

Control I / DSF – 3^{er} Parcial 2005 – Tema B**Código: EP03-B_05**

A-4.26.1 Control I

E-3.20.1 Dinámica de los Sistemas Físicos

NOMBRE Y APELLIDO:.....

LEGAJO:.....

PARTE I: “PRÁCTICA”**PROBLEMA 1: SISTEMAS LINEALES – APLICACIÓN: ARRANQUE Y CARGA MCC**

Sean los siguientes modelos de un MCC con excitación permanente.

| | | |
|--|--|---|
| $\begin{cases} \dot{\omega} = -\frac{b}{J}\omega + \frac{K}{J}I_a - \frac{1}{J}T_C \\ \dot{I}_a = \frac{K}{L_a}\omega - \frac{R_a}{L_a}I_a + \frac{1}{L_a}U \end{cases}$ <p>Modelo Dinámico $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(\mathbf{z})$</p> | $\begin{cases} \bar{\omega} = \frac{K}{bR_a + K^2} \bar{U}_a - \frac{R_a}{bR_a + K^2} \bar{T}_C \\ \bar{I}_a = \frac{b}{bR_a + K^2} \bar{U}_a + \frac{K}{bR_a + K^2} \bar{T}_C \end{cases}$ <p>Modelo de Régimen</p> | $\begin{cases} b = 8.10^{-3} \text{ Nms}, J = 0,1365 \text{ kgm}^2, \\ R_a = 0,45\Omega, L_a = 4\text{mH}, \\ K = 2,25\text{Wb} \\ U_{nom} = 315 \text{ V}, I_{nom} = 10 \text{ A} \\ \omega_{nom} = 138 \text{ rad / s} \end{cases}$ <p>Parámetros</p> |
|--|--|---|

- RF DEL SISTEMA LIBRE:** Realícelos tanto en el Plano Modal como en el Plano Original. Donde corresponda dibuje claramente los (vectores asociados con los) autovectores del sistema.
- APLICACIÓN:** Dibuje en el espacio de estados (Plano Original) las trayectorias correspondientes a la aplicación de los siguientes escalones de entrada: $U = \bar{U} = 250 \text{ V}$, $T_C = \bar{T}_C = 15 \text{ Nm}$. Explique claramente el procedimiento utilizado para la obtención de la solución.

OBSERVACIÓN: Calcule el campo vectorial $\mathbf{f}(\mathbf{z})$ en el arranque y representelo en el plano de fases. Esto es útil para una buena representación de la trayectoria en el arranque.

- INTERPRETACIÓN FÍSICA:** Determine en el RF las gráficas *Cupla-vs-Velocidad del Motor* ω para todas las cuplas: Cupla Motriz T_{em} , Cupla de Fricción T_f , Cupla de Carga T_C , Cupla Neta de Aceleración T_N .

AYUDA: Note que, factor de escala mediante, el eje de la coordenada I_a puede pensarse como el eje del torque motriz, dado que $I_a = T_{em} / K$.

OBSERVACIÓN/ AYUDA: Puede que para representar T_N , en lugar del sistema cartesiano ortogonal original, deba pensar en uno no-ortogonal, que guarda el eje *Corriente* o *Cupla*, y tiene como nuevo eje ω a la proyección del eje ω original (a lo largo del eje *Corriente* o *Cupla*) sobre una recta particular del plano.

PROBLEMA 2: ANÁLISIS DEL PE DE UN SNL CON LA APROXIMACIÓN DE PRIMER ORDEN.

El siguiente sistema modela la dinámica de una reacción química (conocida como BRUSSELETOR).

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a + x_1^2 x_2 - (b+1)x_1 \\ \dot{x}_2(t) = b x_1 - x_1^2 x_2 \end{cases} ; (a > 0, b > 0), \text{ donde } x_1 \text{ y } x_2 \text{ son las concentraciones de los compuestos.}$$

- Calcule un PE y su correspondiente aproximación de primer orden.
- Considere al MILin por sí mismo, o sea, **analice un SISTEMA LINEAL**:
 - Sea $a > 0$ fijo. Determine el subconjunto de los valores del parámetro $b > 0$ tales que los RF del sistema LINEAL sean Lyapunov-estables o asintóticamente estables.
 - Clasifique el universo de RFs del punto anterior (nombre a cada tipo de RF: nodo estable, etc.) en dependencia del parámetro b .
 - Para cada caso de la clasificación, dibuje el patrón modal genérico del RF correspondiente (observe que no se pide el RF modal asociado a este MILin particular, y mucho menos el RF en el plano original).
 - TEMA A: Dibuje el RF del **MILin!** en el plano original para el caso particular $a = 10$, $b = 40$.
- De todos los casos anteriores 2.1 a 2.4, diga y fundamente:
 - Si el PE del SISTEMA NO-LINEAL (SNL) es Lyapunov-estable o asintóticamente estable.
 - Si las trayectorias del MILin aproximan o no a las trayectorias del SNL en entornos suficientemente pequeños del PE.

PROBLEMA 3: ANÁLISIS DE LA ESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO DE UN SNL.

Las EE describen la dinámica del sistema de la figura, con τ : torque de carga, ω velocidad volante, δ : deformación del resorte; J : momento de inercia, k : constante del resorte.

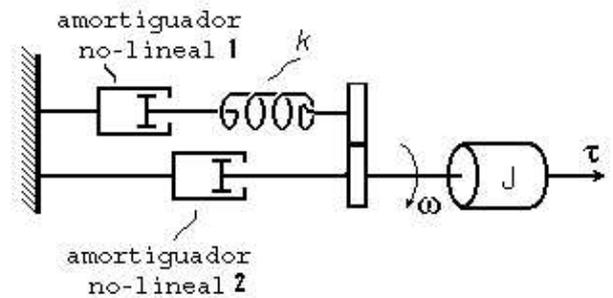
$$\dot{\omega} = \frac{1}{J} \tau - \frac{k}{J} \delta - \frac{b_1}{J} \omega - \frac{b_2}{J} \omega^3$$

$$\dot{\delta} = \omega - f k \delta^2 \operatorname{sgn}(\delta)$$

1. Analice la estabilidad del equilibrio sin carga $\tau = 0$.

Considere:

- b_1, b_2, f : constantes positivas.
- b_2, f : constantes positivas; $b_1 = 0$.
- b_2 : constante positiva; $b_1 = f = 0$.

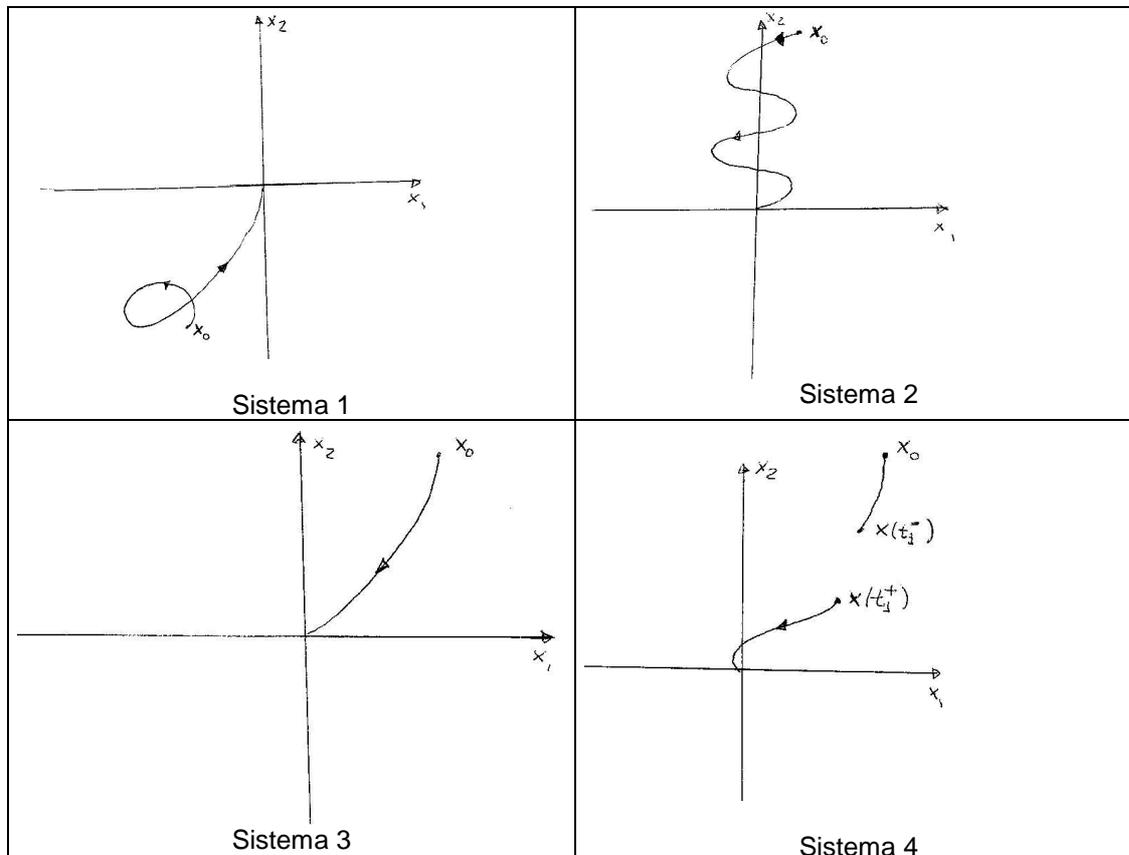


2. Interprete físicamente los resultados en cada caso (¿por qué tal o cual método funciona / no funciona?).

PARTE II: “TEORÍA”

PROBLEMA 4: PROPIEDADES DE LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE ESTADO.

Las siguientes gráficas muestran trayectorias en el espacio de estados de distintos sistemas dinámicos de segundo orden.



Para cada uno de dichos sistemas, decir cuales de los siguientes modelos pueden representarlo, justificando en cada caso la respuesta.

- a) $\dot{x} = A.x + B.u(t)$
- b) $\dot{x} = f(x)$
- c) $\dot{x} = f(x, t)$
- d) $\dot{x} = A.x(t)$
- e) $\dot{x} = f(x, u(t))$

En todos los casos, las funciones f son continuamente diferenciables y la entrada u es acotada.

PROBLEMA 5: MATRIZ DE TRANSICIÓN

De un sistema Lineal y Estacionario de segundo orden se conoce

$$\text{Autovalores: } \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases} \quad \text{Autovectores: } V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- a) Calcular la matriz de transición.
- b) Para cierta condición inicial $x(t=0) = x_0$, el sistema evoluciona pasando por

$$x(t=2) = \begin{bmatrix} -0,5851 \\ 0,7683 \end{bmatrix}.$$

Calcular la condición inicial x_0

- c) ¿Es posible que en algún momento $x_2 > x_1$ a lo largo de la trayectoria del punto anterior?. Justifique su respuesta.
- d) Dibujar en el espacio de estados la trayectoria $x(t)$ a partir de la condición inicial calculada en el punto b).

Resolución del 3er Parcial 2005. Tema B

Problema 1

1. RF del Sistema Libre

La matriz de evolución es

$$A = \begin{bmatrix} -0,058608 & 16,484 \\ -562,5 & -112,5 \end{bmatrix}$$

Los autovalores, calculados a partir de la ecuación $\det(\lambda I - A) = 0$, son

$$\lambda_{1,2} = -56,279 \pm j78,14$$

Al ser complejos conjugados con parte real negativa, el retrato de fase es del tipo *foco estable*.

Los autovectores son también complejos conjugados y pueden calcularse a partir de la ecuación $(\lambda_i I - A)V_i = 0$. Dado que esta ecuación es L.D. (linealmente dependiente), podemos elegir uno de los componentes de la solución. Tomando $V_{1,1} = 1$ resulta $V_{1,2} = -3,4107 + j4,7426$.

Luego, el primer autovector es

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3,4107 + j4,7426 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3,4107 \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} 0 \\ 4,7426 \end{bmatrix}$$

La parte real e imaginaria del autovector definen los ejes del cambio de coordenadas que lleva a la forma modal con matriz de evolución

$$A^* = \begin{bmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{bmatrix}$$

El retrato de fases modal se puede ver en la Figura 1. El RF en el plano original se obtiene colocando los ejes del RF modal en las direcciones dadas por las partes real e imaginaria de los autovectores, es decir, $[1 \ -3,4107]^T$ y $[0 \ 4,7426]^T$.

El sentido de giro se puede analizar haciendo $\omega = 0$, $I_a > 0$, de donde resulta que $\dot{\omega} > 0$, por lo que las trayectorias cruzan el eje vertical en el semiplano superior hacia la derecha, es decir, en sentido horario. La gráfica resultante se muestra en la Fig. 2.

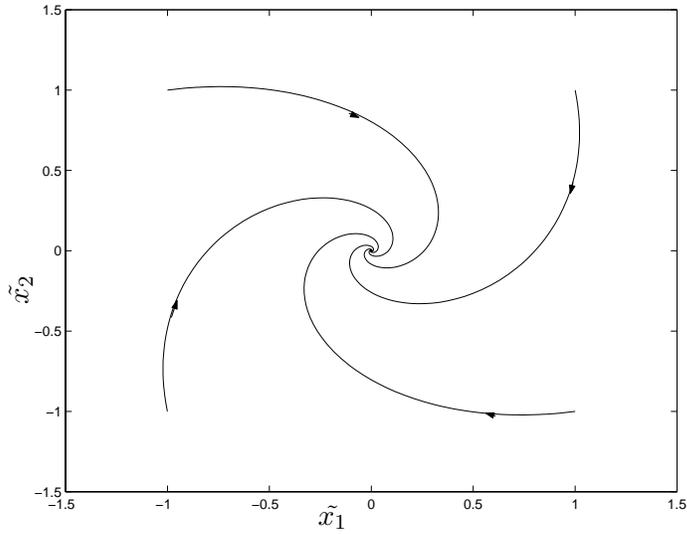


Figura 1: RF en el plano modal

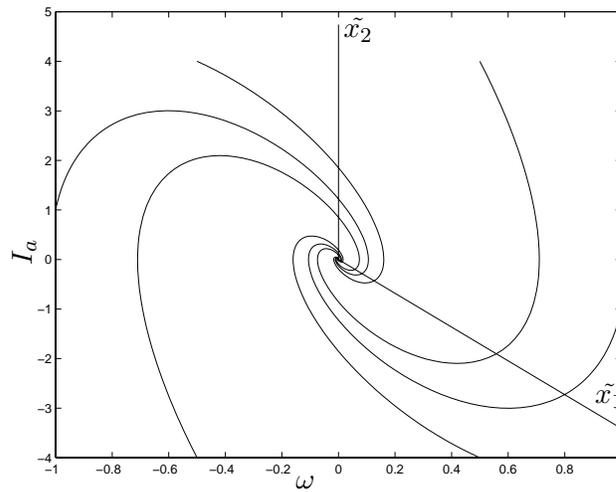


Figura 2: RF en el plano original.

2. Aplicación.

Para la entrada especificada, el punto de equilibrio puede calcularse del modelo de régimen (o despejarse de las ecuaciones de estado). El punto es $\bar{\omega} = 109,7$, $\bar{I}_a = 7,0567$.

La trayectoria puede obtenerse trasladando el RF de la Fig.2 al nuevo punto de equilibrio, y luego dibujando la curva que comienza desde la condición inicial (el origen).

Para tener más precisión, puede calcularse la dirección con que sale la

trayectoria directamente del sistema de ecuaciones de estado. En este caso tenemos

$$\dot{\omega}(0) = -\frac{1}{J}T_c = -109,89$$

$$\dot{I}_a(0) = \frac{1}{L_a}U = 62500$$

La Figura 3 muestra la trayectoria obtenida.

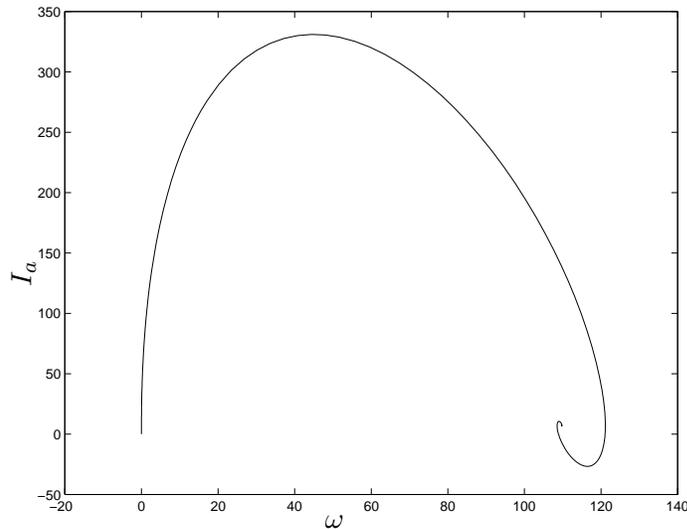


Figura 3: Trayectoria de arranque.

3. Interpretación Física

En el caso del torque electromotriz, la gráfica es la misma que la de la Fig.3 con un simple cambio de escala en el eje vertical, ya que $T_{em}(t) = K \cdot I_a(t)$.

En cuanto al torque de fricción, se tiene que $T_f = b \cdot \omega$, por lo que la gráfica es una recta.

El torque de carga es constante e independiente de ω (en el punto anterior tomamos $T_c = 15$). La gráfica es una constante.

Finalmente, el torque neto puede calcularse como $T_N = T_{em} - T_f - T_c$, por lo que la gráfica será la resultante de las anteriores.

La Figura 4 muestra las cuatro trayectorias.

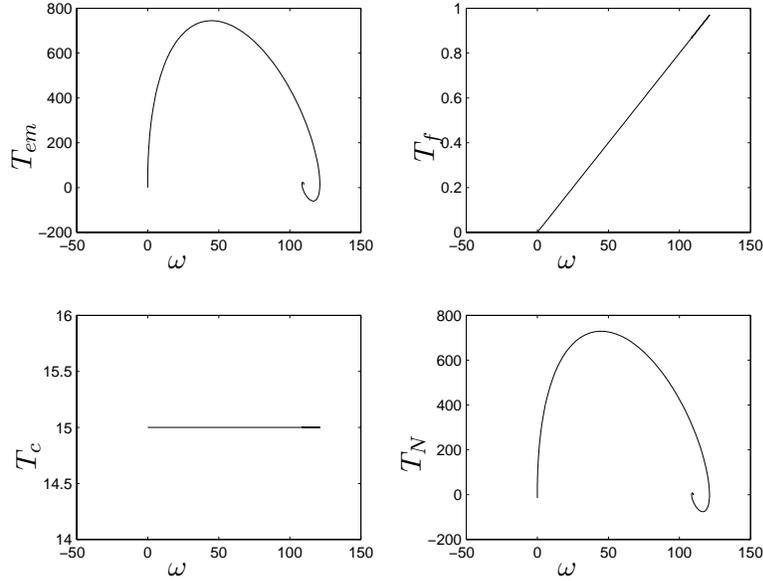


Figura 4: Cuplas durante el arranque.

Problema 2

1. Punto de Equilibrio y Linealización

Igualando las derivadas a 0, de la segunda ecuación se obtiene

$$b \cdot x_1 = x_1^2 x_2$$

Reemplazando en la primera ecuación resulta

$$a + b \cdot x_1 - (b + 1)x_1 = 0$$

de donde $x_1 = a$ y luego, $x_2 = b/a$. Es decir, el punto de equilibrio es $x = [a \ b/a]^T$.

El jacobiano de la función $f(x)$ es

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} 2x_1x_2 - (b + 1) & x_1^2 \\ b - 2x_1x_2 & -x_1^2 \end{bmatrix}$$

que evaluado en el PE da como resultado

$$A = \begin{bmatrix} b - 1 & a^2 \\ -b & -a^2 \end{bmatrix}$$

Luego, el modelo incremental linealizado (MILin) es

$$\Delta \dot{x} = A \Delta x$$

2. Análisis del Sistema Lineal

2.1. Valores de b para que el sistema lineal sea estable.

El polinomio característico de la matriz A es

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^2 + (a^2 + 1 - b)\lambda + a^2$$

Utilizando el criterio de Ruth, todos los autovalores tendrán parte real negativa si el polinomio es completo y los coeficientes no cambian de signo, es decir, si $a^2 + 1 - b > 0$. Esto implica que

$$b < a^2 + 1$$

Esta es la condición para que haya estabilidad asintótica. Cuando $b = a^2 + 1$ se anula un coeficiente y la matriz tiene autovalores imaginarios puros, por lo que el sistema lineal resulta Lyapunov estable (pero no asintóticamente estable).

Para valores de b mayores, el sistema es inestable.

2.2. RFs en función de b .

Ya vimos que para $b = a^2 + 1$ tenemos autovalores imaginarios puros, por lo que el patrón del RF corresponde a *centros*.

En los otros casos, el polinomio característico tiene la forma

$$\lambda^2 + k_1\lambda + k_2$$

con $k_1 > 0$ y $k_2 > 0$. Las posibilidades son *nodo estable*, *Jordan estable* o *foco estable*, dependiendo del signo del discriminante:

$$\Delta = k_1^2 - 4k_2 = (a^2 + 1 - b)^2 - 4a^2$$

El caso de Jordan se da cuando $\Delta = 0$ (es decir, cuando hay dos polos iguales). En este caso, despejando de la definición de *Delta* obtenemos

$$\begin{aligned}(a^2 + 1 - b)^2 &= 4a^2 \Rightarrow \\ a^2 + 1 - b &= \pm 2a \Rightarrow \\ b &= a^2 + 1 \pm 2a\end{aligned}$$

Dado que la condición del punto anterior era que $b < a^2 + 1$, queda solamente la solución $a^2 + 1 - 2a$.

Para valores de b tales que $0 < b < a^2 + 1 - 2a$ resulta $\Delta > 0$ y por lo tanto las raíces son reales y distintas (*nodo estable*). Para valores de b tales que $a^2 + 1 - 2a < b < a^2 + 1$ el discriminante es $\Delta < 0$ y las raíces son complejas conjugadas (*foco estable*).

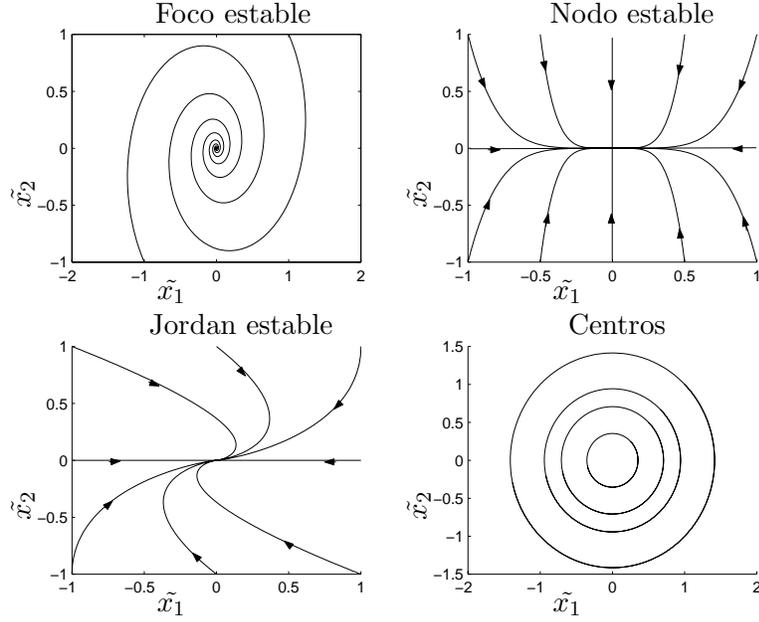


Figura 5: Retratos de fase en el plano modal.

2.3. Retratos de Fase modales.

Los RFs modales correspondientes al punto anterior se muestran en la Fig 5.

2.4 Caso Particular.

Para los parámetros $a = 10$, $b = 40$ la matriz A queda

$$A = \begin{bmatrix} 39 & 100 \\ -40 & -100 \end{bmatrix}$$

que tiene autovalores $\lambda_1 = -1,6859$ y $\lambda_2 = -59,314$. Por lo tanto se trata de un *nodo estable* (notar que estamos en el caso en que $0 < b < a^2 + 1 - 2a$)

Los autovectores se pueden calcular con la ecuación $(\lambda_i I - A)V_i = 0$. Eligiendo $V_{1,1} = 1$ y $V_{2,1} = 1$, los autovectores quedan

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,40686 \end{bmatrix}; \quad V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,98314 \end{bmatrix}$$

Los autovectores dan las direcciones invariantes del sistema. Dado que λ_1 es el autovalor más lento, las trayectorias se *pegan* a V_1 . Debido a la gran diferencia entre los autovalores, las trayectorias alcanzan V_1 en forma casi paralela a V_2 .

El RF se puede ver en la Fig. 6. En trazo oscuro pueden verse las direcciones invariantes del sistema.

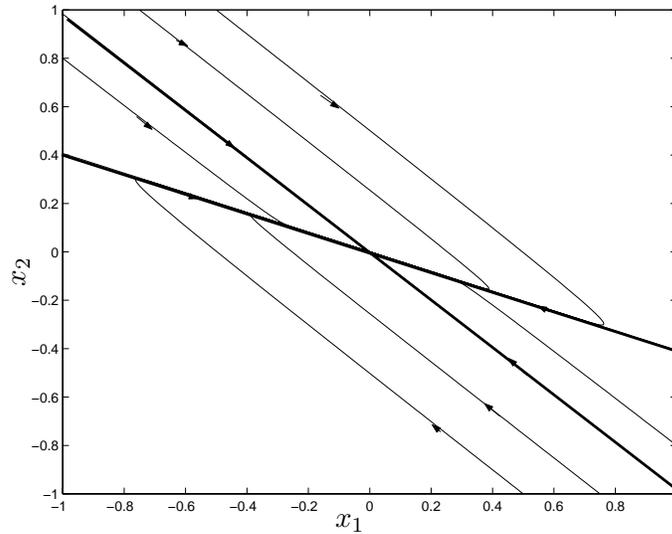


Figura 6: Retrato de fase en el plano original.

3. Análisis del Sistema No Lineal

3.1. Estabilidad del punto de equilibrio

De acuerdo al método indirecto de Lyapunov, el punto de equilibrio del sistema no lineal será asintóticamente estable para los casos en que **todos** los autovalores del sistema linealizado tengan parte real negativa. Es decir, para los casos del foco, nodo y Jordan estable.

En el caso de los centros, el método indirecto de Lyapunov no permite asegurar nada. Para establecer si es estable o no habría que estudiar el sistema con el método directo de Lyapunov.

3.1. Retrato de fases del Sistema No Lineal

El teorema de Hartman y Grobman garantiza que para los casos donde no hay autovalores con parte real nula las trayectorias del sistema no lineal en torno al punto de equilibrio son *similares* a las del MILin.

Esto es, para los casos del foco, nodo y Jordan estable las trayectorias del MILin aproximan a las del SNL. En el caso de los centros no puede decirse nada.

Problema 3.

Análisis de la estabilidad del origen

a. b_1, b_2, f constantes positivas.

En este caso podemos utilizar tanto el método indirecto como el método directo de Lyapunov. Vamos a comenzar utilizando el método indirecto.

La linealización en torno al origen arroja la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -b_1/J & -k/J \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

cuyo polinomio característico es

$$\lambda^2 + \frac{b_1}{J}\lambda + \frac{k}{J}$$

Dado que es completo y sin cambios de signo, por criterio de Ruth todos los autovalores tienen parte real negativa.

Luego, utilizando el método indirecto de Lyapunov, resulta que el origen es asintóticamente estable.

b. b_2, f constantes positivas, $b_1 = 0$.

En este caso, las raíces del polinomio característico tienen parte real nula, por lo que el método indirecto de Lyapunov no permite asegurar nada.

Para utilizar el método directo, planteamos la candidata a función de Lyapunov

$$V(\omega, \delta) = \frac{1}{2}k_1\omega^2 + \frac{1}{2}k_2\delta^2$$

cuya derivada es

$$\begin{aligned} \dot{V}(\omega, \delta) &= k_1\omega\dot{\omega} + k_2\delta\dot{\delta} \\ &= (-k_1k/J + k_2)\delta \cdot \omega - (k_1b_2/J)\omega^4 - k_2fk\delta^3\text{sgn}(\delta) \end{aligned}$$

Elegiendo $k_2 = k_1k/J$ el primer término se anula, quedando una función definida negativa. Por lo tanto, el origen es asintóticamente estable.

b. b_2 positiva, $b_1 = f = 0$.

En este caso, la derivada de V tras elegir $k_2 = k_1k/J$ queda

$$\dot{V}(\omega, \delta) = -(k_1b_2/J)\omega^4$$

que es semidefinida negativa (no depende de δ). En principio podemos asegurar que el origen es Lyapunov estable.

Para analizar si es asintóticamente estable hay que utilizar el teorema de La Salle.

La region en la cual $\dot{V} = 0$ es el eje δ . Sobre dicho eje (es decir, cuando $\omega = 0$), la derivada $\dot{\omega} = -(k/J) \cdot \delta$. Por lo tanto, excepto en el origen, las trayectorias abandonan dicho eje.

Esto quiere decir que el máximo conjunto invariante es el origen, o sea que el origen es asintóticamente estable.

2. Interpretación Física.

En el primer caso ($b_1 > 0$) hay un componente de fricción lineal. Por lo tanto, el modelo linealizado sigue teniendo rozamiento y es asintóticamente estable.

En los siguientes casos al ser $b_1 = 0$, no hay más rozamiento lineal y en el modelo linealizado desaparece el amortiguamiento (el MILin es equivalente a un sistema masa resorte sin roce). Por lo tanto, este modelo no sirve para analizar estabilidad, ya que la estabilidad queda determinada por los términos no lineales.

En los dos últimos casos, la función de Lyapunov utilizada es proporcional a la energía total del sistema (cinética más potencial elástica). Las variables de estado son la deformación del resorte y la velocidad de la masa.

Cuando la velocidad de la masa es distinta de cero, siempre hay roce en el amortiguador 2 (ya que hay movimiento) y por lo tanto hay disminución de la energía. Similarmente, cuando el resorte está deformado hay disipación en el amortiguador 1, ya que hay cupla en el mismo y por lo tanto hay velocidad.

Por este motivo, salvo que ambas variables de estado sean cero (en el origen), la derivada de la energía es negativa.

En el tercer caso, cuando se pone $f = 0$, se elimina la fricción del amortiguador 1. Entonces sólo hay disipación cuando $\omega \neq 0$. Por esto, la derivada de V resulta semidefinida negativa y hay que utilizar el principio de invariancia de La Salle. Igualmente, el origen sigue siendo asintóticamente estable debido a la presencia del amortiguador 2.

Problema 4.

Sistema 1.

Este sistema puede ser sólo representado por los modelos a), c) y e). El motivo es que la trayectoria pasa dos veces por el mismo punto, lo que indica que hay una entrada que cambia de valor o bien que el sistema es inestacionario.

Sistema 2.

Este sistema puede ser representado por cualquiera de los modelos excepto el d), ya que no hay ningún sistema lineal y estacionario de segundo orden que tenga ese tipo de retrato de fases.

Sistema 3.

Este sistema puede ser representado por cualquiera de los modelos.

Sistema 4.

Este sistema no puede ser representado por ninguno de los modelos propuestos. El motivo es la discontinuidad de la trayectoria. Tal discontinuidad puede aparecer solamente cuando el lado derecho de la ecuación es no acotado. Sin embargo, como la función f es continuamente diferenciable y la entrada u es acotada en todos los casos, esto no es posible.

Problema 5.

a. Cálculo de la matriz de transición

La matriz de transición en las variables modales (sistema desacoplado) está dada por

$$\tilde{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

La matriz de transición en las variables originales puede obtenerse a partir de la anterior utilizando la transformación dada por los autovectores. De hecho,

$$\Phi(t) = V \cdot \tilde{\Phi}(t) \cdot V^{-1}$$

La matriz de autovectores y su inversa son

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad V^{-1} = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$$

Multiplicando las matrices, queda

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 0,5(e^{-t} + e^{-2t}) & 0,5(e^{-2t} - e^{-t}) \\ 0,5(e^{-2t} - e^{-t}) & 0,5(e^{-t} + e^{-2t}) \end{bmatrix}$$

b. Cálculo de la condición inicial.

Sabemos que

$$x(t) = \Phi(t) \cdot x_0$$

de donde

$$x_0 = \Phi(t)^{-1}x(t) = \Phi(-t) \cdot x(t)$$

Reemplazando $t = 2$ y $x(2) = [-0,5851 \ 0,7683]^T$ en la ecuación anterior se obtiene

$$x_0 \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

c. Es posible que en algún momento $x_2 > x_1$ en la trayectoria anterior?

En este caso esto se da siempre. Lo que no puede ocurrir es la inversa. Notar que en la condición inicial se tiene $x_2 > x_1$. Para que en algún momento sea $x_1 > x_2$ la trayectoria debe pasar por un punto donde $x_1 = x_2$, punto que está sobre la dirección del primer autovector. Sin embargo esto es imposible ya que no se puede cruzar una dirección invariante (es decir, no se puede cruzar una trayectoria).

d. Trayectoria en el espacio de estados.

La Figura 7 muestra la trayectoria en el espacio de estados. Las líneas rectas son las direcciones invariantes (dadas por los autovectores).

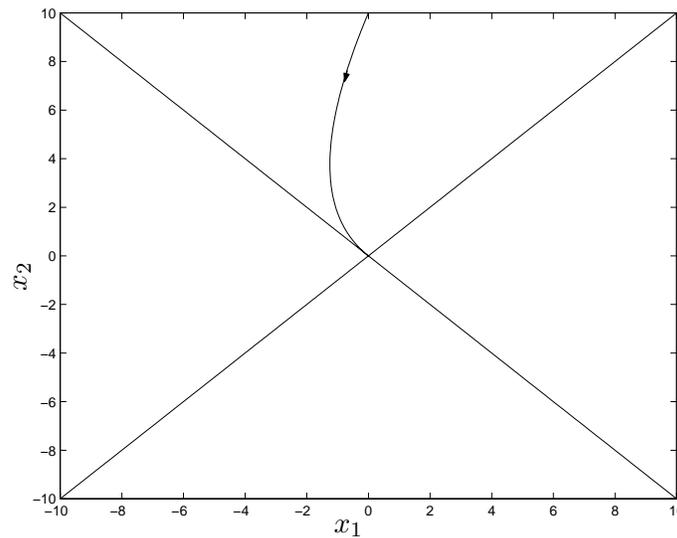


Figura 7: Trayectoria en el Espacio de Estados.