y qué paso h garantiza la exactitud de cálculo exigida, sin ser demasiado pequeño para que no conduzca a un exceso de operaciones? Los órdenes de los errores para cada paso, indicados más arriba, dan cierta idea sobre la elección de la fórmula con la que conviene realizar los cálculos, y sobre la elección del paso. Hay que tener en cuenta, claro está, que tras unos cuantos pasos los errores pueden sumarse. Si el paso h fue escogido correctamente, todas las diferencias en la tabla deben variar uniformemente, y las últimas diferencias en la fórmula (1.44) deben influir sólo en las cifras de reserva. Un cambio brusco de cierta diferencia demuestra que para el paso h escogido pueden no considerarse algunas peculiaridades de la variación de la función en el segmento considerado, lo cual puede traer aparejado errores considerables en el cálculo de y_{k+1} .

Sin embargo, todos estos razonamientos no son del todo seguros, y valorizaciones más exactas del error son muy complejas e incómodas. Por eso a menudo se aplica el siguiente método práctico

y bastante efectivo: se escoge un paso h , en base a los razonamientos inexactos expuestos más arriba; se realiza el cálculo mediante una de las fórmulas de Störmer, con pasos h y $\frac{h}{2}$, y se comparan los resultados en los puntos comunes. Si dichos resultados coinciden en los límites de la exactitud dada, entonces se considera que el paso h asegura la exactitud de cálculo dada. Si, en cambio, los resultados no coinciden en los límites de la exactitud dada, entonces se disminuye el paso a la mitad, se realizan los cálculos con los pasos $\frac{h}{2}$ y $\frac{h}{4}$, y se comparan nuevamente los resultados, etc.

Es conveniente realizar en forma paralela los cálculos con pasos h y $\frac{h}{2}$, para notar lo antes posible la no coincidencia de los resultados, y no efectuar un trabajo innecesario. Este método de doble computación tiene además la cualidad de que al aplicarlo se excluyen casi por completo los errores en los cálculos, puesto que éstos, por regla general, son descubiertos al comparar los resultados de los cálculos con pasos h y $\frac{h}{2}$.

Para hallar varios valores iniciales y_i , necesarios para el comienzo de los cálculos por el método de Störmer, se puede recomendar, aparte de los métodos señalados más arriba (método de Euler con paso disminuido, con iteraciones o sin ellas, o método de desarrollo según la fórmula de Taylor), el método de Runge.

Según este método, para hallar y_{k+1} hay que calcular cuatro números:

$$\begin{aligned} m_1 &= f(x_k, y_k), \quad m_2 = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{m_1 h}{2}\right), \\ m_3 &= f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{m_2 h}{2}\right), \quad m_4 = f(x_k + h, y_k + m_3 h), \end{aligned} \quad (1.49)$$

y entonces

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6} (m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4). \quad (1.50)$$

El método de Runge se aplica generalmente sólo para el cálculo de varios valores iniciales $y_1, y_2, \dots$, necesarios para comenzar los cálculos por el método de Störmer; sin embargo, por este método se pueden calcular también los demás valores. El método de Runge, al igual que el de Störmer, se fundamenta en la aproximación de la curva integral buscada por una parábola osculatriz.

Si se compara el segundo miembro de la fórmula de Runge (1.50) con el desarrollo por la fórmula de Taylor

$$y_{k+1} = y_k + y'_k h + \frac{1}{2!} y''_k h^2 + \frac{1}{3!} y'''_k h^3 + \frac{1}{4!} y^{IV}_k h^4 + \dots;$$

resulta que los términos con potencias menores de cinco coinciden. Por eso, al calcular varios valores iniciales por el método de Runge, con paso ulterior al cálculo por medio del método de Störmer según las fórmulas (1.42), (1.43) o (1.44), se puede realizar el cálculo con el mismo paso h . Si, en cambio, a continuación se aplica la fórmula de Störmer (1.45), entonces el comienzo del cálculo por el método de Runge debe efectuarse con paso disminuido, puesto que para un mismo paso la fórmula (1.50) no garantiza la misma exactitud de los cálculos que la (1.45). A propósito, con frecuencia aún al aplicar la fórmula de Störmer (1.43) y la (1.44), el comienzo de los cálculos se realiza de todos modos mediante la fórmula de Runge con paso disminuido, ya que incluso un pequeño error en el cálculo de los valores iniciales para la fórmula de Störmer puede disminuir bruscamente la exactitud de los cálculos ulteriores *).

Las máquinas calculadoras modernas de acción discreta permiten realizar los cálculos indicados arriba por los métodos de Störmer o de Runge con excepcional rapidez (varias decenas y hasta centenas de miles de operaciones por segundo). Además, el propio proceso de programación puede ser considerablemente simplificado por medio de la aplicación de programas standard, preparados para los métodos de Störmer y de Runge. En este caso, para la integración aproximada de la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, hay que confeccionar sólo el subprograma para el cálculo de los valores $y'_k = f(x_k, y_k)$, e incluirlo en el programa standard.

Ejemplo.

$$y' = x^2 + y^2; \quad y(0) = -1.$$

Hallar el valor $y(0,5)$ con aproximación de 0,01.

Aplicando el desarrollo según la fórmula de Taylor

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)x^2}{2!} + \frac{y'''(0)x^3}{3!} + \dots$$

se calcula el valor de $y(x)$ en los puntos $x_1 = 0,1$ y $x_2 = 0,2$:

$$y(0,1) = -0,9088 \quad \text{e} \quad y(0,2) = -0,8309$$

(o bien, en lugar de $y(0,2)$, se calcula $y(-0,1)$, lo cual es aún más preferible, ya que el punto $x_1 = -0,1$ se encuentra más cerca del punto inicial $x_0 = 0$ que el punto $x_2 = 0,2$). Los valores subsiguientes se calculan por medio de la fórmula de Störmer (1.43) con paso $h = 0,1$, y los resultados del cálculo se disponen en una tabla (sin las diferencias $\Delta^3 q$). Después de esto, o en forma paralela, se realiza el cálculo con paso $\frac{h}{2} = 0,05$. Como resultado, se obtiene:

$$y(0,5) \approx -0,63.$$

§ 8. TIPOS SIMPLES DE ECUACIONES NO RESUELTAS CON RESPECTO A LA DERIVADA

La ecuación diferencial de primer orden no resuelta con respecto a la derivada, tiene la forma

$$F(x, y, y') = 0. \quad (1.51)$$

Si esta ecuación puede ser resuelta con respecto a y' , se obtienen una o varias ecuaciones

$$y' = f_i(x, y) \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Integrando estas ecuaciones, ya resueltas con respecto a la derivada, se hallan las soluciones de la ecuación inicial (1.51).

Integremos, por ejemplo, la ecuación

$$(y')^2 - (x + y)y' + xy = 0. \quad (1.52)$$

Resolviendo esta ecuación, que es cuadrática con respecto a y' , tendremos: $y' = x$ e $y' = y$. Integrando cada ecuación obtenida, hallamos:

$$y = \frac{x^2}{2} + c \quad (1.53)$$

e

$$y = ce^x. \quad (1.54)$$

(fig. 1.24). Ambas familias de soluciones satisfacen la ecuación inicial.

Las curvas formadas por un arco de curva integral de la familia (1.53) y un arco de curva integral de la familia (1.54), si en el punto común poseen una tangente común, serán también curvas integrales lisas de la ecuación (1.52). En la fig. 1.25 está representada curva integral de la ecuación (1.52), formada por las gráficas de las soluciones

$y = \frac{x^2}{2} + c$ para $c = \frac{1}{2}$, $-\infty < x \leq 1$, e

$y = ce^x$, para $c = e^{-1}$, $1 \leq x < \infty$; en la

fig. 1.26 se muestra la curva integral de la ecuación (1.52), formada por las gráficas de las soluciones $y = \frac{x^2}{2}$, si $x \leq 0$, e $y = 0$ si $x > 0$.

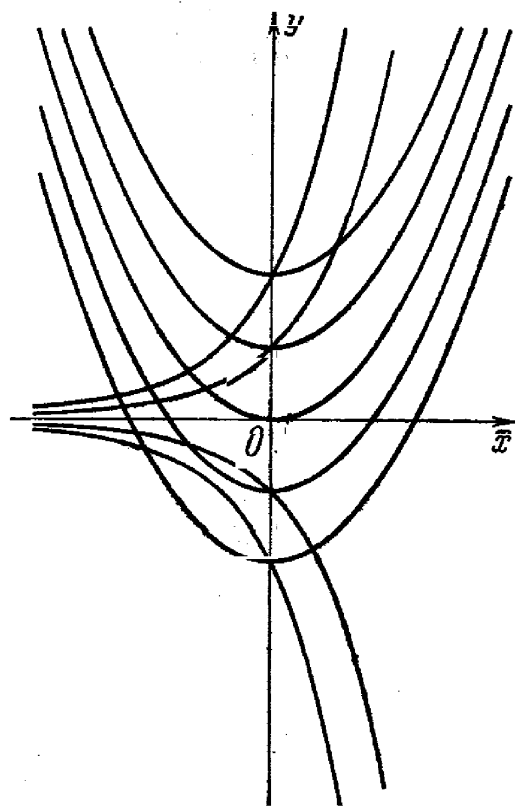


Fig. 1.24

De esta manera, la ecuación

$$F(x, y, y') = 0 \quad (1.51)$$

puede ser integrada resolviendo con respecto a y' e integrando las ecuaciones obtenidas $y' = f_i(x, y)$ ($i = 1, 2, \dots$), ya resueltas con respecto a la derivada.