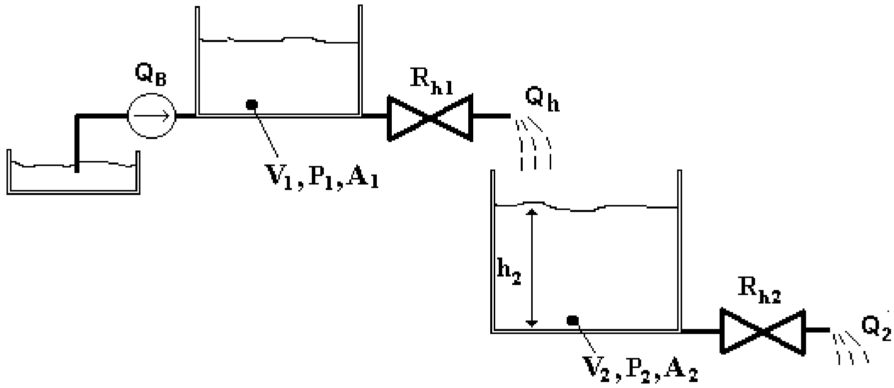
MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

Problema 1

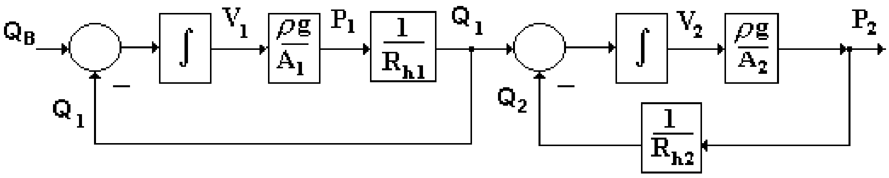
Considere el siguiente modelo de dos tanques



donde

V_i	volumen almacenado en el i-ésimo tanque
P_i	presión en el fondo del i-ésimo tanque
Ai	área tranversal del i-ésimo tanque
R_{hi}	resistencia hidráulica

Corresponden el siguiente DB



y las siguientes ecuaciones de estado

$$\dot{\mathbf{V}}_1 = -\frac{\rho\,\mathbf{g}}{\mathbf{A}_1\,\mathbf{R}_{\mathbf{h}1}}\mathbf{V}_1 + \mathbf{Q}_\mathbf{B}$$

$$\dot{\mathbf{V}}_2 = \frac{\rho\,\mathbf{g}}{\mathbf{A}_1\,\mathbf{R}_{\mathbf{h}1}}\mathbf{V}_1 - \frac{\rho\,\mathbf{g}}{\mathbf{A}_2\,\mathbf{R}_{\mathbf{h}2}}\mathbf{V}_2$$

que se pueden escribir como

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{\mathbf{V}}_1 &= -\frac{1}{\mathbf{T}_1}\mathbf{V}_1 + \mathbf{Q}_\mathbf{B}\\ \dot{\mathbf{V}}_2 &= \frac{1}{\mathbf{T}_1}\mathbf{V}_1 - \frac{1}{\mathbf{T}_2}\mathbf{V}_2\end{aligned}}$$

Concéntrese en las ecuaciones recuadradas!

a) Resuelva las EE para $\mathbf{Q_B} = \overline{\mathbf{Q}}_\mathbf{B} = \mathbf{const}$. y $\mathbf{V}_1(0) = \mathbf{V}_{10}$, $\mathbf{V}_2(0) = \mathbf{V}_{20}$

b) Calcule los valores (volúmenes almacenados) de equilibrio directamente de la ecuaciones de estado.

c) Calcule los valores de equilibrio como el límite de las soluciones $V_1(t)$ y $V_2(t)$ cuando $t \to \infty$ (deben ser iguales al resultado de b)!).

d) Calcule
   a. Las soluciones Q1(t) y P2(t) $\forall\ t \geq 0$
   b. Los valores de equilibrio $\overline{\mathbf{P}}_1 = \mathbf{P}_1(\mathbf{t} = \infty)$ y $\overline{\mathbf{Q}}_2 = \mathbf{Q}_2(\mathbf{t} = \infty)$
   Ayúdese con el DB.

e) Considere c.i. nulas. Calcule el tiempo que demora el tanque 1 en llenarse hasta la mitad del valor final.

Problema 2

a) Solución gral.

$$\ddot{x} - x = 0$$

b) condiciones iniciales

$$x\,\dot{y} = y + x\,\mathrm{sen}(x)$$

c) Solución gral.

$$\dot{y} = \frac{a\,x - b\,x\,y}{b\,x\,y - a\,y}$$

CONVERSIÓN Y CLASIFICACIÓN

Problema 3

Dada la siguiente EDO realice el DB equivalente

$$\ddot{y}(t) + (a_1 + a_2)\dot{y}(t) + (a_1 a_2 + a_3 a_4)y(t) = b\,a_4 \cdot u(t)$$

MÉTODOS NUMÉRICOS

Problema 4

Dada la EE

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \qquad (1)$$

La siguiente aproximación se conoce como Regla Trapezoidal **RTrap** de integración numérica de la EE (1):

$$x_{k+1} = x_k + \frac{h}{2} \cdot [f(x_k, u_k, t_k) + f(x_{k+1}, u_{k+1}, t_{k+1})] \qquad (2)$$

o también, brevemente:

$$x_{k+1} = x_k + \frac{h}{2} \cdot [f_k + f_{k+1}] \qquad (2)$$

¡Las tres primeras preguntas que siguen son de tipo teórico-conceptual. La cuarta es práctica, asegúrese de hacer esta última!

a) la RTrap se puede obtener combinando los métodos de Euler por avance EA y Euler por retardo ER. Escriba ambas aproximaciones EA y ER, y derive de ellas la RTrap.

b) ¿Qué tipo de algoritmo es RTrap, explícito o implícito? Fundamente.

c) Provea una representación gráfica que justifique el nombre Trapezoidal.

d) Estudie en detalle la estabilidad del método RTrap (en dependencia del paso h) para el caso particular

$$\dot{x}(t) = -a \cdot x(t) \quad , \quad a > 0 \qquad (3)$$

Nota: Estabilidad significa que $x(t) \to 0$ *para* $t \to \infty \Rightarrow x_k \to 0$ *para* $k \to \infty$

Problema 5
El siguiente es el método de Adams-Bashforth de 3[er] orden:

$$x_{k+1} = x_k + \frac{h}{12} \cdot [23 \cdot f(x_k, u_k, t_k) - 16 \cdot f(x_{k-1}, u_{k-1}, t_{k-1}) + 5 \cdot f(x_{k-2}, u_{k-2}, t_{k-2})] \qquad (4)$$

¡ Asegúrese de hacer la parte 2.b!

a) Clasifíquelo:
- multipaso/un paso
- predictor/corrector/predictor-corrector
- implícito/explícito/cuasi-implícito
- ....

b) Aplique el método (i.e., particularice el algoritmo (4)) al siguiente problema de Cauchy:

$\dot{x} = \varepsilon x - \sigma x^2$

$x(0) = x_0 =$ *número no nulo distinto del equilibrio*

para estos valores de lo coeficientes: $\varepsilon = 0.1$ *y* $\sigma = 0.01$, y calcule $x(h)$, $x(2h)$ y $x(3h)$; elija un valor numérico de h. Señale cualquier particularidad/dificultad que considere relevante y explique como la resuelve.