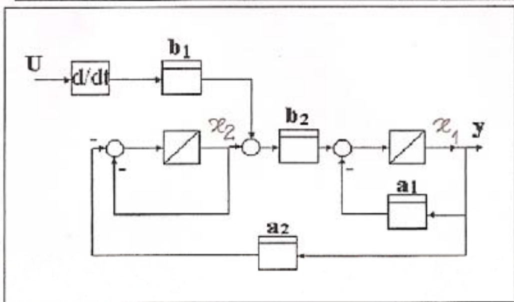
PROBLEMA 4: *DB – DB normalizado. $x_0 \leftrightarrow y_0$. Tipo de FT por inspección.*



a) Obtenga un DB sin derivadas de la entrada mediante álgebra de bloques. Además de eliminar el derivador, opere (siempre gráficamente!) para que en el DB final la entrada ataque, sin compartir caminos causales con otras señales, directamente delante del(os) integrador (es) correspondiente(es) y, si corresponde, de la salida. O sea, tal como se manifiesta en las EE/ES *genéricas* siguientes: $\dot{z} = f(z, u)$; $y = g(z, u)$.

b) A partir de las c.i. de los estados calcule las c.i. de la salida. Es decir: $\{z_{10}, \; z_{20}, \; \ldots, \; z_{n0}\} \rightarrow \{y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}\}$.

c) Por inspección del DB dado (o, si prefiere, del que obtuvo en §4a) obtenga:
   i. El mnemónico de la FT (pero no calcule la FT!)
   ii. La forma de la FT (por inspección, sin calcularla!) G(s) = N(s)/D(s), con los polinomios numerador y denominador de la forma

$N(s) = b_0 \pm b_1\, s \pm b_2\, s^2 \pm \ldots \pm b_{m-1}\, s^{m-1}$ y $D(s) = a_0 \pm a_1\, s \pm a_2\, s^2 \pm \ldots \pm a_{n-1}\, s^{n-1}$

Naturalmente, incluya sólo los coeficientes no nulos y precise el signo de cada término no nulo de la suma algebraica.

Fundamente todos sus resultados y todas sus respuestas. Use sólo los métodos pedidos, si usa otros métodos el problema será considerado como NR.

¡Recuerde que en los problemas de c.i. (valores en 0^-) la entrada es idénticamente nula para para $t < 0$!

SOLUCION

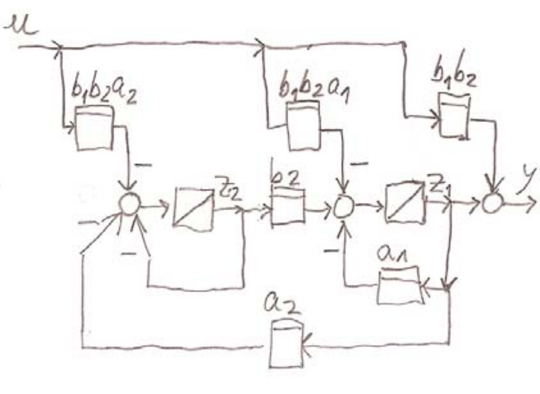
a) i) definimos los estados x_1 y x_2 según dibujo (DB)

ii) observamos q' la entrada se propaga hasta la salida y las entradas de los integradores $I_{1,2}$

$$u \rightarrow \frac{d}{dt} \rightarrow b_1 \rightarrow \Sigma \rightarrow b_2\, \Sigma \rightarrow \int \rightarrow x_1 \longrightarrow 1 \longrightarrow y$$
$$\hookrightarrow -a_1 \rightarrow I_1$$
$$\hookrightarrow -a_2 \rightarrow I_2$$

Esto equivale a 3 caminos causales independientes que atacan directamente a la salida y a la entrada de c/u de los integradores. Sus ganancias son:

$$\left.\begin{array}{l} u \longrightarrow b_1 b_2 \longrightarrow y \\ u \rightarrow -b_1 b_2 a_1 \rightarrow I_1 \\ u \rightarrow -b_1 b_2 a_2 \rightarrow I_2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$



Obs. 1: Lo anterior equivale a hacer álgebra de bloques por inspección directa.

Obs. 2: Recuerde que el AB produce cambios de variables en el DB. Por eso los estados en el DB resultante se denominaron $z_{1,2}$ en vez de $x_{1,2}$.—

b) Del DB sin derivadores se lee

$$\begin{cases} y = z_1 + b_1 b_2 u \\ \dot{y} = -a_1 z_1 + b_2 z_2 - b_1 b_2 a_1 u \end{cases}$$

$\Rightarrow$ las c.i. (en términos) de la salida:

$$(R)\begin{cases} \boxed{y_0} \triangleq y(0^-) = z_1(0^-) + b_1 b_2 u(0^-) = z_1(0^-) \triangleq \boxed{z_{10}} \\ \boxed{y'_0} \triangleq \dot{y}(0^-) = -a_1 z_1(0^-) + b_2 z_2(0^-) - b_1 b_2 a_1 u(0^-) \\ \qquad \boxed{\triangleq -a_1 z_{10} + b_2 z_{20}} \end{cases}$$

Obs. 3: como $u(t<0) \equiv 0$, el mismo resultado (R) (lo recuadrado) se obtiene del DB original para las c.i. x_{10} y x_{20}, i.e.:

$$(R')\begin{cases} y_0 = x_{10} \\ y'_0 = -a_1 x_{10} + b_2 x_{20} \end{cases}$$

c) FT x inspección

i) Mnemónico ; ii) polinomios D y N.-

- Mirando cualquiera de ambos DB's se ve que el sistema libre es asintóticamente estable (≡ Σ internamente (asintót.) estable), ya que los dos integradores están en una estructura ya analizada y conocida x tal propiedad (cascada de **2** integradores con ganancia positiva y todas las retroalimentaciones posibles presentes y negativas).-

Luego, donde quiera que ataque una entrada, y cualquiera que sea la salida → sistema externamente estable.-

Luego: denominador ≡ retardo de 2º orden

⇒ FT del tipo $*_{T_2}$

("T_2": polinomio de 2º grado completo sin cambio de signo)

$$G(s) = \frac{\tilde{N}(s)}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2} \qquad a_i > 0 \; ; \; i \in \{0,1,2\}$$

¿El numerador $\tilde{N}(s)$? El DB sin derivadores muestra:

∃ camino estáticos directo $u \to y$ $(r=0)$ ⇒ $\tilde{N}(s)$ tiene término cuadrático $\beta_2 s^2$.

$$\Rightarrow \quad G(s) = \frac{\cancel{N}(s) + \beta s^2}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2}$$

Siguiendo el criterio recomendado (en clase) planteamos la transferencia como una constante más una transf. estrictamente propia

$$G(s) = K_p + \frac{N(s)}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2} \quad ; \quad g^{\circ}(N(s)) \leq 1$$

4/8

con $K_p = b_1 b_2$

evidentemente (del DB s/deriv.)

$$Y(s) = b_1 b_2 \, U(s) + Z_1(s) \quad ; \quad Z_1(s) = \underbrace{\frac{N(s)}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2}}_{T(s)} U(s)$$

$T(s)$ es estrictamente propia. (e.p.)

$r_T = 1$; escalón en $u \Rightarrow$ discontinuidad de $\dot{z}_1$ en $t=0$ ($\dot{z}_1$ salta en origen)

$N(s)$ tiene término $-\gamma \cdot s$, negativo porque salto de $\dot{z}$ negativo (vale porque $r_T = 1$)

¿tiene término P?

Supongamos que no $\Leftrightarrow z_{1\infty} = 0$ (el de la izquierda)

propagando al 1er sumador vemos q/

$z_{2\infty} \overset{!}{<} 0 \Rightarrow b_2 z_{2\infty} < 0 \Rightarrow$ contradicción

en 2do sumador $(-b_1 b_2 a_1 + \text{negativo} \neq 0!)$

$\Rightarrow N(s)$ tiene P $\Rightarrow T(s)$ es PD_{T_2}

¿Cual es el signo de la parte P de $N(s)$?

(*) supongo signo positivo $\Rightarrow$ (lo veo en 1er sumador) $z_{2\infty} \overset{!}{<} 0 \Rightarrow$ contradicción en 2do sumador (la suma de 3 números negativos debe dar cero!)

$\Rightarrow$ signo negativo

$\therefore \quad N(s) = -\alpha - \gamma . s \Rightarrow T(s) = \dfrac{-\alpha - \beta s}{D(s)}$

$$T(s) = -\frac{\alpha + \beta s}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2}$$

$$\Rightarrow G(s) = K_p - \frac{\alpha + \beta s}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2}$$

(**) alternativamente, mirando el 1er DB: el d/dt convierte escalón en u en impulso a la entrada del sumador del medio.- Sistema a.e. $\Rightarrow$ respta. al impulso (en ese sumador) $b_1 \delta(t)$ se extingue asintóticamente $\Rightarrow G(s)$ no tiene parte P $\Rightarrow T(s)$ debe tener parte P exacta para cancelar $K_p \Rightarrow -\dfrac{\alpha}{a_0} = K_p = b_1 b_2$

PROBLEMA 5: ***EE/ES → EE/ES sin derivadas de la entrada. Estabilidad interna y externa.***

Dado un sistema EE/ES de la forma *genérica* $\dot{z} = f(z, u, \dot{u})$; $y = g(z, u)$ en este problema se trata de obtener uno equivalente sin derivadas de la entrada de la forma *genérica* $\dot{\omega} = h(\omega, u)$; $y = \gamma(\omega, u)$. Los símbolos $\dot{z}$ y $\dot{\omega}$ denotan las derivadas temporales de z y ω, respectivamente ¡En el problema concreto a resolver, un sistema EE/ES LyE, Ud. puede usar la notación que más apetezca!

1. Haga lo indicado anteriormente para el modelo siguiente:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-a_{11} & a_{12}\\ 0 & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}b\\ 0\end{bmatrix}\cdot\dot{u} \qquad y = \begin{bmatrix}c_1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

2. Sobre el modelo anterior analice y fundamente exhaustiva y precisamente:
   i. Estabilidad externa
   ii. Estabilidad interna
   iii. La relación entre ambas propiedades anteriores.

No se pidió ningún método en particular (aunque valoramos las soluciones + concisas)

Solución

1) $\dot{x}_1 = -a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + b\dot{u}$

$\dot{x}_1 - b\dot{u} = -a_{11} x_1 + a_{12} x_2$

Defino $z_1 := x_1 - bu \longleftrightarrow x_1 = z_1 + bu$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}\dot{z}_1 = -a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = -a_{11} z_1 - a_{11} b u + a_{12} x_2\\ \dot{x}_2 = a_{22} x_2\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix}\dot{z}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-a_{11} & a_{12}\\ 0 & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-a_{11}b\\ 0\end{bmatrix} u}$$

$y = c_1 x_1 = c_1 z_1 + c_1 b u$

$$\boxed{y = \begin{bmatrix}c_1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\ x_2\end{bmatrix} + c_1 b u}$$

2. Estabilidad

Matriz de evolución $A = \begin{bmatrix} -a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$

forma triangular $\Rightarrow \sigma(A) = \{-a_{11}, a_{22}\}$

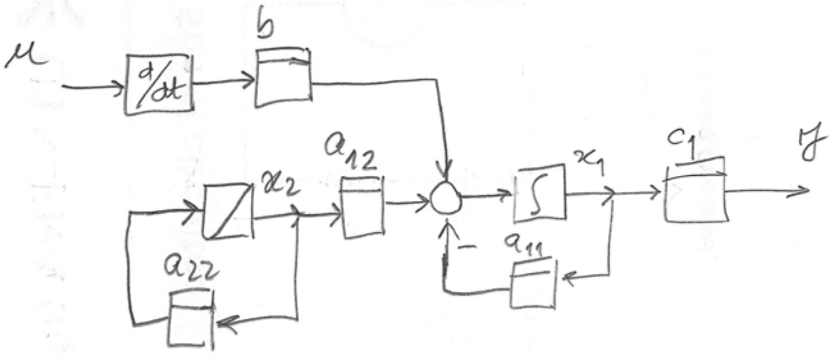
$\Rightarrow$ $\boxed{\text{inestable internamente}}$

Obs.: Como siempre aclaramos, los coeficientes son positivos ($a_{ij} > 0$). – (por otra parte, si así no fuera carecería de sentido escribir $-a_{11}$). –

¿Estabilidad externa? Concierne a la relación dinámica $u \to y$. – La dinámica la pone la mediatización del estado x en esa relación:

Como se ve en la ecuación de salida, el estado x_2 no incide directamente (estáticamente) en la salida. Por otra parte, en la EE matricial se ve que la entrada no incide sobre (la derivada) del estado x_2, ni directamente (estáticamente) ni indirectamente (dinámicamente) a través de x_1. Por lo tanto, el estado inestable autónomo x_2 no participa de la mediación por x de la relación $u \to y$ $\Rightarrow$ FT estable (y obviamente, de orden 1)

Lo antedicho se ve gráficamente en un DB (lo q' muchos hicieron en el parcial):



Otros hicieron el siguiente cálculo (más trabajoso) de la FT:

$$Y(s) = \underbrace{\left[c^T (sI-A)^{-1} b + d\right]}_{G(s)} U(s)$$

$$(sI-A)^{-1} = \frac{\mathrm{adj}^T (sI-A)}{\pi_A(s)} = \frac{\mathrm{adj}^T \begin{bmatrix} s+a_{11} & -a_{12} \\ 0 & s-a_{22} \end{bmatrix}}{s^2 - \underbrace{(-a_{11}+a_{22})}_{tr(A)} s \underbrace{- a_{11} a_{22}}_{det(A)}}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} s-a_{22} & a_{12} \\ 0 & s+a_{11} \end{bmatrix}}{(s+a_{11})(s-a_{22})}$$

regla deducida

no hay necesidad de cálculo; factorización sabida x forma triangular!

$$G(s) = \frac{[c_1 \mid 0] \begin{bmatrix} s-a_{22} & a_{12} \\ 0 & s+a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a_{11} b \\ 0 \end{bmatrix}}{(s+a_{11})(s-a_{22})} + c_1 b = \boxed{G(s) = = c_1 b - \frac{a_{11} b c_1}{(s+a_{11})}}$$

$$= \frac{[c_1 \mid 0] (-a_{11} b) \begin{bmatrix} s-a_{22} \\ 0 \end{bmatrix}}{(s+a_{11})(s-a_{22})} + c_1 b = \frac{-a_{11} b\, c_1 \cancel{(s-a_{22})}}{(s+a_{11}) \cancel{(s-a_{22})}} + c_1 b =$$