

## INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL DESACOPLAMIENTO

En estas notas se presenta una forma de determinación cualitativa de las trayectorias en el espacio de estados de los sistemas del tipo:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad A \in \mathfrak{R}^{n \times n} \quad (1)$$

Al ser  $A$  en general una matriz densa, se busca simplificar el problema (1) transformándolo en uno del mismo tipo:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A} \tilde{x}(t) \\ \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0 \end{cases} \quad (2)$$

en el cual  $\tilde{A} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  sea una matriz diagonal. Para ello se propone la siguiente relación biunívoca lineal entre los vectores del sistema original y el transformado:

$$x = V \tilde{x} \quad V \in \mathfrak{R}^{n \times n} \quad (3)$$

siendo  $V$  una matriz regular ( $\Leftrightarrow \exists V^{-1}$ ). Reemplazando (3) en (1) se obtiene:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = V^{-1} A V \tilde{x}(t) \\ \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0 = V^{-1} x_0 \end{cases} \quad (4)$$

Comparando (4) y (2) se ve que se satisface

$$\tilde{A} = V^{-1} A V \quad (5)$$

Escribiendo  $V$  en términos de sus **n columnas l.i.**, y asumiendo  $\tilde{A}$  diagonal tenemos:

$$V = [v_1 \mid v_2 \mid \dots \mid v_n] \quad (6)$$

$$\tilde{A} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \quad (7)$$

Premultiplicando ambos miembros de (5) por  $V$ , y usando (6) y (7) en el primer miembro y (6) en el segundo, se obtiene:

$$[I_1 v_1 \mid \dots \mid I_n v_n] = [A v_1 \mid \dots \mid A v_n] \quad \text{es decir} \quad I_i v_i = A v_i \quad (8)$$

La Ec. (8) muestra que el problema del desacoplamiento de las EE (1), i.e., su transformación en el problema (2) con  $\tilde{A}$  **diagonal**, no es otro que el de hallar  **$n$  autovectores l.i.**  $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$  en correspondencia con los  **$n$  autovalores** de la matriz  $A$ .

Los  $n$  autovectores l.i. agrupados como  $n$  columnas determinan la matriz regular  $V$ , llamada **transformación modal de semejanza**. Como se sabe del Álgebra Lineal, este problema no es siempre soluble: existen matrices  $A$  para las cuales no se puede hallar  $n$  autovectores l.i.. Recordemos dos resultados:

- ❖ Una matriz  $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  es diagonalizable  $\hat{U}$  para sus  $n$  autovalores se pueden hallar  $n$  autovectores l.i..
- ❖ Si una matriz  $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  tiene  $n$  autovalores distintos, entonces es diagonalizable.

A continuación trataremos de manera ejemplar para  $n = 2$  el problema de hallar las trayectorias en el espacio de estados. Con  $A$  diagonalizable el método se aplica textualmente a  $n$  genérico. Si no lo es, hay que hacer modificaciones técnicas manteniéndose las ideas básicas (opcionalmente se puede profundizar el tema en [1]).

Con  $x(t) \in \mathfrak{R}^2$  y  $A \in \mathfrak{R}^{2 \times 2}$ , el espacio de estados es un plano que suele denominarse **plano de fases** (algunos autores restringen esta denominación al caso en que se escoge  $x_2 \equiv \dot{x}_1$ , cosa que nosotros aquí no hacemos). Particularizamos (1), (2) y (3) para  $n = 2$ :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \lambda_1 \tilde{x}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 = \lambda_2 \tilde{x}_2 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(0) \\ \tilde{x}_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{10} \\ \tilde{x}_{20} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$V = [v_1 \mid v_2] \quad \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$x = V \tilde{x} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Como se observa en (12), cada componente  $x_i$  es una combinación lineal de  $\tilde{x}_1$  y  $\tilde{x}_2$ :

$$x_i = v_{i1} \tilde{x}_1 + v_{i2} \tilde{x}_2 \quad i = \{1, 2\} \quad (12.1)$$

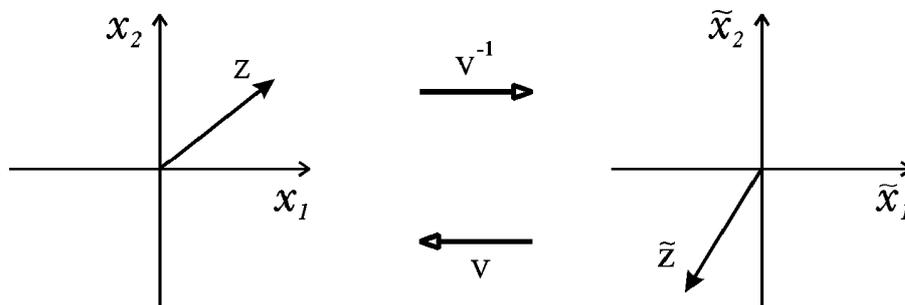
Obviamente, también es válida la afirmación inversa, según:

$$\tilde{x} = V^{-1} x \quad (13)$$

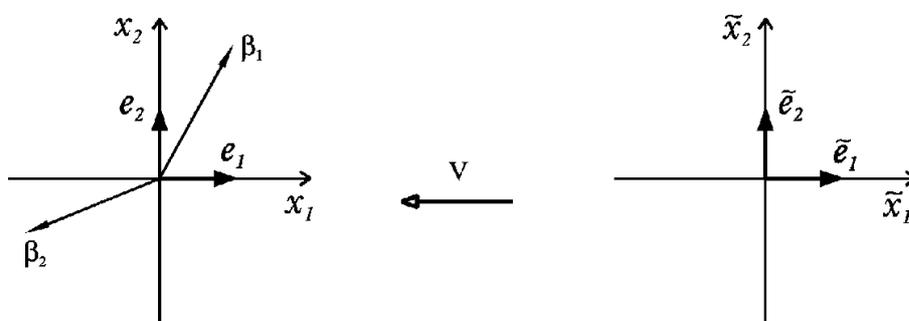
Sean  $X \approx \mathfrak{R}^2$  y  $\tilde{X} \approx \mathfrak{R}^2$  los planos de fase de los sistemas (9) y (10), respectivamente. Geométricamente,

tenemos la siguiente situación:

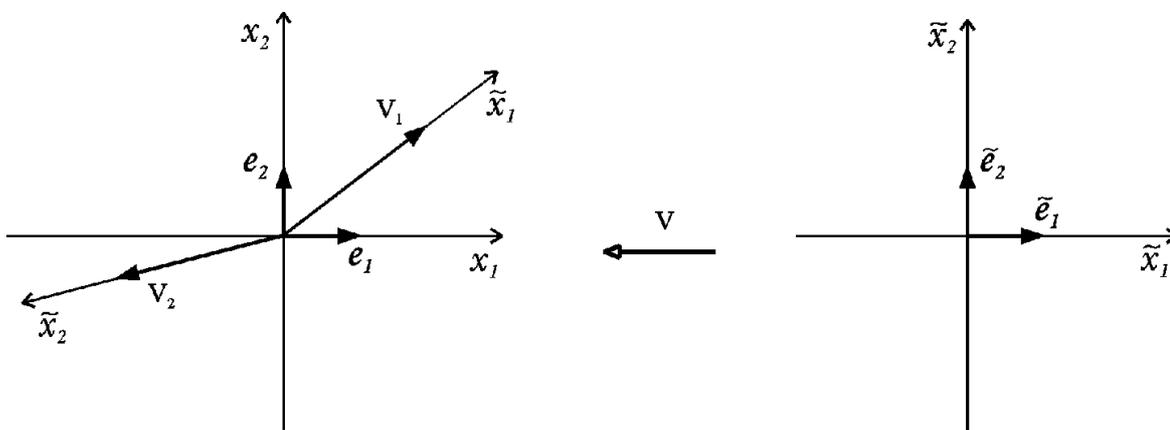
$$\tilde{Z} = V^{-1}Z$$

$$Z = V\tilde{Z}$$


Consideremos particularmente los vectores  $\tilde{e}_1$  y  $\tilde{e}_2$  de la base en  $\tilde{X}$ . Por efecto de  $V$  se transforman en dos vectores l.i. en  $X$ :



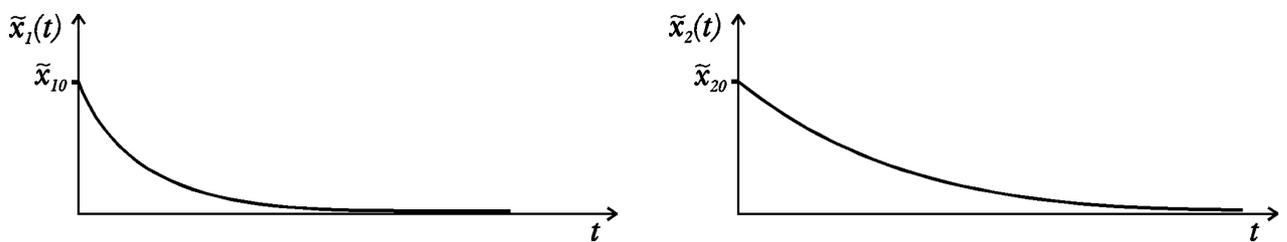
Por la linealidad de la transformación  $V$ , las rectas definidas en  $\tilde{X}$  por  $\tilde{e}_1$  y  $\tilde{e}_2$  se transforman en las definidas por  $\beta_1$  y  $\beta_2$  en  $X$ , respectivamente. Si tomamos  $e_{1,2}$  y  $\tilde{e}_{1,2}$  como los versores  $[1,0]^T$  y  $[0,1]^T$ , tenemos que  $\beta_1 = V_1$  y  $\beta_2 = V_2$ . Es decir que las componentes  $\tilde{x}_{1,2}$  de  $\tilde{X}$  se representan en  $X$  en las direcciones de los autovectores l.i.  $V_{1,2}$ , con los módulos de sendos vectores como la unidad en cada eje:



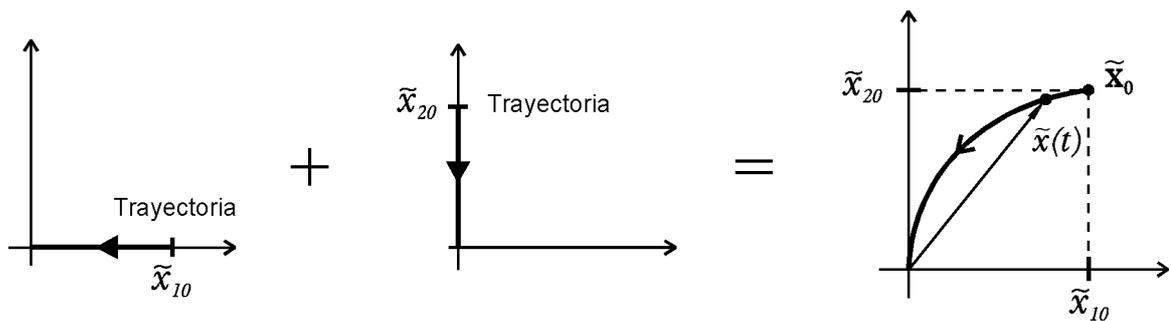
Esto no es más que la interpretación geométrica de las relaciones (12) y (12.1). Es fundamental para representar las trayectorias de (9) en  $X$  en base a las de (10) en  $\tilde{X}$ . De (10) se tiene que:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1 &= e^{I_1 t} \tilde{x}_{10} \\ \tilde{x}_2 &= e^{I_2 t} \tilde{x}_{20}\end{aligned}\tag{14}$$

Al estar (10) desacoplado, una c.i. en una de las direcciones "tilde" no provoca movimiento en la otra, como lo demuestra (14). Como sendos movimientos están determinados por los modos  $e^{\lambda_{1,2} t}$ , ambas direcciones se denominan **direcciones modales** del espacio de estados. Siendo rectas que pasan por el origen (tanto en  $X$  como en  $\tilde{X}$ ) las direcciones modales son *subespacios* lineales del espacio de estados. Estos subespacios se dicen **invariantes bajo la dinámica**  $\dot{x} = A \cdot x$  **del sistema**. Esto significa que cualquier condición inicial  $x_0$  contenida en una de ellas genera una trayectoria  $x(t) = e^{A t} \cdot x_0$  íntegramente contenida en esa dirección. Supongamos  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ , se tiene entonces:

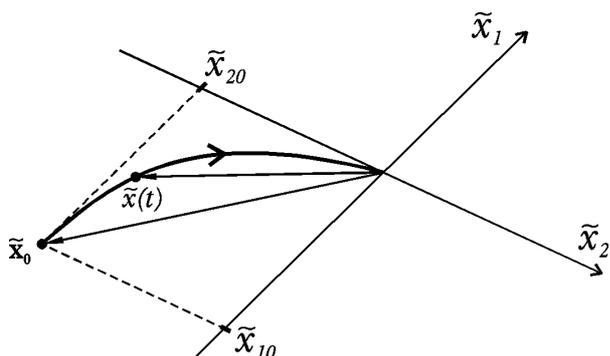


$$\tilde{x}_0 = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{10} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{x}_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{10} \\ \tilde{x}_{20} \end{bmatrix}$$



Lo que aquí hemos representado gráficamente es la idea básica del método: dada una condición inicial arbitraria  $\tilde{x}_0$ , expresada en sus componentes modales  $\tilde{x}_{10}$  y  $\tilde{x}_{20}$ , hallar las trayectorias en cada subespacio modal (independiente de la otra ya que es invariante bajo la dinámica) y luego hallar la trayectoria total sumando o componiendo las modales. Esto se traslada literalmente al espacio original  $X$ , donde la condición inicial no debe descomponerse según las direcciones  $x_{1,2}$ , sino proyectándola en las

direcciones modales  $V \cdot \tilde{x}_{1,2}$  (representadas en la gráfica simplemente como  $\tilde{x}_{1,2}$ , pero sabiendo que se trata de  $V \cdot \tilde{x}_{1,2}$ , sobre el plano  $X$ ), para poder hacer uso de la propiedad de invariancia:



Obsérvese la concavidad hacia la dirección más rápida.

## RETRATOS DE FASE

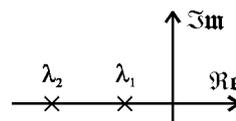
En base a las ideas previas y al método que sustentan, analizaremos todos los retratos de fase posibles para matrices  $A \in \mathfrak{R}^{2 \times 2}$ , clasificándolos de acuerdo a propiedades de las matrices (autovalores y autovectores).

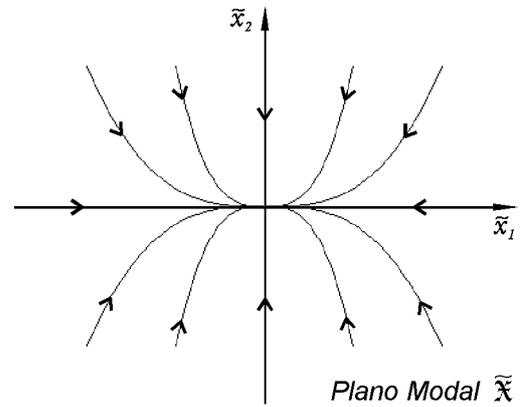
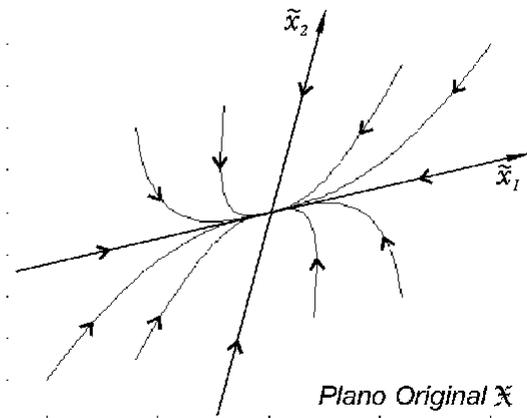
El retrato de fases es una colección suficientemente numerosa de trayectorias como para indicar unívocamente la forma de la trayectoria originada en cualquier otra condición inicial que se quiera agregar en el plano de fase. Esto es posible gracias a una propiedad fundamental de las soluciones de (1)/(2) o (9)/(10): **son únicas para cada par  $(t, x_0)$ , lo cual implica la regularidad de las trayectorias que permite construir el retrato de fases.** (Puede verse, opcionalmente, el *Teorema de Existencia y Unicidad* en [2]).

Obsérvese que el origen  $x = 0$  es punto de equilibrio del sistema (1)/(2) ( o (9)/(10) ). Cuando es el único punto de equilibrio ( $\Leftrightarrow A$  regular), es la estabilidad del origen la propiedad que, junto a la forma de las trayectorias le da el nombre al retrato de fase. Recordamos que un punto de equilibrio es (asintóticamente) estable en el espacio de estados (estabilidad interna) si y sólo si existe un entorno del mismo tal que *toda trayectoria originada en su interior converge asintóticamente al punto de equilibrio* (esta definición no es rigurosa!, pero funciona para la clase de sistemas aquí tratados).

### NODO ESTABLE: Autovalores reales, negativos y distintos

Es el caso del ejemplo precedente. Invirtiendo la ubicación relativa de los autovalores, se tiene:



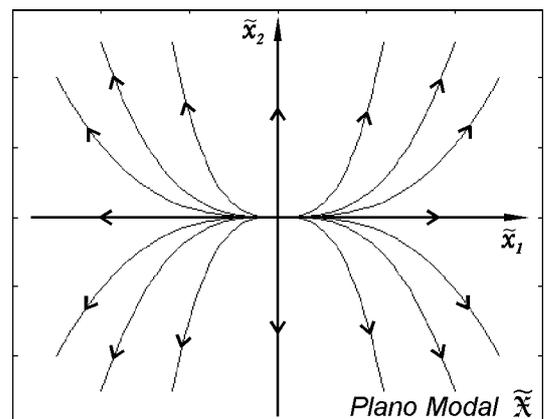
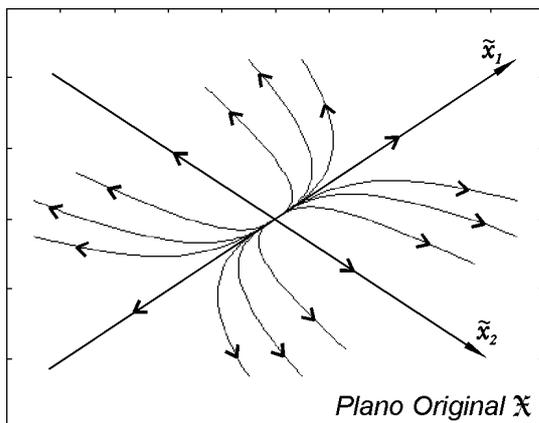
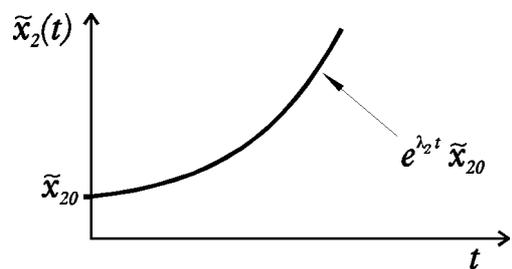
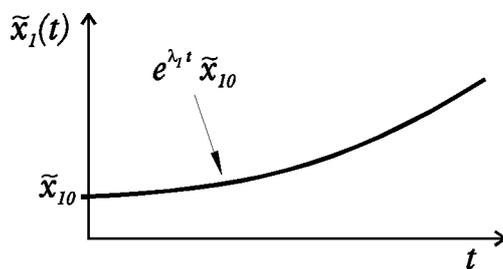
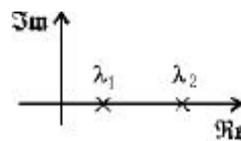


Observe que las direcciones modales  $\tilde{x}_{1,2}$  definen (en ambos planos  $X$  y  $\tilde{X}$ ) cuatro cuadrantes que son invariantes, i.e., cualquier trayectoria originada en uno de ellos está íntegramente contenida en él. Como ejercicio dibuje el retrato de fases suponiendo  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ .

### NODO INESTABLE: Autovalores reales, positivos y distintos

Sea por ejemplo:  $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ .

De acuerdo a (14) se tiene:

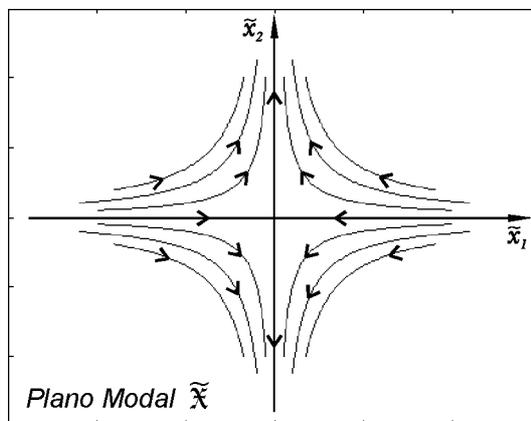
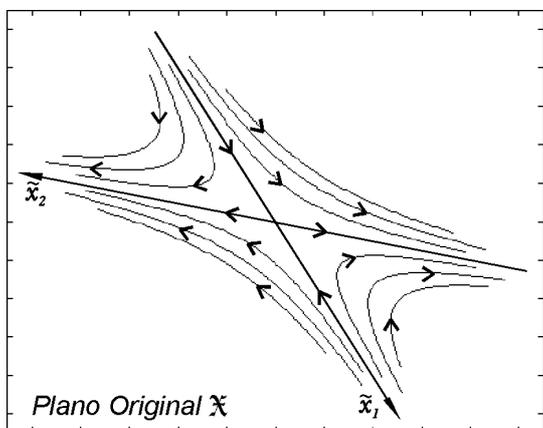
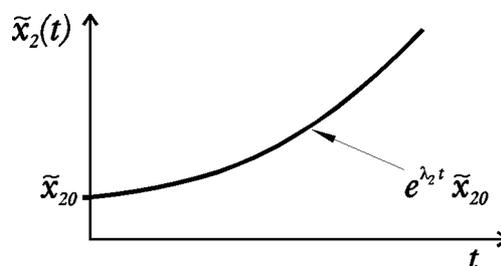
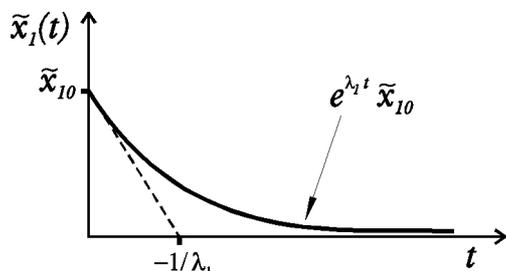
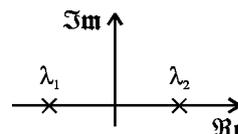


Obsérvese otra vez la concavidad hacia la dirección más rápida.

## ENSILLADURA: Autovalores reales, no nulos de distinto signo

Sea por ejemplo:  $\lambda_2 > 0$ ;  $\lambda_1 < 0$ .

De (14) se tiene:



Como se ve, el origen no es estable, al ser inestable una de las direcciones modales.

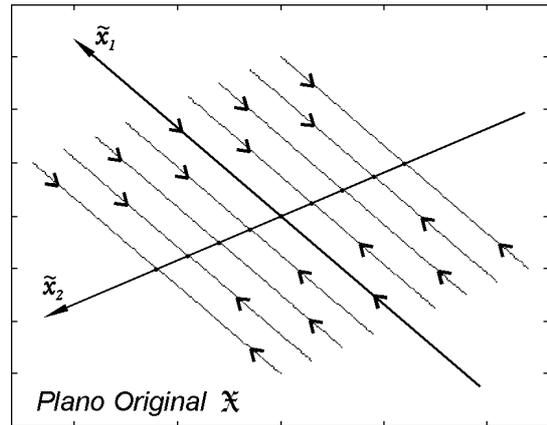
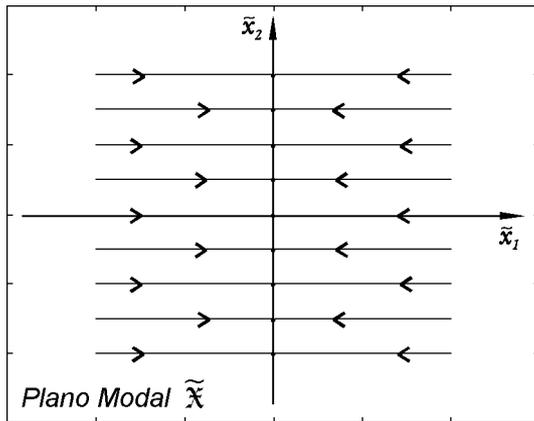
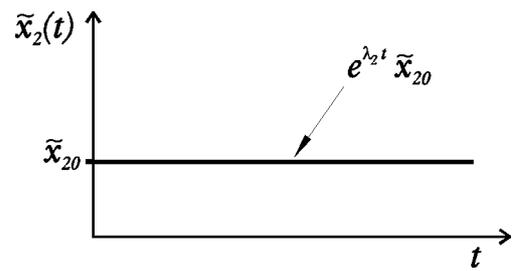
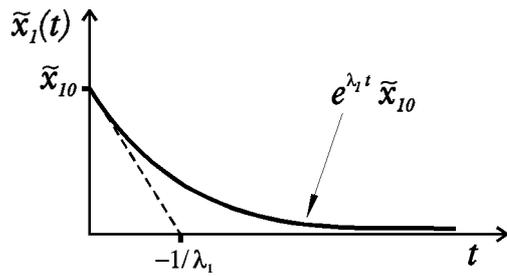
## Autovalores reales, distintos, uno nulo

Se trata de dos casos con la matriz A singular, como es fácil de comprobar. Al ser un autovalor nulo, digamos  $\lambda_2$ :

$$\begin{cases} \lambda_2 V_2 = A V_2 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A V_2 = 0 \Leftrightarrow A \text{ singular}$$

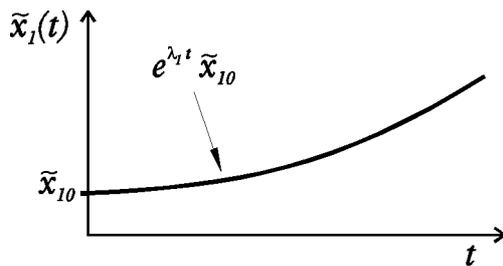
ya que  $V_2 \neq 0$ , pues A es diagonalizable. Pero esto significa que todo vector proporcional a  $V_2$ , digamos  $\alpha \cdot V_2$ ,  $\alpha \in \mathfrak{R}$ , satisface  $A(\alpha V_2) = 0$ . Luego, todo punto en la dirección de  $V_2$  es un punto de equilibrio del sistema  $\dot{x} = A x$ , lo que por otra parte se puede comprobar en las soluciones de las EE, según (14).

❖  $l_1 < 0; l_2 = 0$ :

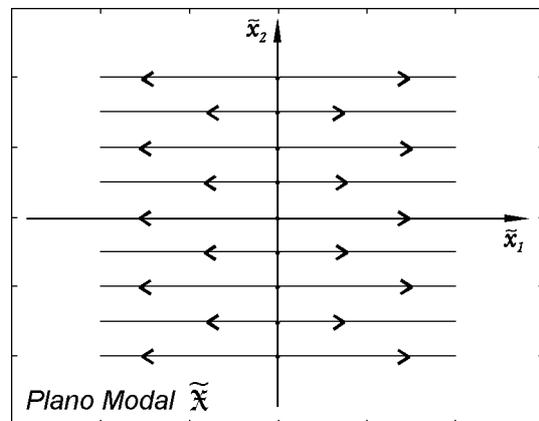
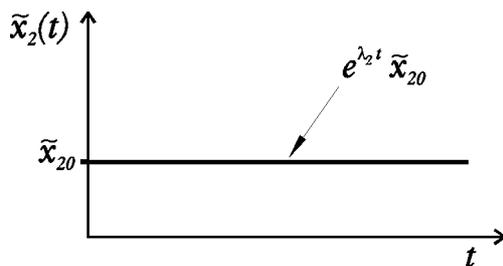


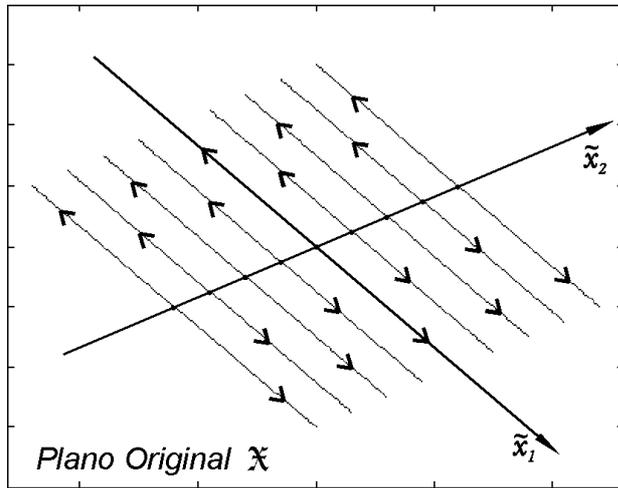
Cada uno de los puntos de equilibrio es estable, aunque *no asintóticamente*.

❖  $l_1 > 0; l_2 = 0$ :



En este caso todos los puntos de equilibrio son inestables.





### Autovalores complejos conjugados

Con estos tres próximos completamos los casos en que se cumple la condición suficiente enunciada anteriormente para tener dos autovectores l.i., i.e., que los autovalores sean distintos.

$$\begin{aligned} \lambda_1 = \lambda = \alpha + j\omega \\ \lambda_2 = \bar{\lambda} = \alpha - j\omega \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{I}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} + j\omega & 0 \\ 0 & \mathbf{a} - j\omega \end{bmatrix}$$

Las soluciones modales son funciones complejas del tiempo. Los autovectores  $V_1$  y  $V_2$  también son complejos conjugados:

$$\begin{aligned} V_1 = V & \quad V = V_{\Re} + jV_{\Im} \\ V_2 = \bar{V} & \quad \bar{V} = V_{\Re} - jV_{\Im} \end{aligned} \quad \text{con } V_{\Re} \text{ y } V_{\Im} \text{ vectores reales l.i.}$$

Vemos que el problema es desacoplable (A diagonalizable), pero que las direcciones modales, al ser complejos los autovectores, no son representables geoméricamente en el plano de fases. Para permanecer en el campo de los reales, se sacrifica la forma diagonal haciendo una segunda transformación de semejanza R, *invertible*. Pasamos de  $\tilde{X}$  a  $X^*$  y viceversa con R, de acuerdo a:

$$\tilde{x} = R x^* \tag{15}$$

Como teníamos  $x = V \cdot \tilde{x} \Rightarrow x = (V \cdot R) \cdot x^* = W \cdot x^*$ , donde  $W = V \cdot R$  es la transformación global entre el espacio X original y el nuevo  $X^*$ . Su inversa es  $W^{-1} = R^{-1} V^{-1}$ . Se puede demostrar fácilmente que eligiendo:

$$R = \begin{bmatrix} 1/2 & -j1/2 \\ 1/2 & j1/2 \end{bmatrix} \tag{16}$$

se tiene

$$A^* = \begin{bmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{bmatrix} \quad (17)$$

y

$$W = [V_{\Re} \quad V_{\Im}] \quad (18)$$

es decir

$$\begin{cases} \dot{x}_1^* = \alpha x_1^*(t) + \omega x_2^*(t) & x_1^*(0) = x_{10}^* \\ \dot{x}_2^* = -\omega x_1^*(t) + \alpha x_2^*(t) & x_2^*(0) = x_{20}^* \end{cases} \quad (19)$$

Como se ve, el sistema no está desacoplado, pero considerando el caso  $\alpha = 0$  se puede deducir fácilmente la forma de las trayectorias de forma cualitativa.

❖ **Centro:**  $l_{1,2} = \pm j\omega$

En este caso, la ecuación (19) se reduce a:

$$\begin{cases} \dot{x}_1^* = \omega x_2^*(t) \\ \dot{x}_2^* = -\omega x_1^*(t) \end{cases} \quad (20)$$

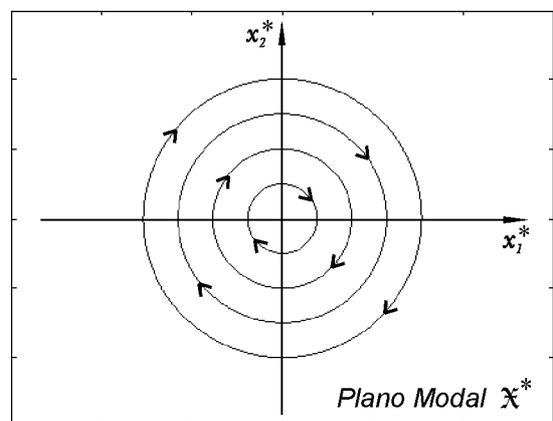
Multiplicando ambas ecuaciones de (20) por  $2 \cdot x_i^*(t)$ ,  $i = 1, 2$  respectivamente, y sumando m.a.m. se tiene:

$$\begin{aligned} 2 x_1^* \dot{x}_1^* &= 2 \omega x_1^* x_2^* \\ + \\ 2 x_2^* \dot{x}_2^* &= -2 \omega x_1^* x_2^* \\ \hline \frac{d}{dt} (x_1^{*2} + x_2^{*2}) &\equiv 0 \quad \forall t \Leftrightarrow (x_1^{*2} + x_2^{*2}) \equiv cte \quad \forall t \end{aligned}$$

Luego, las trayectorias satisfacen la ecuación de una circunferencia en el plano  $X^*$ . Como la condición vale  $\forall t$ , también la c.i. está sobre la circunferencia. Por lo tanto el retrato de fase consiste de circunferencias concéntricas con el origen  $x^* = 0$ .

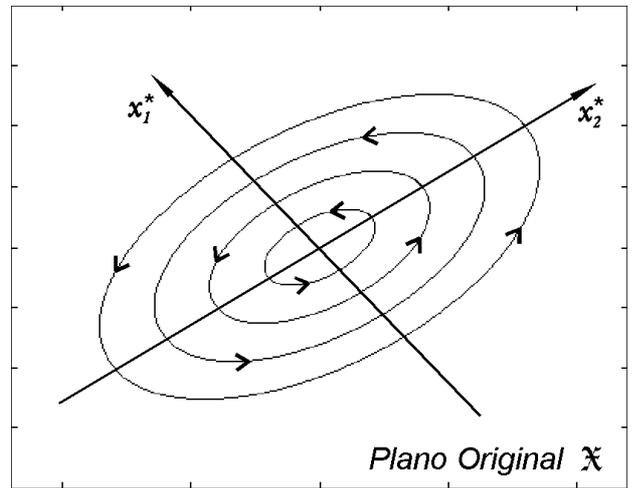
El sentido de giro se obtiene analizando, por ejemplo, la derivada  $\dot{x}_1^*(t)$  en la primera ecuación de (20):

en el semiplano  $x_2^* > 0$  es  $\dot{x}_1^* > 0$ , y en el correspondiente a  $x_2^* < 0$  tenemos  $\dot{x}_1^* < 0$ .



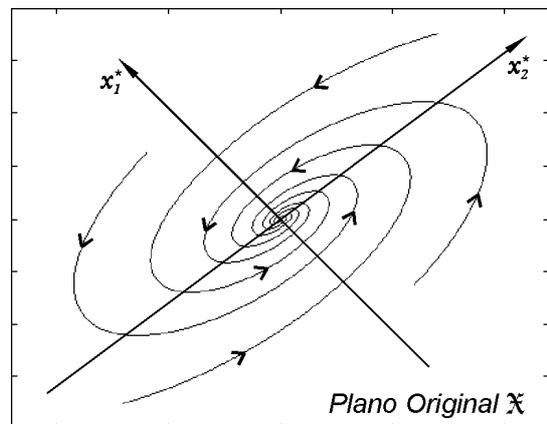
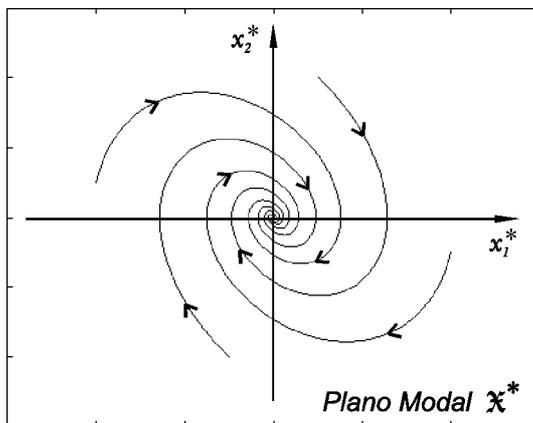
En el plano original  $X$  las trayectorias son elipsoides, cuyos ejes -las transformadas de  $x_{1,2}^*$ - están en las direcciones de  $V_{\Re}$  y  $V_{\Im}$ , respectivamente.

El origen es un punto de equilibrio (internamente) estable (en el sentido Lyapunov), pero no asintóticamente estable.



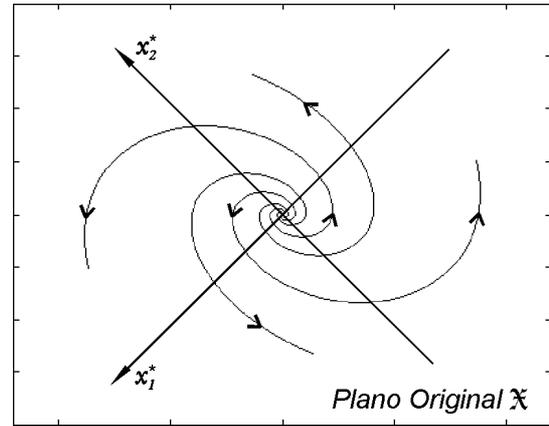
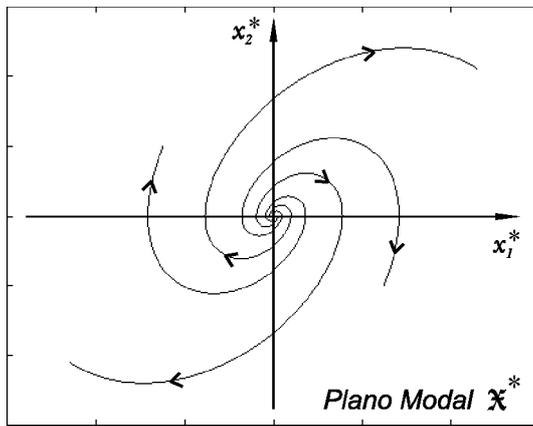
❖ **Foco Estable:**  $l_{1,2} = a \pm jw$ ,  $a < 0$

En vez de las oscilaciones permanentes del caso anterior, se tienen oscilaciones amortiguadas, como puede verse intuitivamente en el coeficiente  $e^{\alpha.t}$  que amortigua a las armónicas del segundo miembro en (14).



❖ **Foco Inestable:**  $l_{1,2} = a \pm jw$ ,  $a > 0$

Con un análisis análogo al del caso anterior se concluye que se tienen oscilaciones divergentes en el origen, debido a la amplificación sostenida por  $e^{\alpha.t}$ . Los retratos de fase correspondientes son:



En ambos casos los sentidos de giro se pueden analizar en (19). Respecto de estos tres últimos casos obsérvese que –una vez que se calcularon los autovalores y se conoce el caso– el sentido de giro de las trayectorias puede determinarse directamente de las EE originales, analizando la derivada de cualquier variable  $x_{1,2}$  en alguno de ambos ejes.

◆ **Trayectorias en coordenadas polares:**

La solución del sistema de ecuaciones (19) puede ser interpretada desde un punto de vista bastante intuitivo si expresamos las trayectorias solución en coordenadas polares, como sigue:

$$\rho(t) = \sqrt{x_1^{*2}(t) + x_2^{*2}(t)} \quad ; \theta(t) = \text{tg}^{-1}\left(\frac{x_2^*(t)}{x_1^*(t)}\right)$$

donde  $\rho(t)$  es el módulo y  $\theta(t)$  el ángulo de un vector posición que se mueve sobre la trayectoria a partir de una c.i. cualquiera.

Luego las ecuaciones de estado vendrán dadas por:

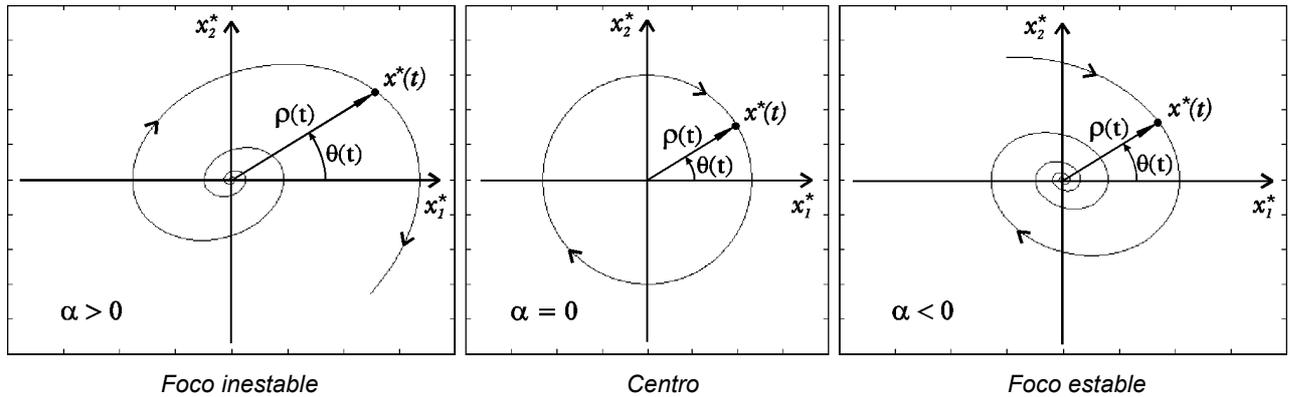
$$\dot{\rho} = \frac{2x_1^* \dot{x}_1^* + 2x_2^* \dot{x}_2^*}{2\sqrt{x_1^{*2} + x_2^{*2}}} = \frac{x_1^*(\alpha x_1^* + \omega x_2^*) + x_2^*(-\omega x_1^* + \alpha x_2^*)}{\sqrt{x_1^{*2} + x_2^{*2}}} = \frac{\alpha(x_1^{*2} + x_2^{*2})}{\sqrt{x_1^{*2} + x_2^{*2}}} = \frac{\alpha \rho^2}{\rho} = \alpha \rho$$

$$\dot{\theta} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x_2^*}{x_1^*}\right)^2} \frac{d\left(\frac{x_2^*}{x_1^*}\right)}{dt} = \frac{x_1^{*2}}{x_1^{*2} + x_2^{*2}} \frac{x_1^* \dot{x}_2^* - x_2^* \dot{x}_1^*}{x_1^{*2}} = \frac{1}{x_1^{*2} + x_2^{*2}} \left[ -\omega(x_1^{*2} + x_2^{*2}) \right] = -\omega$$

es decir: 
$$\begin{cases} \dot{\rho} = \alpha \rho \\ \dot{\theta} = -\omega \end{cases}$$

La solución de este sistema para una c.i.  $(\rho_0, \theta_0)$  conocida será entonces: 
$$\begin{cases} \mathbf{r}(t) = e^{\alpha t} \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{q}(t) = -\omega t + \mathbf{q}_0 \end{cases}$$

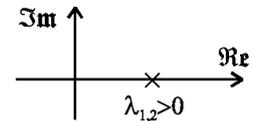
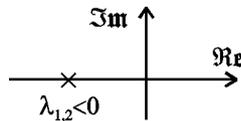
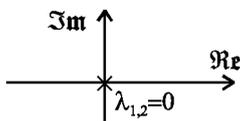
Aquí puede verse que el signo de  $\alpha$  determinará el tipo de retrato de fase, según se ha visto anteriormente:



## AUTOVALORES IGUALES

### ◆ *Caso: matriz A diagonalizable*

El primer grupo es el de todas las matrices **A diagonalizables** con autovalores dobles (por lo tanto reales). Los tres casos del grupo son:



Con  $V = [V_1 \ V_2]$  siendo  $V_{1,2}$  autovectores l.i. asociados a  $\lambda_{1,2}$  y  $x = V \tilde{x}$  aplicando formalmente el procedimiento de desacoplamiento, pasamos a:

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A} \tilde{x} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \tilde{x} \quad ; \quad \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0 = V^{-1} x_0 \quad ; \quad \tilde{A} = V^{-1} A V \quad (21)$$

Recordemos que esto significa que en la nueva base  $(V_1, V_2)$  se tiene la nueva matriz del sistema  $\tilde{A} = \text{diag}(\lambda, \lambda)$ . Pero en realidad para los tres casos de este grupo la matriz del sistema es diagonal en cualquier base que se elija para  $\mathfrak{R}^2$ . Efectivamente de (21) se tiene:

$$V \tilde{A} V^{-1} = A \quad \text{y con} \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \lambda I$$

resulta:

$$A = V \lambda I V^{-1} = \lambda V I V^{-1} = \lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \tilde{A}$$

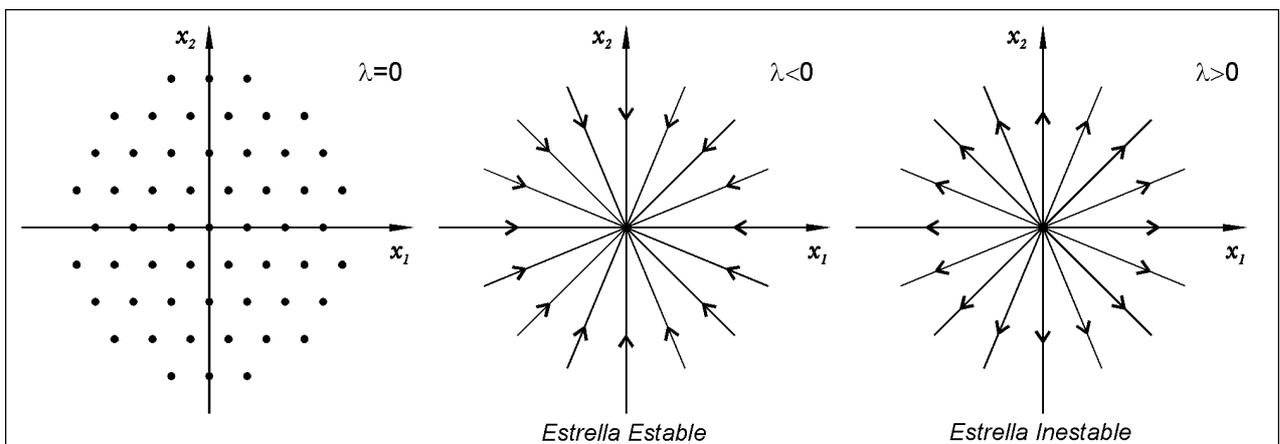
es decir, la matriz  $A$  original ya viene dada en forma diagonal **con sus elementos diagonales iguales**.

Como para **cualquier transformación  $S$  regular** tal que  $x = S x^*$ ,  $S = [S_1 \ S_2]$  con  $S_{1,2}$  l.i., vale la

relación  $A^* = S^{-1} A S$ , resulta que:

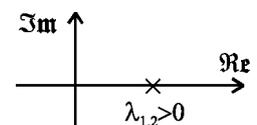
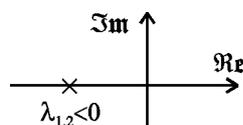
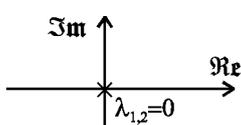
$$A^* = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Pero esto quiere decir (recordar la interpretación geométrica de la transformación  $V$ , o aquí para el caso  $S$ ) que en sendas direcciones de cualquier par de vectores l.i.  $S_1 \ S_2$ , se tienen trayectorias que son rectas con evolución temporal determinada por el modo  $e^{\lambda \cdot t}$ . Por consiguiente se tienen los tres retratos de fase siguientes:



◆ **Caso: matriz  $A$  no diagonalizable**

El segundo comprende tres casos con la misma distribución de autovalores que el anterior, con la diferencia esencial de que la matriz  **$A$  no es diagonalizable**:



A no diagonalizable significa que no se pueden hallar dos autovectores l.i. para el autovalor doble  $\lambda$ . Un teorema del Álgebra Lineal asegura que existe una transformación  $V = [V_1 \ V_2]$  regular ( $V_{1,2}$  l.i.; obviamente ambos no son autovectores!) tal que en la nueva base la matriz  $\tilde{A}$  tiene una forma particular muy simple, llamada bloque de Jordan:

$$\tilde{A} = V^{-1} A V = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (22)$$

De aquí se puede deducir la condición que define a los vectores  $V_{1,2}$ :

$$V \tilde{A} = A V$$

$$V \tilde{A} = \left[ \begin{array}{c|c} V \begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \end{bmatrix} & V \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix} \end{array} \right] = [\lambda V_1 \mid V_1 + \lambda V_2]$$

$$A V = [A V_1 \mid A V_2]$$

igualando columna a columna, se obtiene:

$$\lambda V_1 = A V_1 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda I - A) V_1 = \bar{0} \quad \Leftrightarrow \quad V_1 \text{ es autovector de } A$$

$$V_1 + \lambda V_2 = A V_2 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda I - A) V_2 = -V_1$$

$V_2$  se dice un *vector principal* de  $V_1$ . Ambos son l.i.. De (22), el modelo en función de las nuevas variables es:

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \tilde{x} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \lambda \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_2 = \lambda \tilde{x}_2 \end{cases} \quad \begin{matrix} \tilde{x}_1(0) = \tilde{x}_{10} \\ \tilde{x}_2(0) = \tilde{x}_{20} \end{matrix}$$

La solución es muy simple, ya que la dinámica en la dirección del vector principal es independiente:

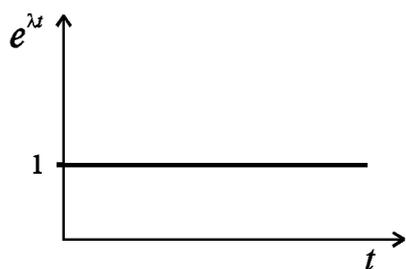
$$\tilde{x}_2(t) = \tilde{x}_{20} \cdot e^{\lambda t}. \quad (23)$$

que es una función conocida que se puede tomar como entrada en la ecuación que resta, en la dirección del autovector ( $V_1$ ), y resolverla según la fórmula general:

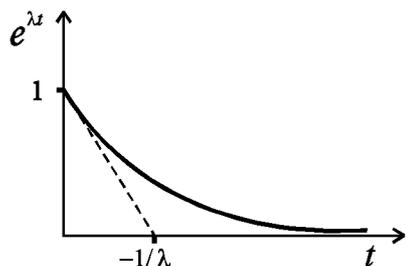
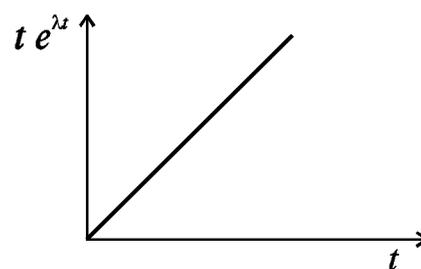
$$\begin{aligned} \dot{x} = a x + b u &\Rightarrow x(t) = e^{a \cdot t} x_0 + \int_0^t e^{a(t-\tau)} b u(\tau) d\tau \Rightarrow \tilde{x}_1(t) = e^{\lambda t} \tilde{x}_{10} + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} \tilde{x}_{20} e^{\lambda \tau} d\tau \\ &\Rightarrow \tilde{x}_1(t) = e^{\lambda t} \tilde{x}_{10} + t e^{\lambda t} \tilde{x}_{20} \end{aligned} \quad (24)$$

Vemos entonces que aparecen dos modos en la dinámica libre: al modo exponencial  $e^{1 \cdot t}$  presente en ambas direcciones se agrega el modo  $t \cdot e^{1 \cdot t}$  en la dirección del autovector, producto de que allí

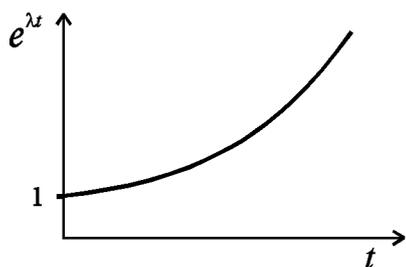
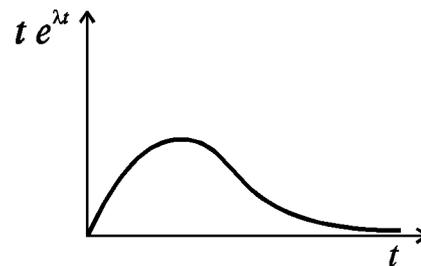
hay incidencia de la dinámica de la otra dirección. ( Este caso se corresponde con el de la respuesta a las c.i. de un  $P_{T2}$  con  $\xi=1$ , para  $\lambda < 0$  ). Gráficamente, los modos son:



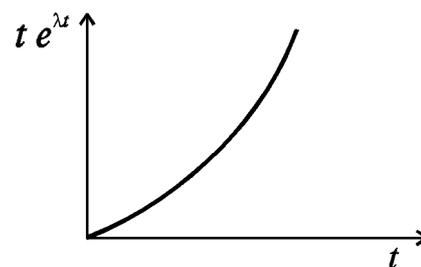
$\lambda=0$



$\lambda < 0$



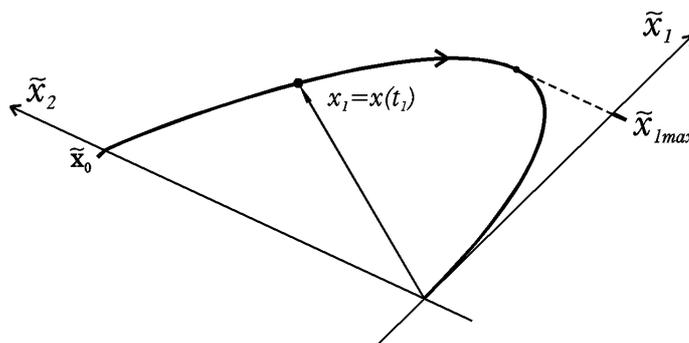
$\lambda > 0$

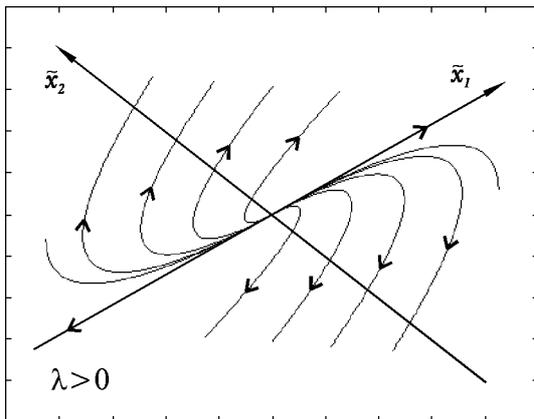
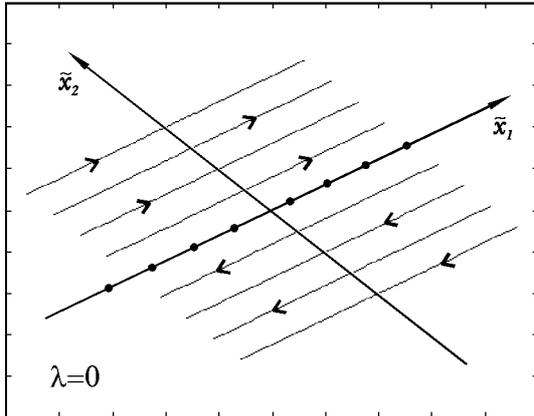
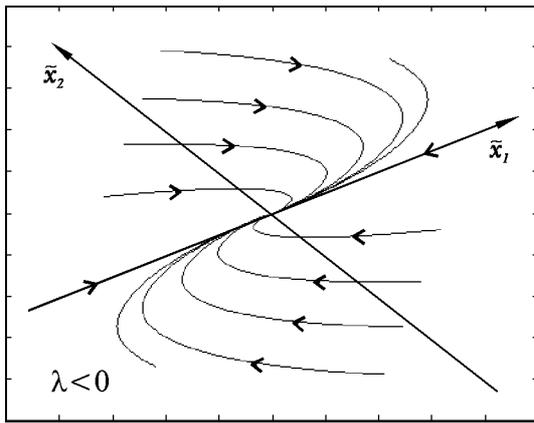


Con esto ya se está en condiciones de deducir el retrato de fases de cada caso. Simplemente hay que combinar geoméricamente los modos dibujados, ponderados por la respectiva c.i. según (23) y (24). Si bien uno no puede imaginar su propia técnica, una muy simple consiste en deducir el retrato completo a partir de una única c.i. sobre la dirección del vector principal  $V_2$ . La ilustramos aquí para el caso  $\lambda < 0$ :

Una vez ubicados  $V_1$  y  $V_2$  se tienen las nuevas direcciones  $\tilde{x}_1$  y  $\tilde{x}_2$ . La c.i. es  $\tilde{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{x}_{20} \end{bmatrix}^T$ . De (23) vemos que en la dirección de  $V_2$  tenemos una convergencia al origen  $\tilde{x}_2 = \tilde{x}_{20} e^{\lambda t}$ . De (24) vemos que en la dirección de  $V_1$  tenemos  $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_{10} t e^{\lambda t}$ . Esta componente de la trayectoria se puede representar por un punto que sale del

origen, crece por  $\tilde{x}_1$ , alcanza un máximo, y vuelve asintóticamente al origen. La composición de ambas evoluciones da la trayectoria dibujada a continuación:





Esta trayectoria nos exige de replantear la originada en cualquier otra c.i. genérica  $\tilde{x}_{10} \neq 0$ ,  $\tilde{x}_{20} \neq 0$ . En efecto, basta con ubicarse en un punto cualquiera de la trayectoria deducida para  $t = t_1 > 0$ , y considerar ese estado  $x_1 = x(t_1)$  como la nueva c.i. (es válido correr el cero del tiempo a  $t_1$ , ya que el modelo es estacionario). Con esto se tiene la forma de cualquier trayectoria genérica.

Los retratos de fase para los tres casos se muestran a la izquierda.

## EJEMPLOS RESUELTOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

**Problema N° 1**

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

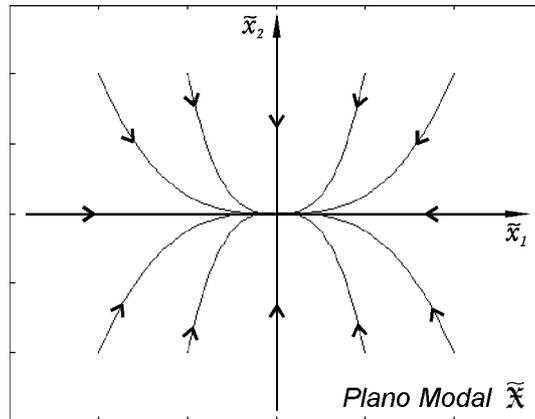
**P1)** Se escribe el polinomio característico y se calculan los autovectores:

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda + 2 & -1 \\ -2 & \lambda + 3 \end{bmatrix} \quad \pi(\lambda) = \det[\lambda I - A] = \lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \sigma(A) = \{\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = -4\}$$

Nuestro retrato de fases será entonces un **nodo estable** con  $\lambda_1$  "lento" y  $\lambda_2$  "rápido" (en términos relativos). Si sólo interesa el patrón del retrato de fase, el problema se puede concluir aquí, dibujándolo en el plano  $(\tilde{x}_1 \ \tilde{x}_2)$ , considerando a ese par de ejes coordenados cartesianos ortogonales. Es decir, consideramos que nos es dado el sistema desacoplado:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_1 &= -\tilde{x}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= -4\tilde{x}_2\end{aligned}$$

(concavidad hacia el modo rápido)



**P2)** Si interesa ubicar el retrato fase en el plano original  $(x_1 \ x_2)$ , i.e. tomando a estos ejes originales como el sistema coordenado cartesiano ortogonal, entonces hay que ubicar las direcciones  $\tilde{x}_1$  y  $\tilde{x}_2$  según los autovectores asociados a  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  respectivamente:

$$[\lambda_i I - A]V_i = 0 \quad \text{con} \quad i=1,2$$

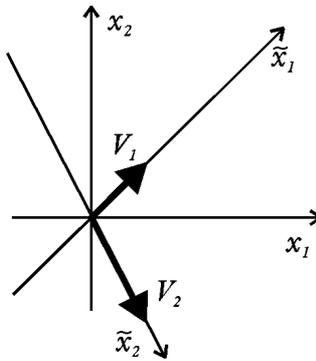
$$\lambda_1 = -1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_{11} - v_{21} = 0 \\ -2v_{11} + 2v_{21} = 0 \end{cases}$$

El conjunto de todas las soluciones es de la forma  $v_{11} = v_{21}$ , i.e., se puede tomar como autovector a cualquier vector de la recta  $x_2 = x_1$ .

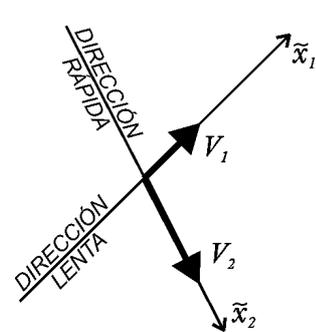
Escogemos  $V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\lambda_2 = -4 \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2v_{12} - v_{22} = 0 \\ -2v_{12} + v_{22} = 0 \end{cases}$$

Las soluciones se encuentran sobre la recta  $v_{22} = -2v_{12}$ . Luego, escogemos:  $V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$



Redibujamos limpiando  $x_1$  y  $x_2$  ya que el sistema de referencia  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$  es el que verdaderamente importa para ubicar el retrato de fase.-



Con los dos autovectores se tiene la **Matriz Modal de la Transformación de Semejanza**:

$$x = V \tilde{x} \quad \text{con} \quad V = [V_1 \quad V_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

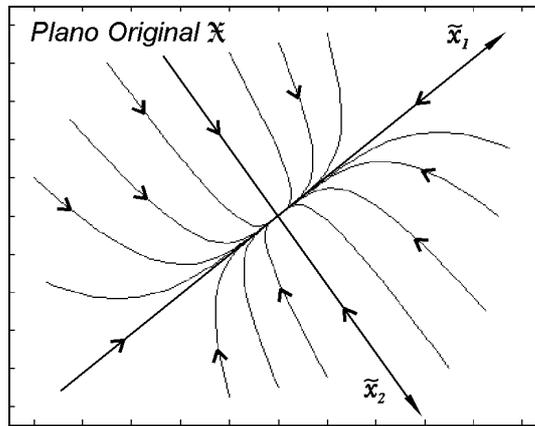
se puede calcular su inversa 
$$V^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si se quiere se puede verificar que  $\tilde{A} = V^{-1}AV$ , para el caso:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

*Esto último (en cursiva) es innecesario para dibujar el retrato de fase. Si se desea puede usarse como elemento de control de los cálculos.-*

**P3)** Se dibuja el nodo estable en el espacio original tomando a las nuevas direcciones  $\tilde{x}_1$  y  $\tilde{x}_2$  como referencia:



**Problema N° 2:**  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$  Solución: **nodo inestable**  $\sigma(A) = \{\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 4\}$

**Problema N° 3:**  $A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

**P1)** Determinación de los autovalores (tipo de retrato de fase)

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda + 3 & 2 \\ -2 & \lambda - 2 \end{bmatrix} \quad \pi(\lambda) = \det[\lambda I - A] = \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \sigma(A) = \{\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -2\}$$

Tenemos entonces una **ensilladura**, con  $\lambda_1$  inestable y  $\lambda_2$  estable.

**P2)** Cálculo de la nueva base (direcciones modales en el plano original)

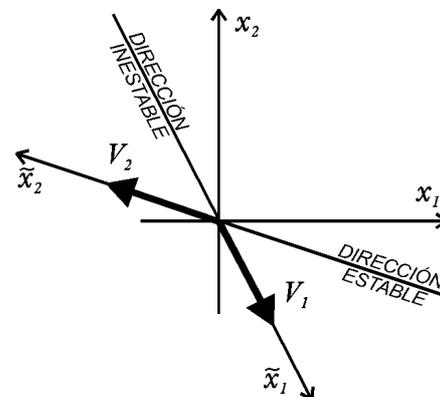
$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4v_{11} + 2v_{21} = 0 \\ -2v_{11} - v_{21} = 0 \end{cases}$$

$v_{11} = -2v_{21}$  elegimos  $V_1 = [1 \quad -2]^T$

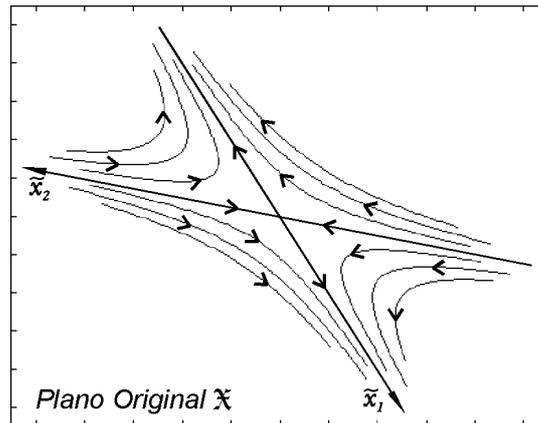
$$\lambda_2 = -2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_{12} + 2v_{22} = 0 \\ -2v_{12} - 4v_{22} = 0 \end{cases}$$

$v_{12} = -2v_{22}$

elegimos  $V_2 = [-2 \quad 1]^T$



**P3)** Retrato de fases en el plano original:



**Problema N° 4:**  $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$

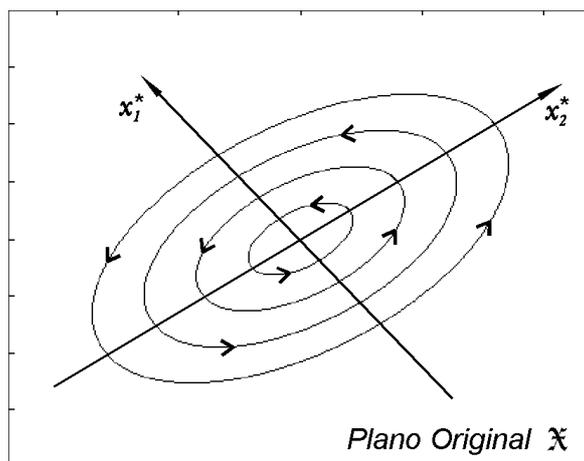
**P1)** Determinación de los autovalores (tipo de retrato de fases)

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda + 1 & -2 \\ 5 & \lambda - 1 \end{bmatrix} \quad \pi(\lambda) = \det[\lambda I - A] = \lambda^2 + 9 = 0 \Rightarrow \sigma(A) = \{\lambda_1 = j3 \quad \lambda_2 = -j3\}$$

Nuestro retrato es entonces un **centro**.

**P3)** Retrato de fases en el Plano original (salteamos el P2)

Son elipses concéntricas. Podemos determinar el sentido de las trayectorias de una cualquiera de las EE originales, pero no los ejes de las elipses, aspecto que ignoramos en la construcción del retrato de fase, por ahora. A continuación se muestra un ejemplo sobre dos ejes cualesquiera:



El sentido de giro puede leerse por ejemplo de la 1<sup>ra</sup> EE: para  $x_1 = 0$  y  $x_2 > 0$  tenemos  $\dot{x}_1 > 0$

**P2)** Cálculo de las nuevas bases:

De la teoría vista sabemos que con  $W = [V_{\Re} \ V_{\Im}]$ ,  $x = W x^*$  se pasa de  $\dot{x} = A x$  a  $\dot{x}^* = \begin{bmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{bmatrix} x^*$  (para este caso,  $\alpha = 0$ ). Donde al par de autovalores complejos conjugados  $\lambda$  y  $\bar{\lambda}$  corresponde el par de autovectores complejos conjugados  $V = V_{\Re} + jV_{\Im}$  y  $\bar{V} = V_{\Re} - jV_{\Im}$ .

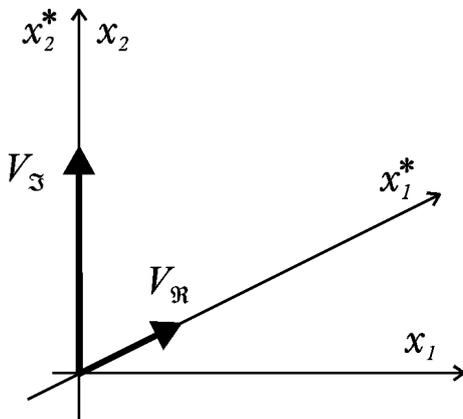
Cálculo de los autovectores:

$$[\lambda I - A]V = 0 \quad \lambda_1 = j3 \Rightarrow \begin{bmatrix} j3+1 & -2 \\ 5 & j3-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (j3+1)v_{11} - 2v_{21} = 0 \\ 5v_{11} + (j3-1)v_{21} = 0 \end{cases}$$

de donde obtenemos  $2v_{21} = (j3+1)v_{11} \ ; \ \forall v_{11}$

Eligiendo  $v_{11} = 2$  resulta  $v_{21} = (1+j3)$ , luego se tiene  $V = \begin{bmatrix} 2 \\ 1+j3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = V_{\Re} + jV_{\Im}$ .

De aquí:



Es con respecto a esta nueva base  $\{V_{\Re} \ V_{\Im}\}$  que cada trayectoria conserva para todo tiempo la misma magnitud que su c.i.. Obsérvese que la magnitud de cada componente  $x_i^*$  se expresa tomando como unidad la longitud del correspondiente vector de la base ( $|V_{\Re}| = \sqrt{5}$  para  $x_1^*$  y  $|V_{\Im}| = 3$  para  $x_2^*$ ).

Como ambos módulos no son muy diferentes y el ángulo entre ambos vectores no es muy distinto de  $\pi/2$ , se tiene que las elipses son bastante parecidas a las circunferencias del retrato modal.

**Problema N° 5:**  $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

**P1)** Determinación de los autovalores

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda + 1 \end{bmatrix}$$

$$\pi(\lambda) = \det[\lambda I - A] = \lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \sigma(A) = \{\lambda_1 = -0,5 + j0,866 \quad \lambda_2 = -0,5 - j0,866\}$$

Luego, tenemos un **foco estable**.

**P2)** Se realiza despues del punto 3

**P3)** Sentido de giro:

Sabemos que es una espiral (foco estable). Podemos determinar su sentido de giro a partir de cualquiera de las EE originales (pero no los ejes de la espiral, cosa que ignoraremos aquí). De la 1<sup>ra</sup> EE: para  $x_2 > 0$  tenemos  $\dot{x}_1 < 0$  esto implica levogiro (giro a la izquierda).

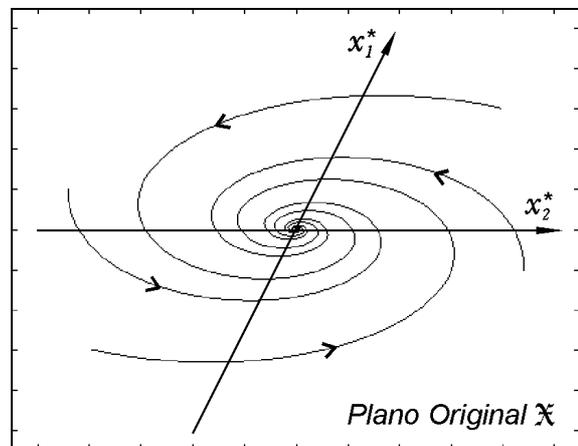
**P2)** Cálculo de las nuevas bases:

Trabajando de igual forma que en ejemplo anterior, haciendo  $[\lambda I - A]V = 0$  se obtiene una condición:

$$v_{11} = \left( \frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) v_{21} \quad ; \quad \forall v_{21}. \quad \text{Luego eligiendo } v_{21} = 1 \rightarrow v_{11} = \frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{se tiene } V = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{con lo cual} \quad V_{\Re} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad V_{\Im} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente el retrato de fase tiene la forma:



**Problema N° 6:**  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & 2 \end{bmatrix}$  Solución: **foco inestable**;  $\sigma(A) = \{\lambda_1 = 1 + j6 \quad \lambda_2 = 1 - j6\}$

**Problema N° 7:**  $A = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$  Solución: **estrella estable**;  $\sigma(A) = \{\lambda_1 = -4 \quad \lambda_2 = -4\}$

**Problema N° 8:**  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$

**P1)** Determinación de los autovalores

$$II - A = \begin{bmatrix} I & -1 \\ 4 & I + 4 \end{bmatrix} \quad \pi(\lambda) = \det[\lambda I - A] = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \sigma(A) = \{\lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = -2\}$$

Autovalor doble. Sabemos que la forma modal no es diagonal porque sino, al ser doble el autovalor también sería diagonal la matriz original (sería el caso del Problema N°7). Luego la matriz modal es un **bloque de Jordan estable**:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

**P2) Determinación de la nueva base**

Cálculo del autovector  $V_1$ :

$$[\lambda I - A]V_1 = 0 \quad \lambda_1 = -2 \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2v_{11} - v_{21} = 0 \\ 4v_{11} + 2v_{21} = 0 \end{cases}$$

Del sistema anterior, obtenemos  $-2v_{11} = v_{21}$ . Elegimos  $V_1 = [1 \quad -2]^T$

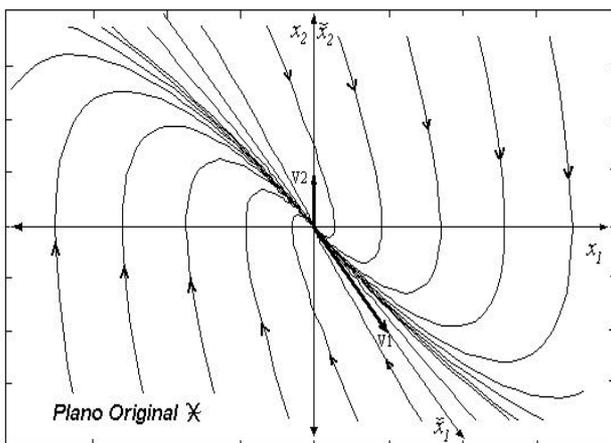
Cálculo del vector principal  $V_2$ :

$$[\lambda I - A]V_2 = -V_1 \quad \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2v_{12} - v_{22} = -1 \\ 4v_{12} + 2v_{22} = 2 \end{cases}$$

De donde obtenemos la ecuación de la recta:  $v_{22} = 1 - v_{12}$ , Sobre la cual se puede elegir cualquier vector.

Elegimos entonces:  $V_2 = [0 \quad 1]^T$

**P3) Retrato de fase en el plano original:**



La dirección del autovector separa al plano de fase en dos zonas antisimétricas respecto del origen.

**Problema N° 9:**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Solución: **Jordan**

$$\sigma(A) = \{\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 0\}$$

**Problema N° 10:**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución: **Jordan inestable**

$$\sigma(A) = \{\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 2\}$$

## APLICACION A SISTEMAS NO LINEALES (SNL)

---

Como se sabe se puede aproximar con un MILin el MIEEx de un SNL en tomo a cada uno de sus puntos de equilibrio. Surge el interrogante siguiente: ¿ La validez de la aproximación de la EE del MIEEx por las del MILin para pequeñas variaciones  $Dx$  de los estados, implica que también las soluciones que generan ambos modelos son aproximadas en torno a los P.E. correspondientes ? Existen muchos resultados, de entre los cuales a continuación se brindan dos.

El Primer Método, o Método Indirecto de Lyapunov da una respuesta cualitativa a este interrogante: aborda el problema de analizar la estabilidad del PE del SNL sobre el MILin.

El Teorema de Hartman y Grobman da una condición suficiente que permite concluir no sólo sobre la estabilidad del PE sino también sobre la forma de las trayectorias del SNL en las cercanías del PE.

### ♦ MÉTODO INDIRECTO DE LYAPUNOV

Teorema: sea  $x = 0$ , el origen del espacio de estados, punto de equilibrio del SNL:

$$\dot{x} = f(x)$$

donde  $f : D \rightarrow \mathfrak{R}^n$  es continuamente diferenciable para todo  $x \in D \subset \mathfrak{R}^n$ . Sea

$$A = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=0} \text{ la matriz Jacobiana de } f(x)$$

Entonces,

1. El origen es asintóticamente estable si  $\Re\{I_i\} < 0$  para todos los autovalores de  $A$ .
2. El origen es inestable si  $\Re\{I_i\} > 0$  para uno o más autovalores de  $A$ .

Si el SNL posee algún punto de equilibrio que no sea el origen, entonces, luego de obtener el MIEEx en torno de dicho punto de equilibrio se está en condiciones de aplicar este teorema. Nótese que el teorema brinda una condición suficiente **local** a cada punto de equilibrio.

### ♦ TEOREMA DE HARTMAN Y GROBMAN (1960)

DEFINICION: Un punto de equilibrio  $\tilde{x}$  de un SNL  $\dot{x} = f(x)$  se dice hiperbólico si la matriz Jacobiana del

MILin  $A := \frac{\partial f(x)}{\partial x}$  **no tiene** ningún autovalor con parte real nula.

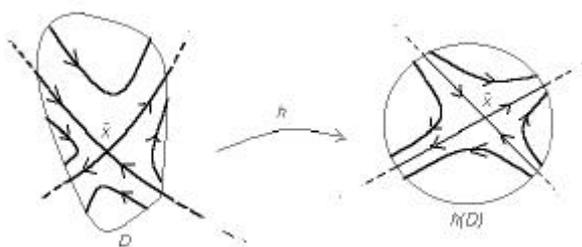
### Teorema de Hartman y Grobman (Enunciado cualitativo)

En las proximidades de un P.E. hiperbólico  $\tilde{x}$ , las soluciones del SNL  $\dot{x} = f(x)$  tienen la misma estructura cualitativa que el SL  $\Delta\dot{x} = A\Delta x$  (con  $A := \frac{\partial f(x)}{\partial x}$ ). En otras palabras, el retrato de fase del SNL en torno a un P.E. hiperbólico es del mismo tipo que el de su aproximación lineal. Obsérvese que si el P.E. es no hiperbólico en un principio nada se puede decir.-

Como ejemplo de aplicación de la aproximación de SNL por modelos lineales en torno a P.E. puede verse el problema exhaustivamente resuelto en EFT02.91, del modelo presa-depredador de Lotka-Volterra.

### Teorema de Hartman y Grobman (Enunciado más Riguroso)

*Teorema: Si el PE del SNL es hiperbólico, entonces existe un homeomorfismo (es decir una función con inversa, ambas continuas, definidas en un entorno  $D$  del P.E.) que transforma las trayectorias del SNL en las del SLin, preservando el sentido en el que se recorren:*



Una manera intuitiva de describir los resultados de estos teoremas es la siguiente:

En un cierto entorno del punto de equilibrio, el campo vectorial  $f : D \rightarrow \mathfrak{R}^n$  se puede expresar mediante el MIEx como:

$$\Delta\dot{x} = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Big|_{\tilde{x}} \Delta x + g(\Delta x)$$

donde  $g(\Delta x)$  contiene los términos de las derivadas de orden superior de las serie de Taylor, i. e., no contiene términos lineales:

$$\frac{\|g(\Delta x)\|}{\|\Delta x\|} \rightarrow 0 \quad \text{si} \quad \|\Delta x\| \rightarrow 0$$

Entonces, el teorema dice que en las cercanías del PE la dinámica del **SNL** está dominada por la aproximación lineal si el PE es hiperbólico. Pero si no lo es, entonces el comportamiento del  $\Sigma$ NL dependerá exclusivamente del comportamiento de  $g(\Delta x)$ .

## REFERENCIAS

---

- [1] **Junco, Sergio:** *"Trayectorias en el espacio de estados n-dimensional del modelo autónomo"*  
A02C10.94 - Cátedra DSF - Dpto. Electrónica - F.C.E.I.A. - U.N.R.
- [2] **Junco, Sergio:** *"Solución de la ecuación de estado"*  
A01C10.94 - Cátedra DSF - Depto. Electrónica - F.C.E.I.A. - U.N.R.
- [3] **Khalil, Hassan:** *"Nonlinear Systems"*  
2<sup>nd</sup> ed., Prentice-Hall, 1996 (cap 1).
- [4] **D'Attellis C.:** *"Introducción a los Sistemas No Lineales de Control y sus Aplicaciones"*  
AADECA (1992)
- [5] **Levine W. (ed.):** *"The Control Handbook"*  
IEEE Press, (1998), Cap. 56, pp889-894.