

SISTEMAS DINAMICOS: Conceptos Básicos y Modelos Matemáticos**SISTEMA**

El concepto de *sistema* puede ser definido de varias maneras. En primera aproximación se puede decir que **un sistema es un objeto o colección de objetos cuyas propiedades se desean estudiar.**

Ejemplos: Un circuito eléctrico, una máquina de alterna, un proceso de producción (de papel, de derivados de petróleo, de fármacos, etc.), el sistema solar, el sistema eléctrico argentino de interconexión (todos los centros de generación, líneas de transmisión, y grandes centros de carga de energía eléctrica del país), la economía de un país o de una región (Mercosur, Noroeste Argentino, Comunidad Europea, etc.), un centro de cómputos, el sistema de transporte de una ciudad, internet, etc.

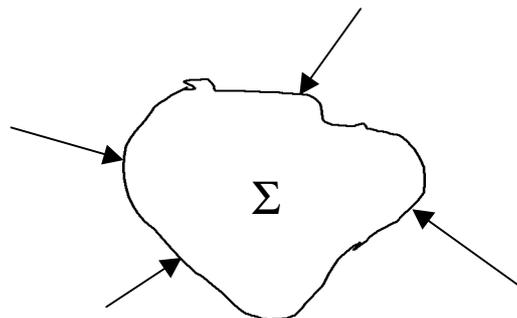
Definiciones de trabajo

- ◆ **SISTEMA** (Definición de **DIN 66201**, Normas Alemanas de Ingeniería):

Un Sistema (Σ) es una disposición delimitada de entidades interactuantes.
(3) (1) (2)

Se distinguen tres términos en esta definición:

- (1) **Delimitación** (espacial, conceptual) respecto al resto del universo. Los elementos del resto del Universo con acciones relevantes sobre el Sistema se reemplazan por elementos de acción equivalente y se incorporan al Sistema.



(2) **Entidades Interactuantes**, o Componentes del Sistema: **Elementos, procesos, sistemas**.

◆ **Proceso (DIN 66201)**: Transformación y/o transporte de materia, energía y/o información.

(3) **Disposición** (de los componentes entre sí): . Define la **Estructura del Sistema**. Aunque dos sistemas tengan los mismos componentes son distintos si la disposición de los mismos, i.e., su estructura, es diferente.

Asumiendo la delimitación respecto al resto del Universo puede decirse entonces, de manera equivalente a la definición de la Norma DIN mencionada, que:

Un Sistema es una entidad formada por un conjunto de componentes y una estructura:

$$S = \{ \text{Componentes, Estructura} \}$$

SISTEMA FISICO (SF): La Interacción involucra intercambio de **materia y/o energía y/o información**.

SISTEMA FISICO DINAMICO (SFD): Hay **almacenamiento** de materia y/o energía y/o información.

METODOLOGIA

ANALISIS EXPERIMENTAL

La Ciencia y sus métodos proveen respuestas a los interrogantes humanos sobre los sistemas y sus propiedades. Los métodos científicos se basan en la **experimentación**, que consiste en la realización de **ensayos*** sobre el sistema, en la **observación** de las reacciones del mismo, y en la **obtención de leyes** de su comportamiento, expresadas por lo general mediante el lenguaje matemático.

* En ocasiones el ensayo se "reduce" a la recolección de datos de instrumentos, sin que medien otras acciones sobre el sistema. Así se procede en el estudio de sistemas en Astronomía, p. ej., aunque también puede seguirse el mismo procedimiento en un sistema técnico, en el cual se toman mediciones de variables durante su operación normal.

El método experimental no es siempre viable ya que en algunos casos existen factores que limitan o impiden su aplicación. Por ejemplo:

- **Costos:** Realizar un experimento en una planta industrial podría significar detener un proceso de producción durante varias horas, con las consiguientes pérdidas económicas.
- **Riesgos:** Las consecuencias del experimento pueden ser inadmisibles. (Ejs.: Ciertos experimentos en plantas nucleares "¿cómo incidiría en la atmósfera un escape de vapor radioactivo?"; "estudio de la repercusión de la eliminación de una especie en un ecosistema").
- **Experimento irrealizable**
 - **Inexistencia del sistema:** Típicamente, en las fases de diseño previas a la construcción de un (prototipo de un) sistema, se desea saber como incidirán ciertos parámetros en su funcionamiento (Ejs.: "¿cuál es el efecto aerodinámico de distintos tipos de alas en un nuevo tipo de avión?"; "¿cómo inciden distintos tipos de suspensión en el confort de los pasajeros de un vehículo automotor?").
 - **Incapacidad humana de experimentar:** Aunque mucho ha contribuido la técnica al poder del hombre sobre la naturaleza, en muchos dominios es imposible determinar o modificar procesos físicos (en muchos casos afortunadamente!). (Ej.: "¿cuál sería el efecto de un desplazamiento del eje magnético de la Tierra?").

Cuando no se puede experimentar sobre los sistemas se recurre a su *modelado*.

MODELOS

Un *modelo* de un sistema es básicamente una herramienta que permite responder interrogantes sobre este último sin tener que recurrir a la experimentación sobre el mismo. Un *modelo* es una representación siempre simplificada de la realidad (*SF* existente), o de un prototipo conceptual (proyecto de *SF*).

CLASIFICACIONES

▪ **Modelos Físicos**

Son representaciones a escala de los sistemas originales. El resultado de los experimentos sobre los modelos se transfiere a los originales en base a la Teoría de Semejanza (Ejs.: túnel de viento para el estudio de fenómenos aerodinámicos; reproducción a escala del lecho de un río para estudios hidrológicos).

▪ **Modelos Abstractos**

- **Mentales:** imagen (inconsciente) del funcionamiento de un proceso (Ej.: Aún sin saber absolutamente nada de la Física correspondiente, o sin pensar en la misma, la gente

permanentemente aplica conceptos de la Mecánica en el manejo del cuerpo, particularmente con mucha destreza los deportistas)

- **Verbales/Textuales:** descriptivos de constitución, de comportamiento. (Ejs.: “viento del este, llueve como peste”; “si la bolsa cae, aumenta la tasa de interés”; "instrucciones de operación y/o descripción de funcionamiento de una máquina").
- **Técnicos:** Muy comúnmente dados como planos, gráficos, etc., representan con simbología específica y determinada la constitución de sistemas ingenieriles (Ejs.: "planos de un sistema de acondicionamiento de aire de un edificio"; "planos mecánicos del sistema caldera-turbina de una central de generación de energía eléctrica"; "planos eléctricos de la misma central, con su conexión a la red de transmisión de energía eléctrica"; "plano de un circuito impreso / de un amplificador operacional")
- **Matemáticos:** duros (se expresan con variables a valores numéricos), blandos/difusos (en general se expresan con variables a valores lingüísticos).

MODELOS MATEMATICOS: MM

Son expresiones matemáticas que describen las relaciones existentes entre las magnitudes caracterizantes del sistema.

Los MM pueden ser:

- **Sistemas de ecuaciones**
- **Inecuaciones**
- **Expresiones lógico-matemáticas**

Todas estas formas vinculan variables matemáticas representativas de las **señales** en el sistema, **obtenidas** a partir de las relaciones entre las correspondientes magnitudes físicas.

- ◆ **SEÑAL (DIN 66201):** Representación de una *información* a través de (un conjunto de) valores de una magnitud física.

CLASIFICACIÓN DE LOS MM

Tiempo Continuo vs Tiempo Discreto

Un MM se dice de **tiempo continuo** cuando las variables y las relaciones entre ellas están definidas para todo instante de tiempo (en el intervalo de validez o definición del modelo).

En cambio para los MM de **tiempo discreto** las relaciones entre las variables y entre ellas están definidas sólo en determinados instantes discretos de tiempo (MM de Sistemas Muestreados; MM de tiempo continuo discretizados a los efectos de su resolución numérica).

Estáticos vs Dinámicos

Si existe un **vínculo instantáneo** entre las variables, el modelo se dice **estático** (ecuaciones con expresiones algebraicas, trascendentes, o funciones en general). En la sección sobre *Causalidad* se precisará mejor este concepto.

Si **el vínculo entre las variables requiere** no sólo su valor presente sino también **sus valores pasados**, el modelo se dice **dinámico** (ecuaciones diferenciales / en diferencias con el **tiempo** como **variable absoluta** -ver más adelante, en la sección sobre *Clasificación de las Variables*)

Determinísticos vs Estocásticos

Un modelo es **determinístico** si expresa matemáticamente sin incertidumbre las relaciones entre las variables. El modelo asigna unívocamente valores y/o funciones ciertas y determinadas a la información que procesa (señales, i.e., otros valores y/o funciones determinadas).

Un modelo es **estocástico** si expresa las relaciones con incertidumbre entre las variables mediante conceptos probabilísticos usando variables aleatorias. Dichas relaciones son descritas usando variables o procesos estocásticos.

Parámetros Distribuidos vs Parámetros Concentrados

Las magnitudes que caracterizan a los fenómenos físicos toman valores en el tiempo y en el espacio.

Si un modelo matemático conserva la dependencia espacio-temporal en la representación matemática de dichas magnitudes, el modelo se dice de **parámetros**

distribuidos, ya que en general los coeficientes o parámetros del sistema están distribuidos en el espacio (Ejs.: la densidad del fluido compresible en un gasoducto; resistividad, inductividad y capacidad por unidad de longitud en una línea de transmisión). Los modelos dinámicos son, típicamente ecuaciones en derivadas parciales.

Se tiene un modelo a **parámetros concentrados** cuando se reemplaza la dependencia espacial de las variables por su promedio en la región del espacio donde están definidas. El espacio desaparece como **variable absoluta** del modelo y los parámetros pasan a ser variables extensivas del modelo, se *concentran* en la región en cuestión. Los modelos dinámicos son, típicamente, ecuaciones diferenciales ordinarias.

Paramétricos vs No Paramétricos

Los **MM Paramétricos** se caracterizan completamente con un número finito de parámetros (Ejs.: una función transferencia; una ecuación diferencial).

Los **MM No Paramétricos** no pueden caracterizarse completamente con un número finito de parámetros (Ejs.: La curva de la respuesta a un escalón de un sistema dinámico; la curva de respuesta en frecuencia de un amplificador).

Lineales vs No Lineales

En los **MM Lineales** vale el principio de superposición, i.e., causas superpuestas (p. ej., distintas entradas y/o condiciones iniciales) originan la superposición de los correspondientes efectos.

En los **MM No Lineales** el principio de superposición no vale.

Estacionarios vs Inestacionarios

Un MM es estacionario si responde al principio de desplazamiento temporal, i. e., toda acción sobre el sistema produce el mismo efecto (la misma respuesta del sistema) independientemente del momento en que comienza a ejercerse, si en ese momento el sistema se encuentra en las mismas condiciones.

UTILIZACIÓN DE LOS MM

Los MM pueden ser utilizados para estudiar propiedades y/o predecir el comportamiento del sistema ante diferentes situaciones. Existen dos grandes grupos de técnicas para tal fin:

- ◆ **Análisis Teórico de los MM**: Métodos matemáticos de análisis cualitativo (estabilidad, etc.) y cuantitativo (resolución de ecuaciones, etc.)
- ◆ **Análisis Experimental de los MM**: Estudio de propiedades cuantitativas y cualitativas del MM mediante experimentos en equipos de cómputo programables: **Simulación o Matemática Experimental.**

SIMULACION: Digital / Analógica / Híbrida

SIMULACION (general): Investigación del comportamiento de un sistema sobre un segundo, reemplazante del primero.

La **SIMULACIÓN DIGITAL** involucra:

- Representación Discreta de Variables Continuas
- Aproximación de Funciones
- Métodos Numéricos
- Errores de Cómputo

MODELADO O CONSTRUCCIÓN DE MM

Existen dos grandes grupos de técnicas, conceptualmente diferentes, pero de uso complementario en la práctica ingenieril:

- **MODELIZACIÓN ANALÍTICA O FÍSICA**
- **MODELIZACIÓN EXPERIMENTAL O IDENTIFICACIÓN**

MODELIZACIÓN ANALÍTICA O FÍSICA

- **Primera Etapa:**

- Definición del *problema a resolver*,
- Determinación de los *fenómenos (físicos)* relevantes al *problema*, asignación de las *magnitudes físicas* que los cuantifican, delimitación del sistema,
- Descripción de la *interacción*, y descomposición en *estructura y componentes* (usualmente *subsistemas*).

Resultado Etapa 1: *esquema funcional / energético de principio, indicativo de la interacción de los subsistemas a través de sus variables vinculantes.*

- **Segunda Etapa:**

- Descripción formal de las estructuras → RelEsts
- Descripción formal de los componentes → RelaCs
 - **Relaciones Constitutivas (RelaCs):** Relaciones entre las magnitudes de cada componente de un sistema, exclusivamente determinadas por las propiedades intrínsecas del componente (físicas, geométricas, etc).
 - **Relaciones Estructurales (RelEsts):** Relaciones entre las magnitudes (externas) de los componentes de un sistema, determinadas por su disposición en el mismo, i.e., por la estructura del sistema.

Resultado Etapa 2: Sistema Físico Idealizado (**SFI**): Especificación refinada del *Resultado Etapa 1* mediante algún tipo de representación usualmente gráfica, con componentes normalizados que tienen a las RelEsts y RelaCs como atributos.

- **Tercera Etapa:**

- Manipulación Formal del **SFI** (formulación de tipos alternativos de modelos, p. ej. diagramas de bloques, funciones transferencias, ecuaciones diferenciales, etc.)
- Análisis Cualitativo
- Análisis Experimental (Simulación)

Resultado Etapa 3: *Modelos matemáticos, predicciones sobre comportamiento.*

- **Cuarta Etapa:**

- Validación (contraste con datos empíricos, correcciones, simplificaciones)

Resultado Etapa 4: *Modelo adecuado a los requerimientos del problema original.*

MODELIZACIÓN EXPERIMENTAL O IDENTIFICACION

Es la técnica de la formulación y/o parametrización de modelos a partir de datos de mediciones / experimentales.

Una clasificación elemental* distingue tres tipos:

- 1) Análisis cualitativo de transitorios ante excitaciones aperiódicas (típicamente escalones). Experimentos tendientes a orientar la Primera Etapa del Modelado Analítico. Ayudan a establecer las variables importantes, el tipo de interdependencia (estática, dinámica, ninguna), la organización/descomposición en subsistemas, etc.
- 2) Formulación de modelos *paramétricos o no paramétricos*.
 - a) Análisis cuantitativo de respuestas al escalón (la técnica más usada en la industria), respuestas al impulso, respuestas en frecuencia. Produce modelos (en general) lineales arbitrarios (sin estructura predeterminada).
 - b) Ajuste de modelos autoregresivos. Parametriza modelos (en general) lineales, pero establecidos previa o independientemente de la identificación.
- 3) Estimación de parámetros físicos de modelos obtenidos mediante modelado analítico, y/o de parámetros sistémicos resultantes de parámetros físicos.

Al igual que en el modelado analítico, es fundamental la Validación del modelo identificado, mediante el contraste de sus predicciones con datos ajenos a los de la identificación !

CLASIFICACIÓN DE VARIABLES INVOLUCRADAS EN LOS SISTEMAS

VARIABLES FUNDAMENTALES: {Espacio, Tiempo}

En el escenario espacio-temporal existen los sistemas, ocurren los procesos y fenómenos, y toman valores las señales.

VARIABLES DESCRIPTIVAS: son todas las variables que representan a las magnitudes físicas asociadas al sistema.

- **PARÁMETROS:** Constantes o Variables con ley predeterminada independiente de los procesos que puedan ocurrir en el sistema (*Constantes del Sistema, Parámetros de Diseño*).

- **ENTRADAS / VARIABLES INDEPENDIENTES / CAUSAS:** Variables Descriptivas cuyas señales son independientes de otras señales en el sistema, y no están prefijadas. Representan acciones externas del ambiente sobre el sistema.

- **ENTRADAS MANIPULADAS**

- **PERTURBACIONES.**

- **VARIABLES DEPENDIENTES / EFECTOS:** Variables descriptivas cuyas señales dependen de otras variables descriptivas del sistema.

- **SALIDAS:** Variables dependientes de interés.

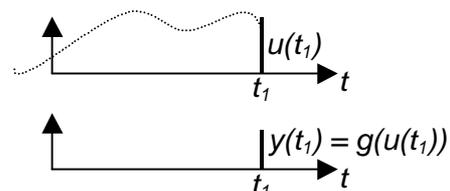
CAUSALIDAD

RELACIÓN CAUSAL: Una señal $y(\cdot)$ depende causalmente de otra señal $u(\cdot)$ si:

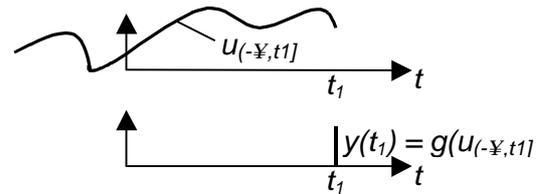
- $y(\cdot)$ depende de $u(\cdot)$
- $y(\cdot)$ no depende de valores futuros de $u(\cdot)$

RELACIÓN CAUSAL ESTÁTICA: Relación causal en la que para todo instante genérico t , el valor del efecto $y(t)$ depende solamente del valor de la causa $u(t)$, es decir, no hay dependencia de valores pasados de $u(\cdot)$.

$y(t) = g [u(t)]$, $g [\bullet]$: función



RELACIÓN CAUSAL CON MEMORIA O DINÁMICA: Relación causal en la que el valor del efecto $y(t)$ en algún instante genérico t depende de al menos algún valor pasado de la causa $u(\cdot)$.



$$y(t) = g [u_{(-\infty, t]}] \quad , \quad g [\bullet]: \text{funcional}$$

SISTEMA DINÁMICO: Sistema en el cual para alguna variable dependiente $y(\cdot)$ y alguna entrada $u(\cdot)$ existe una relación causal con memoria.

CONCEPTO DE ESTADO

A los efectos de las siguientes definiciones considérese que las señales de entrada son datos conocidos por el sistema/modelador para cualquier tiempo genérico t (ver Nota al pie).

VECTOR DE VARIABLES DE ESTADO: Es todo conjunto de variables dependientes tal que su valor* en un instante genérico t determina estáticamente cualquiera otra variable dependiente.

VECTOR DE VARIABLES DE ESTADO: Es todo conjunto de variables dependientes tal que su valor* en un instante genérico t es suficiente para calcular estáticamente (usando Relacs y RelEsts) cualquiera otra variable dependiente del sistema.

VECTOR DE ESTADOS MINIMAL: Todo Vector de Estados cuyo valor* es suficiente y necesario para determinar estáticamente toda otra variable dependiente del sistema.

ORDEN DE UN MODELO: Es el número mínimo de variables dependientes con cuyo valor* quedan estáticamente determinadas todas las otras variables dependientes del sistema.

ORDEN DE UN MODELO: Es el número máximo de variables dependientes cuyo valor* puede asignarse arbitrariamente sin contradicciones en el modelo.

ORDEN DE UN MODELO: Es el cardinal de cualquier Vector de Estados Minimal.

¡ ¡EL ORDEN DE UN MODELO ES ÚNICO !!

* conjuntamente con el de las entradas en ese mismo instante t !

VARIABLES EXTERNAS := { Entradas, Salidas }

VARIABLES INTERNAS ° **VARIABLES DEPENDIENTES**

P las variables internas pueden ser variables externas: p. ej. las salidas son variables internas y externas a la vez.

VARIABLES DE ESTADO – versión ecuaciones diferenciales

Conjunto de variables internas cuyo valor en un instante t_0 es suficiente para calcular cualquier otra variable interna en $t \geq t_0$ (conjuntamente con las señales $u_{[t_0, t]}$).

ECUACIONES DE ESTADO: CONCENTRAN LA DINÁMICA.

ECUACIONES DE SALIDA : ECUACIONES ESTÁTICAS.

MODELO EN EL ESPACIO DE ESTADOS (tiempo continuo)

Ecuación (Vectorial) de Estado: $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$

Ecuación (Vectorial) de Salida: $y(t) = g(x(t), u(t), t)$

$x(t)$: Vector de Estado, n -dimensional

$u(t)$: Vector de Entrada, m -dimensional

$y(t)$: Vector de Salida, p -dimensional

Por componentes:

$$\begin{array}{ll} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t) & y_1(t) = g_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t) \\ \dot{x}_2(t) = f_2(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t) & y_2(t) = g_2(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t) \\ \vdots & \vdots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t) & y_p(t) = g_p(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t) \end{array}$$

La notación anterior permite describir modelos *alineales* (f y g alineales en x y/o u) e *inestacionarios* (la dependencia directa de f y g respecto del tiempo permite representar la presencia de **parámetros variables**). El modelo estacionario y alineal:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

$$y(t) = g(x(t), u(t))$$

Si las funciones f y g son lineales en x y u el modelo se dice *Lineal* y se escribe:

$$\dot{x}(t) = A(t) \cdot x(t) + B(t) \cdot u(t)$$

$$y(t) = C(t) \cdot x(t) + D(t) \cdot u(t) \quad \text{para el caso } \textit{inestacionario}$$

donde $A(t), B(t), C(t), D(t)$ son matrices reales de dimensiones:

$$A: n \times n$$

$$B: n \times m$$

$$C: p \times n$$

$$D: p \times m$$

El modelo es *Lineal* y *Estacionario* **si** estas matrices son independientes del tiempo .