Solución General de la Ecuación de Estado

Código: A_SolGEE

A-702 Control I E-504 Dinámica de los Sistemas Físicos

RESUMEN

El apunte presenta un método matemático de resolución de la ecuación de estado. El método es un procedimiento iterativo convergente a la solución buscada que se basa en la formulación integral de la ecuación de estado.
El método general se aplica luego a sistemas lineales, de cuya solución se destacan las propiedades de la matriz de transición, para ambos casos: inestacionario y estacionario.
Para el caso lineal estacionario se establece la conexión con el modelo externo del sistema dado por la función o la matriz de transferencia.

Consideremos el modelo matemático (MM) de un $\Sigma\Phi\Delta$ determinístico:

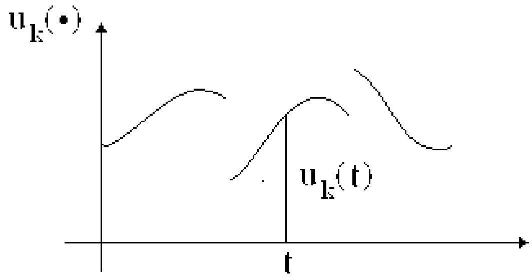
$$(1).\qquad \dot{x}(t) = f\left[x(t), u(t), t\right]$$

Donde $x(t)$ es el vector de estados, $u(t)$ es el vector de entradas y f es una función vectorial. Cuando el $\Sigma\Phi\Delta$, encontrándose en un determinado estado es excitado por un conjunto de magnitudes físicas a partir de un dado instante inicial t_0, se produce una evolución cierta y determinada de todas sus magnitudes físicas. El MM (1) debe reflejar esta circunstancia, que matemáticamente se traduce en la necesidad de que la solución $x_{[to,\, t]}$ debe existir y ser única para cada conjunto de condiciones iniciales $x(t_0) =: x_0$ y segmento de funciones de entrada $u_{[to,\, t]}$.

Teorema de existencia y unicidad (PICARD–LINDELÖF)

Para que haya solución única de (1) deben satisfacerse ciertas *hipótesis*, cuya generalidad se limitará aquí a lo estrictamente necesario para sistemas físicos de la técnica.
Siendo usual que las entradas tengan cambios bruscos, con valores limitados, admitiremos:

H1).- Entradas $u_k(\cdot)$ ($k \in \underline{\mathbf{m}}$, donde $\underline{\mathbf{m}} = \{1, 2, ..., m\}$); seccionalmente continuas y acotadas en $\mathbf{T} \subset \Re$.
$\mathbf{T}$: intervalo temporal de definición del problema y de validez del modelo.
Un conjunto de m funciones seccionalmente continuas o admisibles pertenece al espacio $\mathbf{U}$ de las funciones admisibles $u(\cdot) \in \mathbf{U}$[1].
Para cada $t \in \mathbf{T}$, $u(t) \in \mathbf{U} \subset \Re^m$.
$\mathbf{U}$: espacio de (los valores de las funciones de) entrada.
Estos eventuales saltos de las entradas pueden ocasionar que las funciones f_i, aún siendo continuas en su dependencia de u [o sea, vistas como $f_i(x, \cdot, t)$], no lo sean consideradas como funciones compuestas [es decir, vistas como $f_i(x, u(\cdot), t) = h_i[u(\cdot)] = z_i(\cdot)$].
Además de estos posibles saltos, debe tenerse en cuenta que tanto las RelaCs como las RelEsts pueden introducir directamente saltos en f_i, vistas en la dependencia $f_i(x, u, \cdot)$ (hecho que obedecería a discontinuidades en la variación temporal de los parámetros o de la estructura del sistema, respectivamente).
Considerando ambos hechos, incorporamos la hipótesis:



H2).- $f_i[x, u(\cdot), \cdot]$, ($i \in \underline{\mathbf{n}}$); seccionalmente continuas y acotadas en $\mathbf{T} \subset \Re$.
Las hipótesis H1).- y H2).-, a la vez que admiten peculiaridades técnicas, imponen restricciones matemáticamente necesarias para poder demostrar la existencia y unicidad de la solución de (1). En este sentido, a los efectos de poder demostrar la convergencia uniforme de una sucesión de funciones (es parte de la prueba, que no haremos), es necesaria la siguiente hipótesis:

H3).- f es lipschitziana respecto de x, es decir:

$$\exists\, L > 0 \,/\, \forall t \in \mathbf{T},\ \forall u(t) \in \mathbf{U} \equiv \Re^m,$$

$$\forall \text{ par } x^{(1)}, x^{(2)} \in \mathbf{X} \equiv \Re^n, \text{ vale}$$

$$\left\| f\left[x^{(1)}, u(t), t\right] - f\left[x^{(2)}, u(t), t\right] \right\| \le L \cdot \left\| x^{(1)} - x^{(2)} \right\|$$

Bajo estas tres hipótesis existe una solución única de (1). Es decir:

$$\exists\, \varphi(\cdot) \text{ tal que } \forall t_0, t \in \mathbf{T},\ \forall x_0 := x(t_0) \in \mathbf{X},\ \forall u_{[t0,\, t]} \in \mathbf{U},$$

$$\frac{d}{dt}\varphi(t) = f\left[\varphi(t), u(t), t\right]$$

Antes de esbozar el método del teorema, veamos algunos ejemplos sencillos, de primer orden, para ilustrar las hipótesis.

[1] $u(\cdot)$ indica la función u. $u(t)$ representa el valor de la función $u(\cdot)$ en el instante t.

Ejemplo 1:

Sea el MM lineal e inestacionario

$$(2).\quad \dot{x}(t) = \sigma(t - t_1)\, x(t) + u(t)$$

donde $\sigma(\cdot)$: escalón unitario.
Veamos la H2).-: ¿ es $f(x, \cdot, \cdot)$ seccionalmente continua y acotada?

$$f\left[x, u(t), t\right] = \sigma(t - t_1)\, x(t) + u(t)$$

Dado que la discontinuidad de σ en t_1 es acotada, si $u(t)$ satisface H1).-, entonces para todo valor finito x, la función $f(x, \cdot, \cdot)$ satisface H2).-.
¿Se satisface H3).-?

$$\left\| f\left[x^{(1)}, u(t), t\right] - f\left[x^{(2)}, u(t), t\right] \right\| = \left| \sigma(t - t_1)x^{(1)} + u(t) - \sigma(t - t_1)x^{(2)} - u(t) \right|$$

$$\|..\| = \left|\sigma(t - t_1)x^{(1)} - \sigma(t - t_1)x^{(2)}\right| = \sigma(t - t_1)\left| x^{(1)} - x^{(2)}\right|$$

Debemos ver si existe $L > 0$ constante de Lipschitz. Vemos que cualquier $L \geq 1$ satisface la condición:

$$\|..\| = \sigma(t - t_1) \cdot \left| x^{(1)} - x^{(2)}\right| \leq L \cdot \left| x^{(1)} - x^{(2)}\right|$$

por lo que la H3).- es efectivamente satisfecha.
¿Es f lipschitziana respecto de t? ¿Cómo afecta esto la validez del teorema de Picard?

Ejemplo 2:

$$(3).\quad \dot{x}(t) = -x(t) + \sigma(t - t_1)\ ,\ t_1 > 0$$

H1).-: Satisfecha, ya que $\sigma(t - t_1)$ es seccionalmente continua y acotada.
H2).-: $f[x, u(\cdot), \cdot] = -x + \sigma(\cdot - t_1)$ tiene una discontinuidad en t_1, que es acotada en el sentido de existencia de los límites

$$\lim_{t \to t_1^+} f\left[x, u(\cdot), \cdot\right] = -x + 1 \text{ y}$$

$$\lim_{t \to t_1^-} f\left[x, u(\cdot), \cdot\right] = -x \quad \forall\, x \text{ finito.}$$

H3).-: Satisfecha, ya que cualquier $L > 1$ satisface la condición de Lipschitz.

Cálculo de la solución $\varphi(\cdot)$

El método de Picard–Lindelöf prescribe un procedimiento iterativo convergente a la solución, vale decir que es un método constructivo de prueba de la existencia.
El método explota la formulación integral de (1):

$$(4).\quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\left[x(\tau), u(\tau), \tau\right] d\tau$$

para formar la sucesión de funciones (vectoriales) $\varphi_k(t)$, $k \in$. definidas recursivamente:

$$(5).\quad \varphi_k(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f\left[\varphi_{k-1}(\tau), u(\tau), \tau\right] d\tau$$

la cual, bajo las hipótesis H1).-, H2).- y H3).-, converge a una $\varphi(t)$ solución de (1). Es decir:

$$(6).\quad \varphi(t) = \lim_{k \to \infty} \varphi_k$$

Como se desprende de (5), el cálculo de $\varphi_1(t)$ demanda conocer $\varphi_0(t)$, que da el punto de partida de la iteración de (5). Cualquier $\varphi_0(\cdot)$ continua en $\mathbf{T}$, que pase por x_0, es decir que satisfaga $\varphi_0(t_0) = x_0$, es adecuada. La elección más sencilla es la constante $\varphi_0(\cdot) = x_0$.
El teorema se demuestra considerando valores fijos (o sea, *para cada*) x_0, t_0, t y $u_{[to,\ t]}$ (*señal* fija en este último caso), aunque con validez *para todo* $x_0 \in \mathbf{X}$, t_0, $t \in \mathbf{T}$ y $u_{[to,\ t]} \in \mathbf{U}$. Por ello (y haciendo abuso de notación), la solución (6) puede reescribirse:

$$(7).\quad x(t)=\varphi\{t, t_0, x_0, u_{[t_0,t]}\}$$

con recurso a la aplicación:

$$(8).\quad \varphi: \mathbf{T}\times\mathbf{T}\times\mathbf{X}\times\mathbf{U}$$

que nosotros designaremos φ: *funcional de transición* y que está unívocamente determinado por la función f(x, u, t) que define el modelo (1).

Propiedades del funcional de transición φ

1- φ determina el estado x que el sistema (1) toma en el tiempo t, forzado por el conjunto de entradas $u(\cdot)$ (actuantes durante $[t_0, t]$) desde un estado inicial x_0 asumido en t_0.
Está definida $\forall\ t \ge t_0$, pero no incondicionalmente $\forall\ t < t_0$ ($t, t_0 \in \mathbf{T}$).

2- "no hay efecto instantáneo (de las entradas)" o "consistencia"

$$\forall\ t\in\mathbf{T},\ \forall\ x\in\mathbf{X},\ \forall\ u(\cdot)\in\mathbf{U}$$

$$(9).\quad \varphi[t, t, x(t), u(\cdot)] = x(t)$$

(recuérdese que *para el tratamiento general* no hemos admitido el impulso o delta de Dirac como entrada).

3- "causalidad":

para $x(-\infty) = 0$ y $u_{(-\infty,t]} = \tilde{u}_{(-\infty,t]}$, $\forall\ u(\cdot)$, $\tilde{u}(\cdot) \in \mathbf{U}$ tales que $u_{[t0,t]} = \tilde{u}_{[t0,t]}$

$$(10).\quad \varphi\{t, t_0, x_0, u_{[t_0,t]}\} = \varphi\{t, t_0, x_0, \tilde{u}_{[t_0,t]}\}$$

4- "composición" (Markov)

$$\forall\ t_0 \le t_1 \le t_2,\ t_0;\ t_1,\ t_2 \in \mathbf{T}$$

$$(11).\quad \varphi\{t_2, t_0, x(t_0), u_{[t_0,t_2]}\} = \varphi\{t_2, t_1, \varphi[t_1, t_0, x(t_0), u_{[t_0,t_1]}], u_{[t_1,t_2]}\}$$

Ejemplo 3:

Veamos la construcción de la solución sobre el MM de (3) (ver ejemplo 2):
Ya vimos que se satisfacen las hipótesis H1).-, H2).- y H3).-.
Elijamos

$$\varphi_0(\cdot) = x_0$$

y construyamos:

$$\varphi_1(t) = x_0 + \int_0^t [-x_0 + \sigma(\tau - t_1)]\cdot d\tau = x_0 + \int_0^t -x_0\cdot d\tau + \int_0^t \sigma(\tau - t_1)\cdot d\tau = x_0 - x_0\cdot t + \int_{t_1}^t \sigma(\tau - t_1)\cdot d\tau$$
$$\varphi_1(t) = x_0\cdot(1-t) + (t-t_1)\cdot\sigma(t-t_1)$$

y

$$\varphi_2(t) = x_0 + \int_0^t [-x_0\cdot(1-\tau) - (\tau - t_1)\cdot\sigma(\tau-t_1) + \sigma(\tau-t_1)]\cdot d\tau$$
$$\varphi_2(t) = x_0\cdot\left(1 - t + \frac{1}{2}t^2\right) + \left[(t-t_1) - \frac{1}{2}(t-t_1)^2\right]\cdot\sigma(t-t_1)$$

operando sucesivamente se llega a

$$\varphi_k(t) = x_0\cdot\left(1 - t + \frac{1}{2!}t^2 - \frac{1}{3!}t^3 + \ldots + \frac{1}{k!}(-t)^k\right) + \left\{(t-t_1) - \frac{1}{2!}(t-t_1)^2 + \ldots - \frac{1}{k!}[-(t-t_1)]^k\right\}\cdot\sigma(t-t_1)$$

por lo tanto

$$(12).\quad \varphi(t)=\lim_{k\to\infty}\varphi_k(t)=x_0\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}(-t)^i-\left\{\left[\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\left(-[t-t_1]\right)^i\right]-1+1\right\}\cdot\sigma(t-t_1)$$
$$\varphi(t)=x_0\cdot e^{-t}+\left[1-e^{-(t-t_1)}\right]\cdot\sigma(t-t_1)$$

Eligiendo un par de valores t_0, x_0, podemos ilustrar gráficamente la convergencia de las funciones $\varphi_k(\cdot)$, elementos de la sucesión.

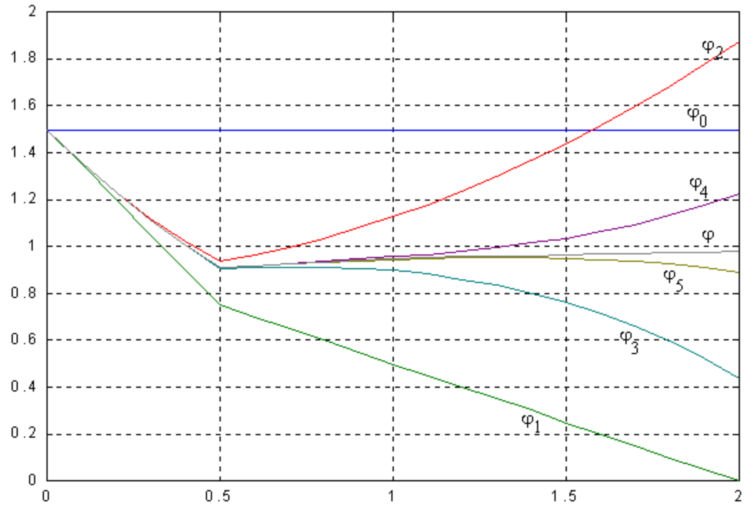


Figura 1

Observación:
El ejemplo 3 se pudo resolver analíticamente con facilidad porque (3) pertenece a una clase particular de los MM contemplados en (1). En efecto, (3) describe a un sistema unidimensional lineal y estacionario. Aquí se lo usó deliberadamente porque permite ilustrar sin mayor trabajo de cálculo de qué objetos matemáticos hablamos en el teorema.
Para poder hacer precisiones mayores sobre la solución $\varphi(\cdot)$ que las dadas por (5), (6) y **¡Error!No se encuentra el origen de la referencia.** es necesario tener más información sobre $f(\cdot,\cdot,\cdot)$ Una clase muy importante que abordamos a continuación es la de los sistemas lineales.

Sistemas lineales:

El MM (1) puede escribirse como

$$(13).\quad \dot{x}(t)=A(t)\cdot x(t)+B(t)\cdot u(t)$$

Se garantiza la aplicabilidad del teorema si valen las hipótesis H1).-, H2).- y H3).-. Para ello los elementos de las matrices, $a_{ij}(t)$ y $b_{ij}(t)$ deben ser seccionalmente continuos y acotados. Veamos H3).-:

$$\left\|f\left(x^{(1)},u,t\right)-f\left(x^{(2)},u,t\right)\right\|=\left\|A(t)\cdot\left(x^{(1)}-x^{(2)}\right)\right\|\le\|A(t)\|\cdot\left\|x^{(1)}-x^{(2)}\right\|\le L\cdot\left\|x^{(1)}-x^{(2)}\right\|$$, si elegimos $L\ge\max_t\|A(t)\|$.

Al analizar la solución conviene tener en cuenta el *principio de superposición* y estudiar en primer lugar la respuesta del sistema libre a partir de una condición inicial, sin que esté aplicada entrada alguna, es decir, con $u(\cdot)=0$. Luego se determina la respuesta a una entrada genérica suponiendo c.i. nulas, para finalmente expresar la solución total como suma de ambas.

Solución de la ecuación homogénea asociada:

$$(14).\quad \begin{aligned}&\dot{x}(t)=A(t)\cdot x(t)\\&x(t_0)=x_0\end{aligned}$$

Aplicando (5) construímos la sucesión a partir de $\varphi_0(\cdot)=x_0$:

$$\varphi_1(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}A(\tau)\cdot\varphi_0(\tau)\cdot d\tau=x_0+\int_{t_0}^{t}A(\tau)\cdot x_0\cdot d\tau=x_0+\int_{t_0}^{t}A(\tau)\cdot d\tau\cdot x_0$$

$$\varphi_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(\tau)\cdot \varphi_1(\tau)\cdot d\tau = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(\tau)\cdot \left[x_0 + \int_{t_0}^{\tau} A(\tau_1)\cdot d\tau_1 \cdot x_0 \right]\cdot d\tau$$

$$\varphi_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(\tau)\cdot d\tau \cdot x_0 + \int_{t_0}^{t} A(\tau)\cdot \int_{t_0}^{\tau} A(\tau_1)\cdot d\tau_1 \cdot d\tau \cdot x_0$$

$$\varphi_2(t) = \left[I + \int_{t_0}^{t} A(\tau)\cdot d\tau + \int_{t_0}^{t} A(\tau)\cdot \int_{t_0}^{\tau} A(\tau_1)\cdot d\tau_1 \cdot d\tau \right]\cdot x_0$$

Operando sucesivamente:

$$\varphi_k(t) = \left[I + \int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t} A(\tau)\int_{t_0}^{\tau} A(\tau_1)d\tau_1 d\tau + \ldots + \int_{t_0}^{t} A(\tau)\int_{t_0}^{\tau} A(\tau_1)\int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_2)\cdots\int_{t_0}^{\tau_{k-2}} A(\tau_{k-1})\cdot d\tau_{k-1}\cdots d\tau_1 d\tau \right]\cdot x_0 \,,$$

donde I es la matriz unidad $n \times n$ y la expresión entre corchetes, al igual que cada uno de sus sumandos, es una matriz $n \times n$. A la expresión entre corchetes la notamos:

$$(15).\quad \phi_k(t, t_0) = \left[I + \int_{t_0}^{t} A(\tau)\cdot d\tau + \ldots + \int_{t_0}^{t} \cdots d\tau \right]$$

Con lo que

$$(16).\quad \varphi_k(t) = \phi_k(t, t_0)\cdot x_0$$

La solución de (14) es

$$\varphi(t) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k(t) = \lim_{k\to\infty} \phi_k(t, t_0)\cdot x_0 = \left[\lim_{k\to\infty} \phi_k(t, t_0) \right]\cdot x_0$$

que, con la notación

$$(17).\quad \phi(t, t_0) = \lim_{k\to\infty} \phi_k(t, t_0)\,,$$

puede reescribirse

$$(18).\quad \varphi(t) = \phi(t, t_0)\cdot x_0$$

En este caso, como no hay entrada, el *funcional de transición* es una aplicación φ: $\mathbf{T} \times \mathbf{T} \times \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ que produce la solución $x(t) = \varphi(t, t_0, x_0)$ bajo la forma especial (18), en la cual $\phi(t, t_0)$ es una matriz $n \times n$ (para cada par t, t_0) denominada *matriz de transición*.
(18) admite una importante lectura, válida para la clase particular que (14) representa del conjunto de sistemas (1). En los sistemas lineales autónomos el funcional de transición puede separarse en una matriz (que es a su vez un funcional) dependiente exclusivamente del valor de los parámetros del modelo en el intervalo $[t_0, t]$, y en la condición inicial x_0, a la cual la matriz premultiplica y del cual es completamente independiente.
Otra *forma de definir matriz de transición* (reescribir (17)):

$$(19).\quad \phi(t, t_0) = I + \int_{t_0}^{t} A(\tau)\cdot d\tau + \int_{t_0}^{t} A(\tau)\int_{t_0}^{\tau} A(\tau_1)\cdot d\tau_1 \cdot d\tau + \ldots$$

Visto como funcional, $\phi(t, t_0)$ es una aplicación ϕ: $\mathbf{T} \times \mathbf{T} \to \Re^{n \times n}$.
Esta es una visión desde la óptica de su definición matemática. A nosotros nos interesa esencialmente una visión dinámica, sistémica de la matriz de transición. Desde esta óptica es una aplicación lineal (matriz o transformación) que operando sobre un vector $x_0 \in \mathbf{X}$ produce otro vector $x \in \mathbf{X}$: ϕ: $\mathbf{X} \to \mathbf{X}$, o bien:

$$(20).\quad x_0 \to x = \phi(t, t_0)\cdot x_0.$$

Conocer la matriz de transición en el intervalo $\mathbf{T}$ es equivalente a conocer el sistema (14), pues dado el par (t_0, x_0) es posible predecir el par $(t, x(t))$ a través de (20).
En otras palabras, es posible construír la trayectoria del sistema en el espacio de estado calculando instante a instante $x_j = x(t_j)$ con la expresión $x(t_j) = \phi(t_j, t_i)\cdot x_i(t_i)$, $\forall\, t_i, t_j \in \mathbf{T}$, con el dato $x_i = x(t_i) \in \mathbf{X}$.

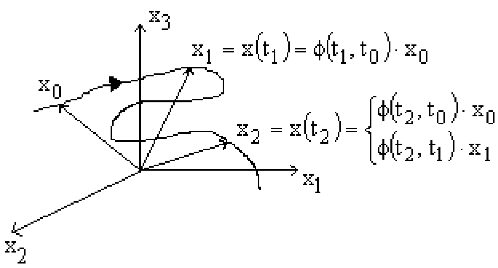


Figura 2

Figura 2: Una trayectoria en el espacio de estado. El tiempo discurre positivamente en el sentido indicado por la flecha sobre la trayectoria. (O sea que $t_2 > t_1 > t_0$).

El hecho de que en los sistemas dinámicos lineales autónomos el nuevo estado resulte de la aplicación de un operador lineal sobre el estado anterior es de importancia fundamental para el análisis de las propiedades generales de esta clase de sistemas, ya que lo remite a la interpretación sistémica de las propiedades –rica y profundamente estudiadas en la teoría matemática– de los operadores lineales. También en la faz computacional es muy importante, dado el desarrollo avanzado de los métodos numéricos y de la algorítmica para el álgebra lineal, que cuentan con un amplio apoyo de software profesional implementado para sistemas que incluyen computadoras personales, además de los equipos mayores.

Propiedades de la matriz de transición:

1- $\phi(t, t_0)$ satisface la ecuación de estado (14):

$$(21).\quad \frac{\partial}{\partial t}\phi(t, t_0) = A(t) \cdot \phi(t, t_0)$$

con la condición inicial

$$(22).\quad \phi(t_0, t_0) = I = \mathrm{diag}(1, 1, ..., 1)$$

Ejercicio:
Demuestre (21) recurriendo a la definición (17) o (19)
Demuestre (22), o la expresión más general

$$\phi(t, t) = I$$

e interprétela sistémicamente.

2- El determinante de la matriz de transición

$$(23).\quad |\phi(t, t_0)| = e^{\int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}A(\tau)d\tau}$$

donde $\mathrm{tr}A(\tau) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(\tau)$ es la traza de $A(\tau)$.

La siguiente EDO es equivalente a (23)

$$(24).\quad \frac{\partial}{\partial t}|\phi(t, t_0)| = \mathrm{tr}A(t) \cdot |\phi(t, t_0)|$$

Su condición inicial es:

$$(25).\quad |\phi(t_0, t_0)| = 1$$

3- $\phi(t, t_0)$ es regular $\forall\ t, t_0 \in \mathbf{T}$, o equivalentemente, $\exists\ \phi^{-1}(t, t_0)\ \forall\ t, t_0 \in \mathbf{T}$, o también $|\phi(t, t_0)| \neq 0\ \ \forall\ t, t_0 \in \mathbf{T}$.

4- Esta propiedad se corresponde con la propiedad de composición del funcional de transición, siendo inmediatamente deducible de la figura anterior:

$$(26).\quad \phi(t_2, t_0) = \phi(t_2, t_1) \cdot \phi(t_1, t_0)$$

5- .

$$\text{(27).}\quad \phi(t_1, t_2) \cdot \phi(t_2, t_1) = \phi(t_1, t_1) = I$$

Esto es demostrable sobre la trayectoria correspondiente a cualquier $x_1 = x(t_1) \in \mathbf{X}$, que lleve a $x_2 = x(t_2)$. Si $t_2 > t_1$, $\phi(t_1, t_2)$ debe interpretarse como una transición hacia el pasado (ver los extremos de integración en (19)).

6- .

$$\text{(28).}\quad \phi^{-1}(t, t_0) = \phi(t_0, t)$$

Lo cual provee un medio facilísimo de hallar la inversa de esta matriz.

7- Definimos $M(t)$, matriz $n \times n$, es una *matriz fundamental* del modelo (14) ⇔

(29). $\dot{M}(t) = A(t) \cdot M(t)$ con la condición inicial $M(t_0) = K$ con K matriz regular arbitraria.

¿Cómo puede obtenerse una matriz fundamental? Imaginemos n simulaciones del modelo (14) a partir de sendas c.i.l.i. $x_0^{(i)} = x^{(i)}(t_0)$, $i \in$ **n**. Resultarán n soluciones $x^{(i)}(t)$, agrupables en una matriz $X(t)$. Es fácil ver que tal matriz satisface (14); es decir, vale

$$\dot{X}(t) = A(t) \cdot X(t)$$

con la condición inicial

$$X(t_0) = \left[x_0^{(1)} \vdots \; \cdots \; \vdots x_0^{(n)}\right]$$

Luego, de acuerdo a la definición, $X(t)$ es una matriz fundamental, siendo $K = \left[x_0^{(1)} \vdots \cdots \vdots x_0^{(n)}\right]$. A partir de cualquier matriz fundamental puede obtenerse la matriz de transición de la siguiente manera:

$$\text{(30).}\quad \phi(t, t_0) = M(t) \cdot M^{-1}(t_0)$$

(Verifíquelo a partir de (29) y de (21))
Esta propiedad (30) nos da una forma directa de hallar experimentalmente (directamente sobre el sistema[2] o por simulación) la matriz de transición.

8- Consideremos las matrices $A(t)$ y su integral $\int_{t_0}^{t} A(\tau) \cdot d\tau$. Si su producto es conmutativo, es decir, si vale

$$\text{(31).}\quad A(t) \cdot \int_{t_0}^{t} A(\tau) \cdot d\tau = \int_{t_0}^{t} A(\tau) \cdot d\tau \cdot A(t)$$

entonces

$$\text{(32).}\quad \phi(t, t_0) = I + \int_{t_0}^{t} A(\tau) \cdot d\tau + \frac{1}{2!}\left[\int_{t_0}^{t} A(\tau) \cdot d\tau\right]^2 + \ldots$$

(demuéstrelo a partir de (19) y (31)).
Dada la analogía <u>formal</u> de (32) con la expresión $e^{\alpha} = 1 + \alpha + \frac{1}{2!}\alpha^2 + \frac{1}{3!}\alpha^3 + \ldots$, con $\alpha \in \Re$, adoptamos como notación

$$\text{(33).}\quad e^{\int_{t_0}^{t} A(\tau) \cdot d\tau} = I + \int_{t_0}^{t} A(\tau) \cdot d\tau + \frac{1}{2!}\left[\int_{t_0}^{t} A(\tau) \cdot d\tau\right]^2 + \ldots$$

con lo que

$$\text{(34).}\quad \phi(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} A(\tau) \cdot d\tau}$$

La condición (31) se satisface, entre otros, en los siguientes casos:

- $A(t)$ diagonal.

[2] Sólo es posible en el caso de A constante o, a lo sumo, e idealmente, periódica.

- $A(t) = A$, constante o estacionaria.
- $A(t) = a(t) \cdot K$, K constante, $a(t)$ función escalar.

Ejemplo

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1+t & 0 \end{bmatrix} \cdot x(t)$$

Hallemos la solución dada la c.i. genérica $x_0 = [x_{01}, x_{02}]^T$ (verifique previamente la aplicabilidad del método P.L.)

$$x(t) = \phi(t, t_0) \cdot x_0$$

$$\phi(t,t_0) = I + \int_{t_0}^{t} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1+\tau & 0 \end{bmatrix} \cdot d\tau + \int_{t_0}^{t} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1+\tau & 0 \end{bmatrix} \cdot \int_{t_0}^{\tau} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1+\tau_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot d\tau_1 \cdot d\tau + \ldots$$

Simplificamos el cálculo observando que $A(t) = (1+t) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, con lo cual

$$\phi(t,t_0) = I + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \int_{t_0}^{t} (1+\tau) \cdot d\tau + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2}_{=0} \cdot \int_{t_0}^{t} (1+\tau) \cdot \int_{t_0}^{\tau} (1+\tau_1) \cdot d\tau_1 \cdot d\tau + 0 + 0 + \ldots \;\therefore$$

$$\phi(t,t_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t - t_0 + \frac{1}{2}\left(t^2 - t_0^2\right) & 1 \end{bmatrix} \text{ y } x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{01} \\ \left\{t - t_0 + \frac{1}{2}\left(t^2 - t_0^2\right)\right\} \cdot x_{01} + x_{02} \end{bmatrix}.$$

Grafique la evolución temporal de ambas variables de estado.

Ejercicio

De un sistema se conocen las dos trayectorias siguientes, a partir de sendas c.i.:

$$x_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ t - t_0 + \frac{1}{2}\left(t^2 - t_0^2\right) \end{bmatrix};\; x_0^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + t - t_0 + \frac{1}{2}\left(t^2 - t_0^2\right) \end{bmatrix}.$$

Halle la evolución del estado a partir de una c.i. arbitraria $x(t_0) = [x_{01}, x_{02}]^T$.

Solución de la ecuación no homogénea

Dado el modelo (13) y supuesta conocida la solución (18) de la homogénea (14), el método de variación de las constantes propone conformar la solución de (13) según

$$(35).\quad x(t) = \phi(t, t_0) \cdot z(t)$$

donde se ha reemplazado $x(t_0)$ formalmente por una $z(t)$ a determinar, tal que $x(t)$ según (35) satisfaga (13). Veamos a qué conduce llevar (35) $\rightarrow$ (13).

$$\dot{x}(t) = A(t) \cdot x(t) + B(t) \cdot u(t)$$

$$\dot{\phi}(t,t_0) \cdot z(t) + \phi(t,t_0) \cdot \dot{z}(t) = A(t) \cdot \phi(t,t_0) \cdot z(t) + B(t) \cdot u(t)$$

$$\left[\dot{\phi}(t,t_0) - A(t) \cdot \phi(t,t_0)\right] \cdot z(t) + \phi(t,t_0) \cdot \dot{z}(t) = B(t) \cdot u(t)$$

Según (21), $\left[\dot{\phi}(t,t_0) - A(t) \cdot \phi(t,t_0)\right] = 0$, luego $\phi(t,t_0) \cdot \dot{z}(t) = B(t) \cdot u(t) \Rightarrow \dot{z}(t) = \phi^{-1}(t,t_0) \cdot B(t) \cdot u(t)$. Entonces, de acuerdo a (28), $\dot{z}(t) = \phi(t_0,t) \cdot B(t) \cdot u(t)$, ecuación diferencial que tiene por c.i. $z(t_0) = x(t_0)$ y por solución a $z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^{t} \phi(t_0,\tau) \cdot B(\tau) \cdot u(\tau) \cdot d\tau$, resultado que llevado a (35) arroja $x(t) = \phi(t,t_0) \cdot x(t_0) + \phi(t,t_0) \cdot \int_{t_0}^{t} \phi(t_0,\tau) \cdot B(\tau) \cdot u(\tau) \cdot d\tau$. Finalmente:

$$\text{(36).}\quad x(t)=\phi(t,t_0)\cdot x(t_0)+\int_{t_0}^{t}\phi(t,\tau)\cdot B(\tau)\cdot u(\tau)\cdot d\tau$$

La solución (36) muestra en forma explícita la superposición lineal de efectos: el primer "efecto" o sumando es causado por la c.i. y es exactamente igual al que tendría el sistema libre. El segundo efecto es producto de la entrada $u(t)$ actuando en el intervalo $[t_0, t]$, es decir, de $u_{[t0, t]}$. (36) no es más que la expresión detallada en sus dos términos del funcional de transición **¡Error!No se encuentra el origen de la referencia.**:

$$\text{(37).}\quad \varphi\left(t,t_0,x(t_0),u_{[t_0,t]}\right)=\varphi\left(t,t_0,x(t_0),0_{[t_0,t]}\right)+\varphi\left(t,t_0,0,u_{[t_0,t]}\right)$$

<u>Ejemplo:</u>

Hallemos la respuesta del modelo $\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1+t & 0\end{bmatrix}\cdot x(t)+\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\cdot u(t)$ cuando, a partir de la condición inicial $x(0)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, es excitado por la siguiente entrada:

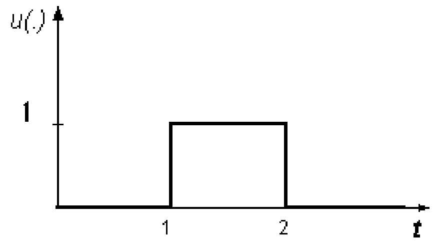


Figura 3

La forma de la entrada nos lleva a distinguir tres zonas: $t\in\begin{cases}[0,1]\\ [1,2]\\ [2,\infty)\end{cases}$.

Resolvemos aplicando la propiedad 4 del funcional de transición o "de composición":

$$\varphi\left(t,t_k,x_k,u_{[t_k,t]}\right)=\varphi\left(t,t_j,\varphi\left(t_j,t_k,x_k,u_{[t_k,t_j]}\right),u_{[t_j,t]}\right)$$

De acuerdo a ella es $x(t)=\begin{cases}\phi(t,0)\cdot x(0)\mapsto t\in[0,1]\\ \left[\begin{array}{l}\phi(t,1)\cdot x(1)+\int_1^t\phi(t,\tau)\cdot\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\cdot d\tau,\text{que en este caso }\left(u_{[0,1]}\equiv 0\right)\text{es equivalente a}\\ \phi(t,0)\cdot x(0)+\int_1^t\phi(t,\tau)\cdot\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\cdot d\tau\mapsto t\in[1,2]\end{array}\right.\\ \phi(t,2)\cdot x(2)\mapsto t\in[2,\infty)\end{cases}$.

Para resolver el problema necesitamos determinar $\phi(t,0)$, $\phi(t,2)$, $x(2)$ y la integral. De un ejemplo anterior tenemos $\phi(t, t_0)$, luego

$$\phi(t,0)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ t+\frac{1}{2}t^2 & 1\end{bmatrix}$$

$$\phi(t,2)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ t+\frac{1}{2}t^2-4 & 1\end{bmatrix}$$

$$\phi(t,\tau)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ t-\tau+\frac{1}{2}\left(t^2-\tau^2\right) & 1\end{bmatrix}$$

$$\int_1^t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t-\tau+\frac{1}{2}\left(t^2-\tau^2\right) & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot d\tau = \ldots = \begin{bmatrix} t-1 \\ \frac{t^3}{3}+t-\frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

$$x(2) = \phi(2,0) \cdot x(0) + \int_1^2 \ldots d\tau = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 10/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 22/3 \end{bmatrix}$$

Lo que da la solución:

$$x(t) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 \\ t+t^2/2 \end{bmatrix} \mapsto t \in [0,1] \\ \begin{bmatrix} t \\ t^3/3+t^2/2+2t-4/3 \end{bmatrix} \mapsto t \in [1,2] \\ \begin{bmatrix} 2 \\ t^2+2t-2/3 \end{bmatrix} \mapsto t \in [2,\infty) \end{cases}$$

<u>Sistemas lineales estacionarios:</u>

Corresponden al modelo con matrices constantes

(38). $\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t)$

(39). $y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t)$

$x(t_0) = x_0$

Como A satisface (31), vale la propiedad 8 de la matriz de transición:

(40). $\phi(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} A(\tau) \cdot d\tau} = e^{A \cdot \int_{t_0}^{t} d\tau} = e^{A\cdot(t-t_0)} = \phi(t-t_0)$

Esta importantísima propiedad de la matriz de transición refleja la estacionariedad o independencia temporal de los parámetros del sistema: la matriz de transición no depende de ambos y cada uno de los instantes extremos de la transición, sino tan solo de la duración de la misma o longitud del intervalo $[t_0, t]$. De otra forma: depende de la longitud y no de la región del eje temporal en que tiene lugar la transición.

(41). $\phi(t-t_0) = e^{A\cdot(t-t_0)} = I + A \cdot (t-t_0) + \frac{1}{2!} A^2 \cdot (t-t_0)^2 + \ldots$

En este caso, la notación puede simplificarse redefiniendo el origen del tiempo ubicándolo en t_0 ($t_0 = 0$):

(42). $\phi(t-0) = \phi(t) = I + A + \frac{1}{2!} A^2 \cdot t^2 + \ldots$

Algunas propiedades ya vistas pueden escribirse en forma particular:

- ✶ $\phi(0) = I$
- ✶ $\phi(t_2 - t_1) \cdot \phi(t_1 - t_0) = \phi(t_2 - t_0)$ ó $\phi(\Delta t_2) \cdot \phi(\Delta t_1) = \phi(\Delta t_1 + \Delta t_2)$
- ✶ $\phi^{-1}(t) = \phi(-t)$

La solución (36) toma aquí la siguiente forma:

(43). $x(t) = e^{A\cdot t} \cdot x_0 + \int_0^t e^{A\cdot(t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau) \cdot d\tau$ ó

(44). o $x(t) = \phi(t) \cdot x_0 + \int_0^t \phi(t-\tau) \cdot B \cdot u(\tau) \cdot d\tau$

Expresión que llevada a la ecuación de salida (39) arroja

(45). $y(t) = C \cdot \phi(t) \cdot x_0 + C \cdot \int_0^t \phi(t-\tau) \cdot B \cdot u(\tau) \cdot d\tau + D \cdot u(t)$

La integral del segundo sumando es el producto de convolución $\phi(t) \star B \cdot u(t)$, por lo que podemos escribir

(46). $y(t) = C \cdot \phi(t) \cdot x_0 + C \cdot [\phi(t) \star B \cdot u(t)] + D \cdot u(t)$

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} = C \cdot \Phi(s) \cdot x_0 + C \cdot \mathcal{L}\{\phi(t) \star B \cdot u(t)\} + D \cdot U(s)$$

$$(47). \quad Y(s) = C \cdot \Phi(s) \cdot x_0 + [C \cdot \Phi(s) \cdot B + D] \cdot U(s)$$

De donde se deduce que la matriz de transferencia es

$$(48). \quad G(s) = C \cdot \Phi(s) \cdot B + D$$

Por otra parte, transformando Laplace (38) y (39), y despejando $Y(s)$ de ambas, se obtiene:

$$(49). \quad Y(s) = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot x_0 + [C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B + D] \cdot U(s)$$

Observamos que:

$$(50). \quad \mathcal{L}\{\phi(t)\} = \Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \mathcal{L}\{e^{A \cdot t}\},$$

expresión que es formalmente análoga a la transformada de Laplace de la función escalar $\mathcal{L}\left\{e^{At}\right\} = \frac{1}{s-a} = (s-a)^{-1}$.

Ejercicio:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \sigma(t)$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \ \sigma(\cdot)\text{: escalón unitario}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot x(t)$$

Resolvamos para $t \geq 0$ mediante el cálculo de la matriz de transición según (42):

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot t + \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \frac{t^2}{2!} + \begin{bmatrix} -8 & 12 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} \cdot \frac{t^3}{3!} + \begin{bmatrix} 16 & -32 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} \cdot \frac{t^4}{4!} + \ldots$$

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} 1 - 2t + \frac{4t^2}{2!} - \frac{8t^3}{3!} + \frac{16t^4}{4!} - \ldots & t \cdot \left(1 - 2t + \frac{4t^2}{2!} - \frac{8t^3}{3!} + \ldots\right) \\ 0 & 1 - 2t + \frac{4t^2}{2!} - \frac{8t^3}{3!} + \ldots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & t \cdot e^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$\int_0^t \phi(t-\tau) \cdot b \cdot \sigma(\tau) \cdot d\tau = \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-2 \cdot (t-\tau)} & (t-\tau) \cdot e^{-2 \cdot (t-\tau)} \\ 0 & e^{-2 \cdot (t-\tau)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot d\tau = \int_0^t \begin{bmatrix} (t-\tau) \cdot e^{-2 \cdot (t-\tau)} \\ e^{-2 \cdot (t-\tau)} \end{bmatrix} \cdot d\tau = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} - \frac{e^{-2t}}{4} - \frac{t \cdot e^{-2t}}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{e^{-2t}}{2} \end{bmatrix}$$

Según (43):

$$x(t) = \begin{bmatrix} (1+t) \cdot e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix} + \int_0^t \ldots d\tau = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} + \frac{3 \cdot e^{-2t}}{4} + \frac{t \cdot e^{-2t}}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{e^{-2t}}{2} \end{bmatrix}$$

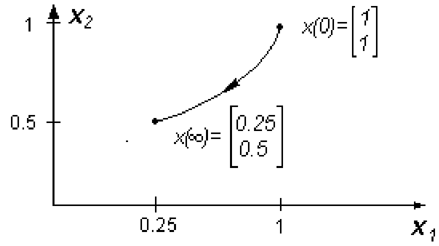


Figura 4

La Figura 4 ilustra la trayectoria del estado en el plano de fase, que tiende al estado estacionario $x_1 = 0{,}25$; $x_2 = 0{,}5$

De la ecuación de salida podemos determinar la combinación lineal $y(t) = x_1(t) + 2\,x_2(t)$.

$$y(t) = \frac{5}{4} + \frac{7}{4} e^{-2t} + \frac{1}{2} t \cdot e^{-2t}$$

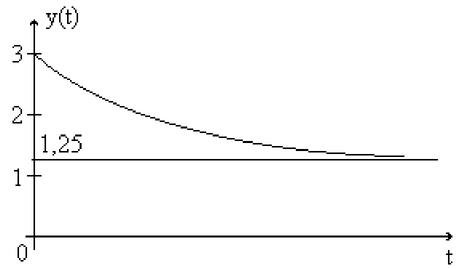


Figura 5

Es mucho más práctico calcular $\phi(t)$ según (50) en vez de recurrir a (42). Primero determinamos $\Phi(s)$ y después la "anti" transformamos:

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}$$

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+2} & \dfrac{1}{(s+2)^2} \\ 0 & \dfrac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

$$\phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & t \cdot e^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Calcule nuevamente $y(t)$, esta vez recurriendo a (47).

<u>Ejercicio:</u>

En todos los casos posibles resuelva los ejemplos de este apunte mediante la transformada de Laplace.