LICENCIATURA EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

ANÁLISIS MATEMÁTICO IV - 2do. PARCIAL 2003

Problema 1.
Considere el siguiente modelo matemático[1] de un Sistema No Lineal (**SNL**)

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -2\,sen x_1(t) - D\,x_2(t) + u(t) \end{cases} \quad , \qquad D > 0$$

1. *Puntos de Equilibrio* (PE) para $u(t) \equiv \bar{u}$ constante.
   a. Determine la condición de existencia de PEs, si la hubiera.
   b. Calcule TODOS los PE. Considere $\bar{u} = \boxed{\sqrt{3} \qquad \sqrt{2} \qquad 1}$

Análisis a través de la *aproximación de primer orden* (MILin) del SNL.

2. *Estabilidad* de los PE
   a. Analice la estabilidad de TODOS los PE. Fundamente sus conclusiones.

3. *Trayectorias* del **SNL**.
   a. Para todos los PE, analice si del MILin se pueden sacar conclusiones sobre el comportamiento local del SNL en torno a ellos. Fundamente rigurosamente su(s) respuesta(s).
   b. Cualitativo
      i. Determine los conjuntos de (intervalos de) valores del parámetro $D > 0$ para los cuales el comportamiento local del SNL es cualitativamente distinto.
      ii. Para cada uno de estos (intervalos de) valores, determine el tipo de retrato de fases (*RdF*) asociado a la aproximación lineal, y dibújelo cualitativamente (*plano modal*).
   c. Cuantitativo (hágalo para un solo PE, especifique su elección).
      i. Elija un intervalo particular y asigne en correspondencia un valor numérico a D > 0. Determine y dibuje en el *plano original* el *RdF* lineal asociado.
      ii. Dibuje TODAS las trayectorias correspondientes en el espacio de estados del SNL.

Problema 2.
La siguiente es la ecuación de Duffing, con el agregado de un término forzante.

$$\ddot{y}(t) + d\,\dot{y}(t) + [y^3(t) - y(t)] = g\,u(t) \quad , \qquad d > 0$$

Supondremos que la ecuación modela a un sistema físico, y que *u(t)* es una entrada de control.

1. Escriba el modelo en la forma de ecuaciones de estado (EE).

[1] Puede representar muchos tipos de sistemas. En Ingeniería Eléctrica es el modelo dinámico más simple de un generador sincrónico conectado a un sistema ideal ("barra de potencia infinita") a través de una línea de transmisión.

2. Calcule todos los PE del sistema libre ($u(t) \equiv 0$).
3. El origen del sistema libre es un PE inestable. Verifíquelo.
4. Considere ahora el sistema forzado ($u(t) \neq 0$) y diseñe un control por retroalimentación de estados tal que estabilice al origen. Utilice el método directo de Lyapunov.
5. Considere ahora el sistema a lazo cerrado (LC) con el control estabilizante que diseñó. Escriba las EE a LC.
   a. ¿Qué tipo de sistema es (lineal, alineal, libre, forzado, estacionario, ...)? Compárelo con el SNL original.
   b. ¿Cuáles son los PE de este sistema?
   c. ¿Es el origen simplemente Lyapunov estable o asintóticamente estable? ¿Cuál es el dominio de atracción del origen?

Problema 3.

1. Enuncie rigurosamente (en su forma local) el Teorema de Existencia y Unicidad (*Teorema de Picard*) para el siguiente problema de Cauchy:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t)$$
$$x(t_0) = x_0$$

2. Para el siguiente caso particular:

$$\dot{x} = x^2 + 1$$
$$x(0) = 0$$

determine el máximo intervalo de existencia predicho por el Teorema. Desarrolle detalladamente en términos de las hipótesis del Teorema.

3. Calcule la solución de la ecuación diferencial y compare su intervalo de existencia con el predicho por el teorema. ¿Conclusiones?

Problema 4.

Suponiendo demostrada la existencia de soluciones del problema de Cauchy genérico anterior, demuestre la unicidad.

Problema 5.

De un sistema lineal y estacionario de tercer orden que responde a $\dot{x}(t) = A\,x(t)$ se conocen las tres siguientes trayectorias:

$$\begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e^{-3t} \\ 2e^{-3t} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e^{-5t} \\ 2e^{-5t} \\ 2e^{-5t} \end{bmatrix}$$

1. Diga cuales son los autovalores de la matriz A.
2. Indique las direcciones invariantes bajo la dinámica del sistema.
3. Cuales son las condiciones iniciales de donde parte cada trayectoria.
4. Calcule la matriz de transición del sistema.
5. Calcule la matriz A.