

# **Introducción a la modelización con Bond Graphs**

**Cátedra de Dinámica de los Sistemas Físicos**

**Depto. de Electrónica, FCEIA, UNR**

Introducción a la modelización con Bond Graphs -Cátedra DSF - FCEIA - UNR

1

## **Características Generales**

- **Los Bond Graphs (BG) son un lenguaje**
  - gráfico
  - acausal
  - con simbología
    - cuantificadora del flujo instantáneo de potencia
    - unificada
    - independiente de alinealidades

**para la modelización de Sistemas Físicos**

Introducción a la modelización con Bond Graphs -Cátedra DSF - FCEIA - UNR

2

## Características Generales

- Los BG proveen una metodología

- sistemática
- estructurada, orientada a objetos
- unificada

de modelado, análisis y simulación de  
Sistemas Físicos Dinámicos ( $\Sigma\Phi\Delta$ )

| DB / EE-ES / PO / SD

$\Sigma\Phi R \rightarrow \Sigma\Phi I \rightarrow DE \rightarrow DECO \rightarrow$  | ANALISIS: Estabilidad

| Propiedades Estructurales

Introducción a la modelización con Bond Graphs - Cátedra DSF - FCEIA - UNR

3

## Modelado con BG

- $\Sigma\Phi R$  (Sistema Físico Real)  $\rightarrow \Sigma\Phi I$  (Idealizado):

- Análisis de {Sistema + Problema}
- Identificación de fenómenos dominantes
- Hipótesis simplificadoras

etapas

- $\Sigma\Phi I \rightarrow DE \rightarrow DECO \rightarrow \dots$ : completamente  
algoritmizables

Introducción a la modelización con Bond Graphs - Cátedra DSF - FCEIA - UNR

4

## Modelado con BG

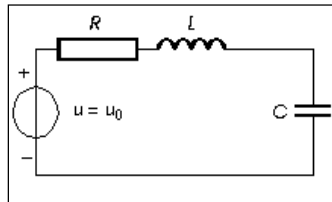
- ***Sistema:*** disposición delimitada de entidades interactuantes
- ***Sistema:*** {estructura + componentes}
- ***Sistema Físico:*** interacción consiste en transformación y/o transporte de materia y/o energía.
- ***Sistema Físico Dinámico:*** almacenamiento de materia y/o energía.

## Modelado con BG

### DOS EJEMPLOS SIMPLES

# Modelado con BG

## Circuito Electrico Serie



Estructura:

Serie **Conserva** Potencia

→ Vínculo Estructural **I**

**Componentes:**

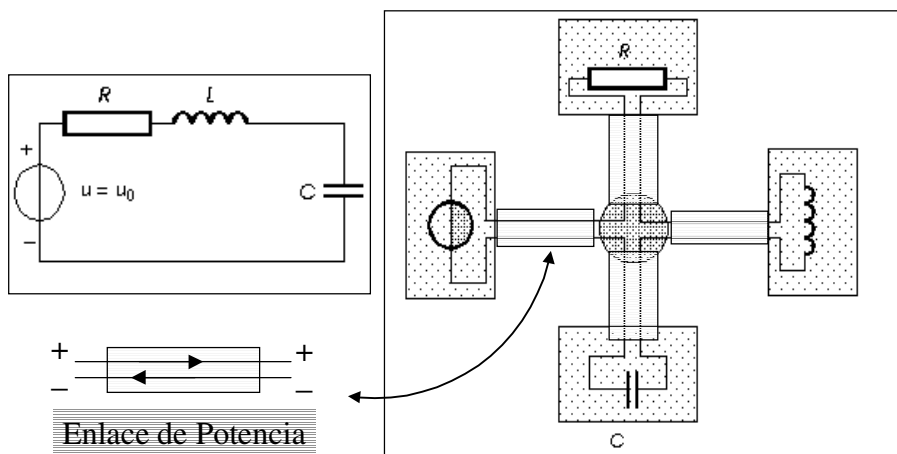
|                    |                                     |                      |             |
|--------------------|-------------------------------------|----------------------|-------------|
| <u>Fuente</u> :    | <b>Genera</b> Energía               | <b>S</b> (Source)    | Fuente      |
| <u>Resistor</u> :  | <b>Disipa</b> Energía               | <b>R</b> (Resistor)  | Disipador   |
| <u>Bobina</u> :    | <b>Conserva</b> Energía (magnética) | <b>I</b> (Inertia)   | Almacenador |
| <u>Capacitor</u> : | <b>Conserva</b> Energía (eléctrica) | <b>C</b> (Capacitor) | Almacenador |

Introducción a la modelización con Bond Graphs - Cátedra DSF - FCEIA - UNR

7

# Modelado con BG

## Una extraña pero ilustrativa topología

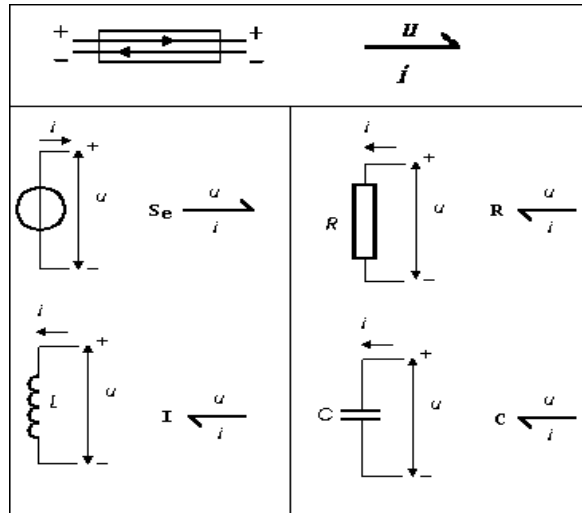


Introducción a la modelización con Bond Graphs - Cátedra DSF - FCEIA - UNR

8

# Modelado con BG

## Elementos estructurales y componentes

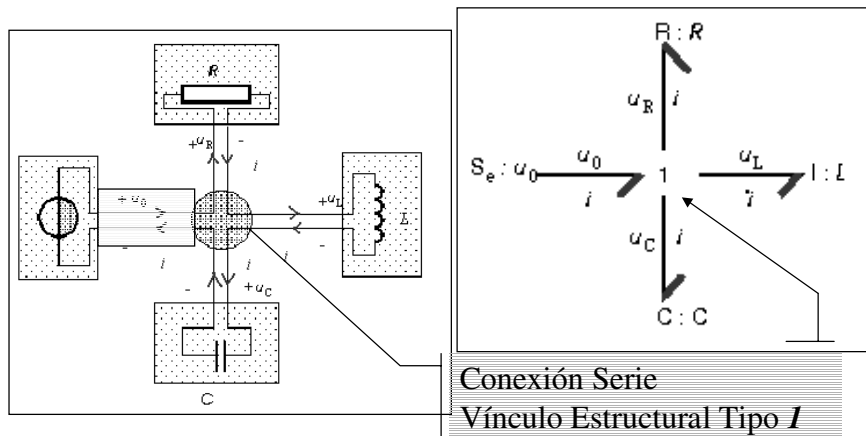


Introducción a la modelización con Bond Graphs - Cátedra DSF - FCEIA - UNR

9

# Modelado con BG

## Bond Graph del Circuito Serie



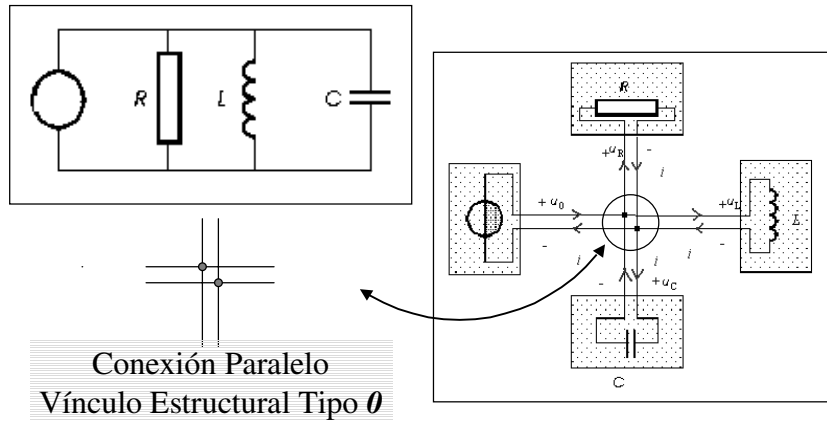
Conexión Serie  
Vínculo Estructural Tipo I

Introducción a la modelización con Bond Graphs - Cátedra DSF - FCEIA - UNR

10

# Modelado con BG

## Circuito Electrico Paralelo

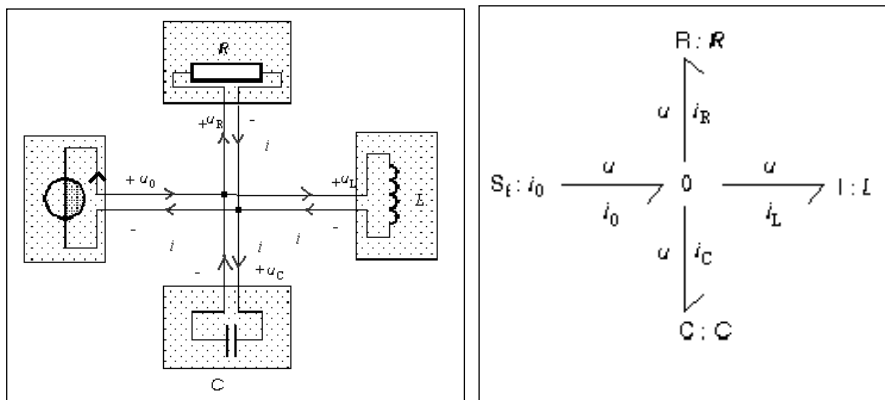


Introducción a la modelización con Bond Graphs - Cátedra DSF - FCEIA - UNR

11

# Modelado con BG

## Bond Graph del Circuito Paralelo



Introducción a la modelización con Bond Graphs - Cátedra DSF - FCEIA - UNR

12

## **EXTENSIÓN A SISTEMAS MECÁNICOS**

# **ANALOGÍA**

Introducción a la modelización con Bond Graphs - Cátedra DSF - FCEIA - UNR

13

## **Analogía**

### **Analogía Electricidad - Mecánica**

- Energía Cinética ~ Energía Campo Magnético  $\leftrightarrow$  **I**
- Energía Potencial ~ Energía Campo Eléctrico  $\leftrightarrow$  **C**
- $\Rightarrow$  Energía Cinética  $\rightarrow$  **I**
- $\Rightarrow$  Energía Potencial  $\rightarrow$  **C**

Introducción a la modelización con Bond Graphs - Cátedra DSF - FCEIA - UNR

14

# Analogía

## Implicancias de la Analogía elegida

ANALOGIA  
ENERGETICA

⇒

ANALOGIA EN  
SEÑAL

|               |               |                         |
|---------------|---------------|-------------------------|
| Tensión~      | Fuerza        | (Esfuerzo generalizado) |
| Corriente ~   | Velocidad     | (Flujo generalizado)    |
| Flujo Magn. ~ | Impulso       | (Impulso generalizado)  |
| Carga ~       | Desplaz./Def. | (Desplaz. Generalizado) |

Introducción a la modelización con Bond Graphs - Cátedra DSF - FCEIA - UNR

15

## Analogía - Generalización de Variables

| Dominio físico    | Variables de Potencia  |                 |                     |                       | Variables de Energía |                         |                   |                       |
|-------------------|------------------------|-----------------|---------------------|-----------------------|----------------------|-------------------------|-------------------|-----------------------|
|                   | Esfuerzo<br>e          | S.I.            | Flujo<br>f          | S.I.                  | Momento<br>p         | S.I.                    | Desplaz.<br>q     | S.I.                  |
| Traslación        | fuerza F               | N               | velocidad v         | $\frac{m}{s}$         | impulso p            | N · s                   | desplaz. x        | m                     |
| Rotación          | torque τ               | N · m           | velocidad angular ω | $\frac{rad}{s}$       | momento angular L    | Nm · s                  | ángulo φ          | rad                   |
| Fluidodinámica    | presión P              | $\frac{N}{m^2}$ | caudal Q            | $\frac{m^3}{s}$       | impulso del fluido Γ | $\frac{N \cdot s}{m^2}$ | volumen V         | $m^3$                 |
| Electromagnetismo | tensión U              | V               | corriente I         | A                     | flujo magnético φ    | V · s                   | carga eléctrica   | C                     |
| Química           | potencial químico μ    | $\frac{J}{mol}$ | flujo molar υ       | $\frac{mol}{s}$       |                      |                         | número de moles n | mol                   |
| Termodinámica     | temperatura absoluta T | $^{\circ}K$     | flujo de entropía Ḡ | $\frac{W}{^{\circ}K}$ |                      |                         | entropía S        | $\frac{J}{^{\circ}K}$ |

Introducción a la modelización con Bond Graphs - Cátedra DSF - FCEIA - UNR

16



## Analogía - Generalización de Componentes

| Fenómeno energético                                                       | Clase         |             | Elementos                                                                         |                    |                                                              |                                            | Ejemplos técnicos                        |
|---------------------------------------------------------------------------|---------------|-------------|-----------------------------------------------------------------------------------|--------------------|--------------------------------------------------------------|--------------------------------------------|------------------------------------------|
|                                                                           |               |             | Símbolo                                                                           | Nombre             | Potencia<br>Energía                                          | Relación Constitutiva                      |                                          |
| Generación de Energía                                                     | Fuentes       | Monopuertas |  | Fuente de esfuerzo | $P_{entregada} = e(t) \cdot f$                               | $e(t)$ independiente                       | Gravedad , Fuente de f.e.m.              |
|                                                                           |               |             |  | Fuente de flujo    | $P_{entregada} = f \cdot e(t)$                               | $f(t)$ independiente                       | Fuente de corriente Bomba hidráulica     |
| Disipación de energía                                                     | Disipadores   |             |  | Resistor           | $P_{disipada} = f \cdot e(t)$                                | $\phi(e,f) = 0$                            | Rozamiento, Electro-resistor             |
| Conservación de Energía                                                   | Almacenadores |             |  | Capacitor          | $\varepsilon_{almac.} = \varepsilon_0 + \int_{q_0}^q e(q)dq$ | $f - \frac{dq}{dt} = 0$<br>$\phi(e,q) = 0$ | Elasticidad de materiales Tanque de agua |
|                                                                           |               |             |  | Inercia            | $\varepsilon_{almac.} = \varepsilon_0 + \int_{p_0}^p e(p)dp$ | $e - \frac{dp}{dt} = 0$<br>$\phi(f,p) = 0$ | Inductancia Inercia mecánica             |
| Introducción a la modelización con Bond Graphs -Cátedra DSF - FCEIA - UNR |               |             |                                                                                   |                    |                                                              |                                            |                                          |

## Analogía - Generalización de Componentes

| Fenómeno energético      | Clase                        | Elementos                                                                           |               |                                            |                                                       | Ejemplos técnicos                    |
|--------------------------|------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|---------------|--------------------------------------------|-------------------------------------------------------|--------------------------------------|
|                          |                              | Símbolo                                                                             | Nombre        | Potencia<br>Energía                        | Relación Constitutiva                                 |                                      |
| Conservación de Potencia | Acopladores                  |  | Enlace        | $P_{transferida} = e \cdot f$              |                                                       | Cardan (ideal), Línea eléctrica      |
|                          | Acopladores<br>Convertidores |  | Transformador | $P_{absorbida} = P_1 - P_2 = 0$            | $e_2 - m \cdot e_1 = 0$<br>$f_1 - m \cdot f_2 = 0$    | Piñón-cremallera, Pistón-cilindro    |
|                          |                              |  | Girador       | $P_{absorbida} = P_1 - P_2 = 0$            | $f_2 - m \cdot e_1 = 0$<br>$f_1 - m \cdot e_2 = 0$    | Giróscopo, Convers. electro-mecánica |
|                          | Vínculos                     |  | Vínculo uno   | $P_{absorbida} = \sum_{j=1}^n \pm P_j = 0$ | $f_1 = \dots = f_n = f$<br>$\sum_{j=1}^n \pm e_j = 0$ | Velocidad común, Circuito serie      |
|                          |                              |  | Vínculo cero  | $P_{absorbida} = \sum_{j=1}^n \pm P_j = 0$ | $e_1 = \dots = e_n = e$<br>$\sum_{j=1}^n \pm f_j = 0$ | Serie mecánico, Circuito paralelo    |

Introducción a la modelización con Bond Graphs - Cátedra DSF - FCEIA - UNR

18

# Causalización y Generación de Modelos Matemáticos y Computacionales a partir de Bond Graphs.

Introducción a la modelización con Bond Graphs - Cátedra DSF - FCEIA - UNR

19

## Causalidad

$f(a,b,c) = 0 \quad \longrightarrow \quad \text{Relación NO Causal}$

$a = g(b,c) \quad \longrightarrow \quad \text{Relación Causal}$

Introducción a la modelización con Bond Graphs - Cátedra DSF - FCEIA - UNR

20

## Causalidad

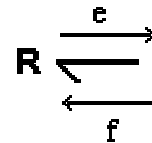
**Ejemplo:**



Resistencia Lineal:  $e - R \cdot f = 0$

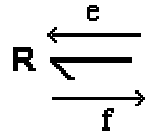
•Opción 1

$$e = R \cdot f$$



•Opción 2

$$f = \frac{e}{R}$$

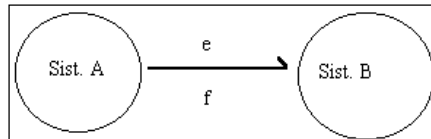


Introducción a la modelización con Bond Graphs - Cátedra DSF - FCEIA - UNR

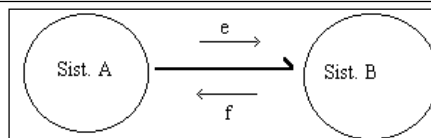
21

## Causalidad

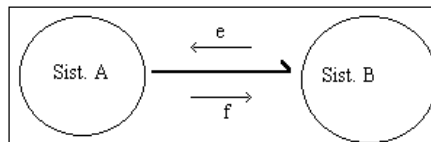
**En General:**



•Opción 1



•Opción 2



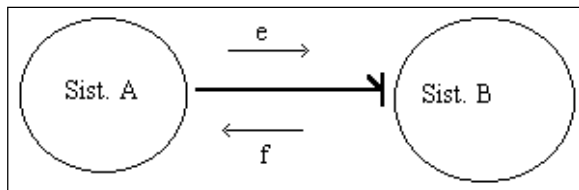
Introducción a la modelización con Bond Graphs - Cátedra DSF - FCEIA - UNR

22

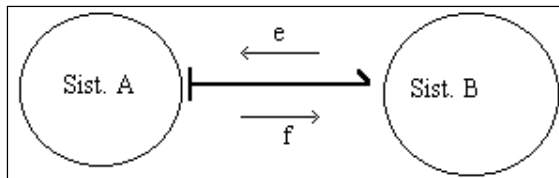
# Causalidad

## Codificación:

### •Opción 1



### •Opción 2



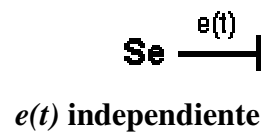
Introducción a la modelización con Bond Graphs - Cátedra DSF - FCEIA - UNR

23

# Causalidad

## Fuentes: (causalidad necesaria)

### Fuente de Esfuerzo:



### Fuente de Flujo:



Introducción a la modelización con Bond Graphs - Cátedra DSF - FCEIA - UNR

24

# Causalidad

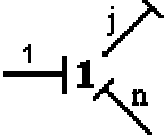
## Componentes estructurales: (causalidad restringida)

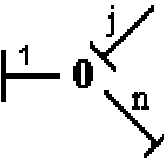
|                       |                                                   |                                                   |
|-----------------------|---------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| <b>Transformador:</b> | $\frac{1}{\ddot{m}} \text{TF} \frac{2}{\ddot{m}}$ | $\frac{1}{\ddot{m}} \text{TF} \frac{2}{\ddot{m}}$ |
|                       | $e_2 = m \cdot e_1$                               | $e_1 = m \cdot e_2$                               |
|                       | $f_1 = m \cdot f_2$                               | $f_2 = m \cdot f_1$                               |
|                       |                                                   |                                                   |

|                 |                                                   |                                                   |
|-----------------|---------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| <b>Girador:</b> | $\frac{1}{\ddot{m}} \text{GY} \frac{2}{\ddot{m}}$ | $\frac{1}{\ddot{m}} \text{GY} \frac{2}{\ddot{m}}$ |
|                 | $f_1 = m \cdot e_2$                               | $e_1 = m \cdot f_2$                               |
|                 | $f_2 = m \cdot e_1$                               | $e_2 = m \cdot f_1$                               |
|                 |                                                   |                                                   |

# Causalidad

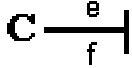
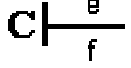
## Componentes estructurales: (causalidad restringida)

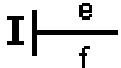
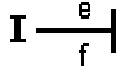
|                   |                                 |                                                                                      |
|-------------------|---------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Vínculo 1:</b> | $f_1 = f_j, \dots, f_n = f_j$   |  |
|                   | $e_j = \sum_{k \neq j} \pm e_k$ |                                                                                      |
|                   |                                 |                                                                                      |

|                   |                                 |                                                                                      |
|-------------------|---------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Vínculo 0:</b> | $e_1 = e_j, \dots, e_n = e_j$   |  |
|                   | $f_j = \sum_{k \neq j} \pm f_k$ |                                                                                      |
|                   |                                 |                                                                                      |

# Causalidad

## Almacenadores: (causalidad preferencial)

|                   |                                                                                   |                                                                                    |
|-------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Capacitor:</b> |  |  |
|                   | $e = e(q)$                                                                        | $f = \frac{d}{dt} q(t)$                                                            |
|                   | $q(t) = q_0 + \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau$                                         | $q = q(e)$                                                                         |

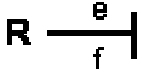
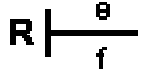
|                 |                                                                                   |                                                                                    |
|-----------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Inercia:</b> |  |  |
|                 | $f = f(p)$                                                                        | $e = \frac{d}{dt} p(t)$                                                            |
|                 | $p(t) = p_0 + \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau$                                         | $p = p(f)$                                                                         |

Introducción a la modelización con Bond Graphs - Cátedra DSF - FCEIA - UNR

27

# Causalidad

## Disipadores: (causalidad arbitraria)

|                                                                                     |                                                                                      |
|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
|  |  |
| $e = e(f)$                                                                          | $f = f(e)$                                                                           |

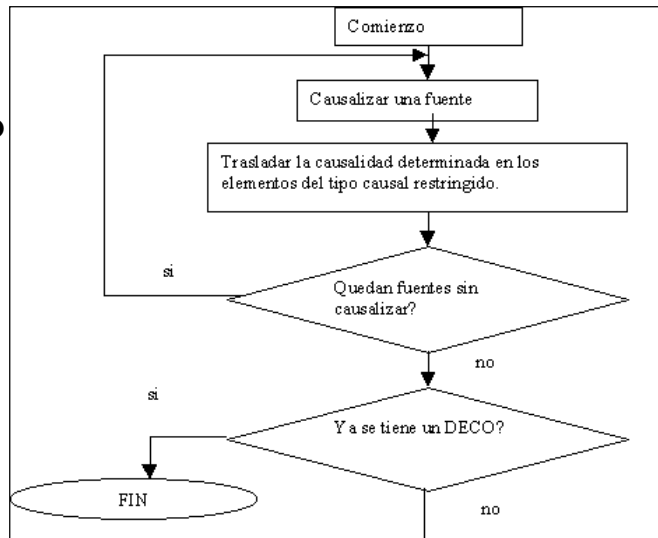
Introducción a la modelización con Bond Graphs - Cátedra DSF - FCEIA - UNR

28

# Causalidad

## Procedimiento de Asignación de Causalidad

(1)



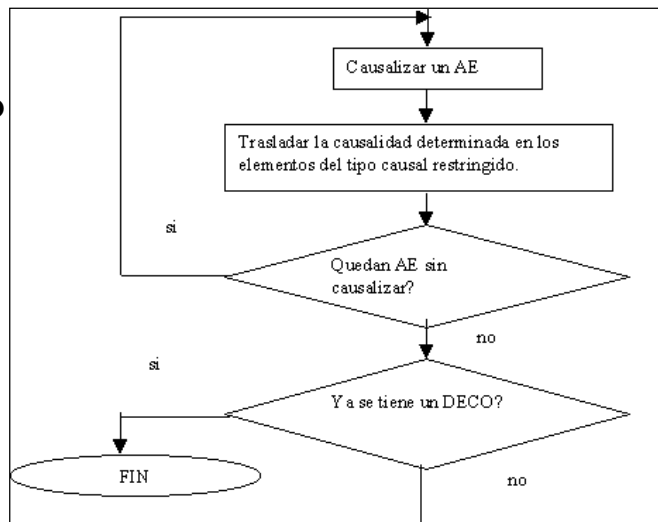
Introducción a la modelización con Bond Graphs - Cátedra DSF - FCEIA - UNR

29

# Causalidad

## Procedimiento de Asignación de Causalidad

(2)



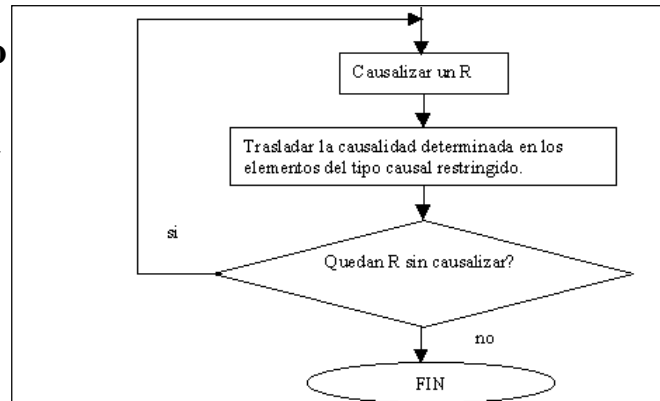
Introducción a la modelización con Bond Graphs - Cátedra DSF - FCEIA - UNR

30

# Causalidad

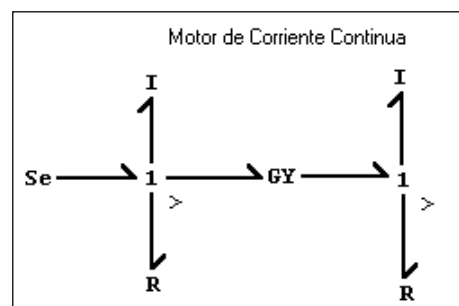
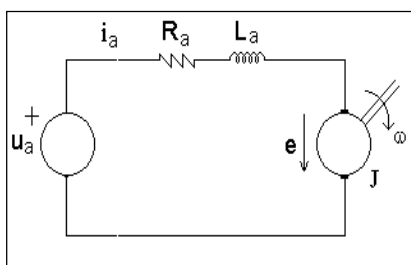
## Procedimiento de Asignación de Causalidad

(3)



# Causalidad

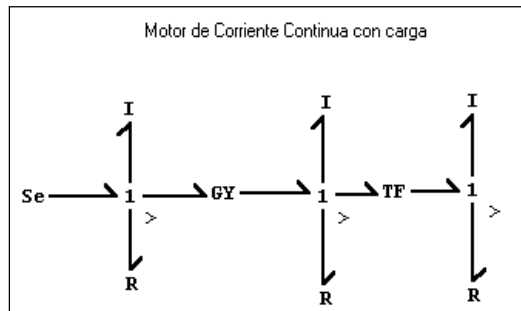
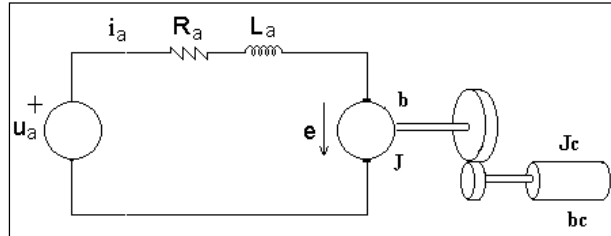
## Ejemplo 1:





# Causalidad

## Ejemplo 2:

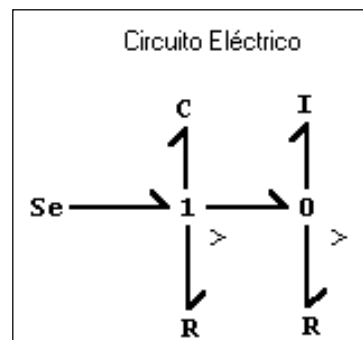
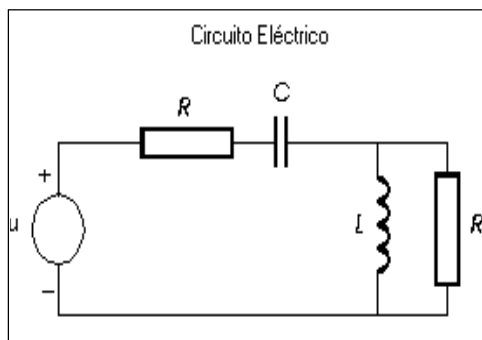


Introducción a la modelización con Bond Graphs - Cátedra DSF - FCEIA - UNR

33

# Causalidad

## Ejemplo 3:



Introducción a la modelización con Bond Graphs - Cátedra DSF - FCEIA - UNR

34

## Causalidad- Resumen

| Tipo Causal | Notación                                                   |                                 |                                                                  |
|-------------|------------------------------------------------------------|---------------------------------|------------------------------------------------------------------|
|             | Gráfica                                                    |                                 | Matemática                                                       |
|             | Diagrama de Enlaces                                        | Diagrama de Bloques             |                                                                  |
| Necesario   | $\mathbf{Se} \xrightarrow{e(t)}$                           | $\mathbf{e(t)} \longrightarrow$ | $\mathbf{e(t)}$<br><b>independiente</b>                          |
|             | $\mathbf{sf} \xleftarrow{r(t)}$                            | $\mathbf{r(t)} \longrightarrow$ | $\mathbf{f(t)}$<br><b>independiente</b>                          |
| Restringido | $\mathbf{\frac{1}{m} \left[ \frac{TF}{m} \right]^2}$       |                                 | $e_2 = m \cdot e_1$<br>$f_1 = m \cdot f_2$                       |
|             | $\mathbf{\frac{1}{\rho} \left[ \frac{TF}{\rho} \right]^2}$ |                                 | $e_1 = \rho \cdot e_2$<br>$f_2 = \rho \cdot f_1$<br>$\rho = 1/m$ |
|             | $\mathbf{\frac{1}{m} \left[ \frac{GY}{m} \right]^2}$       |                                 | $f_1 = m \cdot e_2$<br>$f_2 = m \cdot e_1$                       |
|             | $\mathbf{\frac{1}{\rho} \left[ \frac{GY}{\rho} \right]^2}$ |                                 | $e_1 = \rho \cdot f_2$<br>$e_2 = \rho \cdot f_1$<br>$\rho = 1/m$ |

Introducción a la modelización con Bond Graphs - Cátedra DSF - FCEIA - UNR

35

## Causalidad- Resumen

| Tipo Causal  | Notación                                          |                     |                                                                  |
|--------------|---------------------------------------------------|---------------------|------------------------------------------------------------------|
|              | Gráfica                                           |                     | Matemática                                                       |
|              | Diagrama de Enlaces                               | Diagrama de Bloques |                                                                  |
| Restringido  | $\mathbf{\frac{1}{1} \left[ \frac{j}{1} \right]}$ |                     | $f_1 = f_2, \dots, f_n = f_j$<br>$e_j = \sum_{k \neq j} \pm e_k$ |
|              | $\mathbf{\frac{1}{0} \left[ \frac{j}{0} \right]}$ |                     | $e_1 = e_j, \dots, e_n = e_j$<br>$f_j = \sum_{k \neq j} \pm f_k$ |
| Preferencial | Integral                                          |                     | $e = e(q)$<br>$q(t) = q_0 + \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau$          |
|              |                                                   |                     | $f = f(p)$<br>$p(t) = p_0 + \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau$          |
|              | Derivativa                                        |                     | $f = \frac{d}{dt} q(t)$<br>$q = q(e)$                            |
|              |                                                   |                     | $e = \frac{d}{dt} p(t)$                                          |

Introducción a la modelización con Bond Graphs - Cátedra DSF - FCEIA - UNR

36

## Causalidad- Resumen

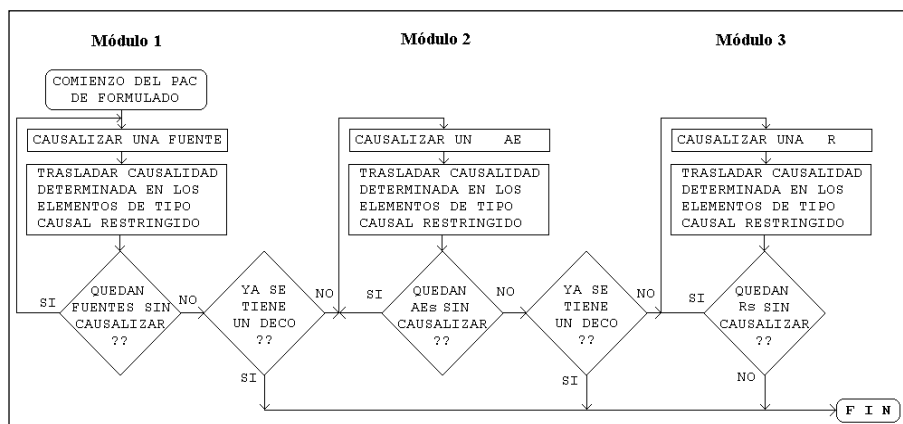
| Tipo Causal | Notación                                |                                                |            |
|-------------|-----------------------------------------|------------------------------------------------|------------|
|             | Gráfica                                 |                                                | Matemática |
|             | Diagrama de Enlaces                     | Diagrama de Bloques                            |            |
| Arbitrario  | $R \begin{array}{c} e \\ f \end{array}$ | $f \rightarrow \boxed{e(\cdot)} \rightarrow e$ | $e = e(f)$ |
|             | $R \begin{array}{c} e \\ f \end{array}$ | $e \rightarrow \boxed{f(\cdot)} \rightarrow f$ | $f = f(e)$ |

Introducción a la modelización con Bond Graphs - Cátedra DSF - FCEIA - UNR

37

## Causalidad- Resumen

### Procedimiento de Asignación de Causalidad



Introducción a la modelización con Bond Graphs - Cátedra DSF - FCEIA - UNR

38

## Ecuaciones de Estado

- Paso 1: Causalizar el BG.
- Paso 2: Enumerar los Enlaces.
- Paso 3: Identificar las Variables de Estado.

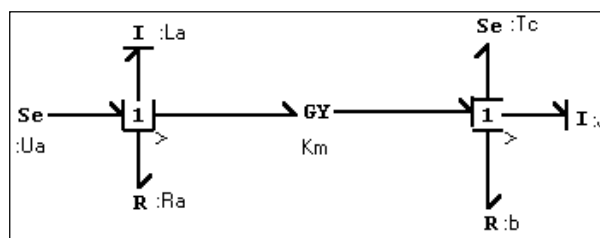
*Tomamos como Variables de Estado las variables de energía de los Almacenadores que tengan causalidad Integral.*

- Paso 4: Leer las ecuaciones siguiendo la causalidad del BG y utilizando las leyes de los componentes.

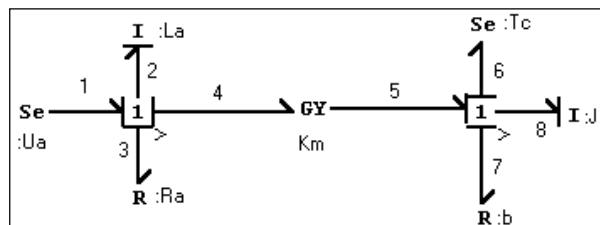
## Ecuaciones de Estado

### Ejemplo 1:

#### Paso 1:

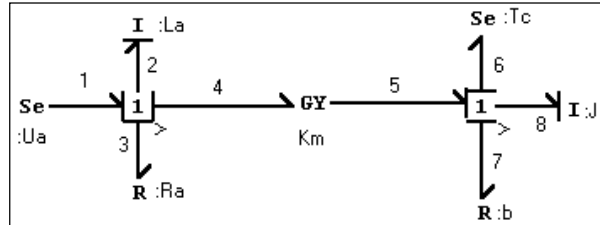


#### Paso 2:



## Ecuaciones de Estado

### Ejemplo 1:

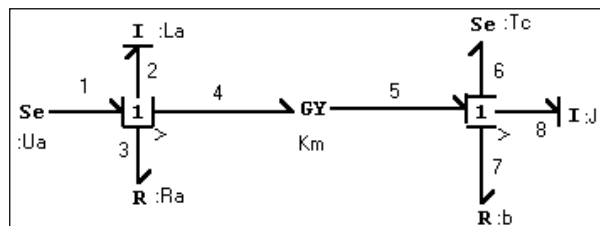


*Utilizamos los números de los enlaces como subíndices de las correspondientes variables de potencia y energía.*

### Paso 3: Variables de Estado: $p_2, p_8$

## Ecuaciones de Estado

### Ejemplo 1:



### Paso 4:

$$\dot{p}_2 = e_2 = e_1 - e_3 - e_4 = U_a(t) - R_a f_3 - k_m f_5$$

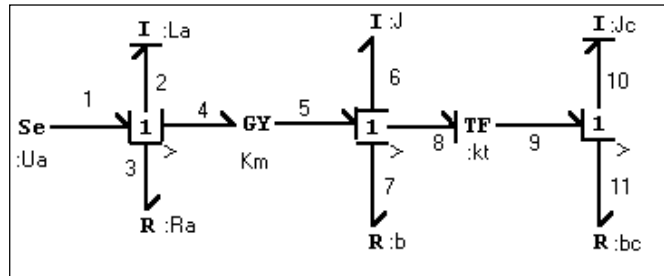
$$\dot{p}_2 = U_a(t) - R_a f_2 - k_m f_8 = U_a(t) - \frac{R_a}{L_a} p_2 - \frac{k_m}{J} p_8$$

$$\dot{p}_8 = e_8 = e_5 - e_6 - e_7 = k_m f_4 - T_c(t) - b \cdot f_7 =$$

$$\dot{p}_8 = k_m f_2 - T_c(t) - b \cdot f_8 = \frac{k_m}{L_a} p_2 - T_c(t) - \frac{b}{J} \cdot p_8$$

## Ecuaciones de Estado

### Ejemplo 2:

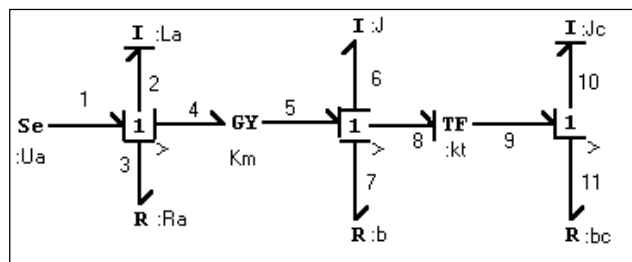


Variables de Estado:  $p_2, p_{10}$

$p_6$  no es variable de estado porque la inercia correspondiente tiene causalidad derivativa.

## Ecuaciones de Estado

### Ejemplo 2:

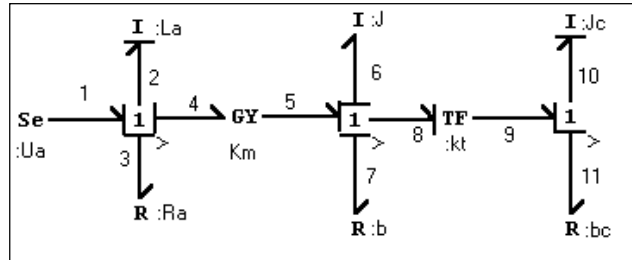


$$\dot{p}_{10} = e_{10} = e_9 - e_{11} = k_t e_8 - b_c f_{11} = k_t (e_5 - e_6 - e_7) - b_c f_{10}$$

Debido a la causalidad derivativa, encontramos un primer inconveniente al intentar leer  $e_6$ .

## Ecuaciones de Estado

**Causalidad derivativa**



**Método:**

**1 - Continuar leyendo, utilizando como variables auxiliares las derivadas de las variables de energía de los almacenadores con causalidad derivativa.**

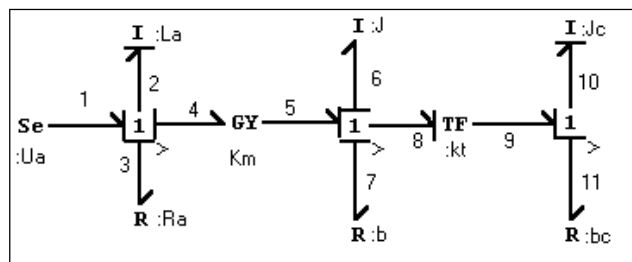
$$\dot{p}_{10} = \dots = \frac{k_t k_m}{L_a} p_2 - k_t \dot{p}_6 - \frac{k_t^2 b}{J_c} p_{10} - \frac{b_c}{J_c} p_{10}$$

Introducción a la modelización con Bond Graphs - Cátedra DSF - FCEIA - UNR

45

## Ecuaciones de Estado

**Causalidad derivativa**



**2 - Leer del BG las variables de energía de los almacenadores con causalidad derivativa en función de las restantes variables de energía y entradas.**

$$p_6 = J \cdot f_6 = J \cdot f_8 = J \cdot k_t f_9 = J \cdot k_t f_{10} = \frac{J \cdot k_t}{J_c} p_{10}$$

Introducción a la modelización con Bond Graphs - Cátedra DSF - FCEIA - UNR

46

## Ecuaciones de Estado

### Causalidad derivativa

**3 - Derivar miembro a miembro las expresiones obtenidas en el punto anterior**

$$\dot{p}_6 = \frac{J \cdot k_t}{J_c} \dot{p}_{10}$$

**4 - Reemplazar las derivadas de las variables de energía en las ecuaciones obtenidas en el primer punto**

$$\dot{p}_{10} = \frac{k_t k_m}{L_a} p_2 - k_t \frac{J \cdot k_t}{J_c} \dot{p}_{10} - \frac{k_t^2 b}{J_c} p_{10} - \frac{b_c}{J_c} p_{10}$$

## Ecuaciones de Estado

### Causalidad derivativa

**5 - Despejar la expresión de las derivadas de las variables de estado.**

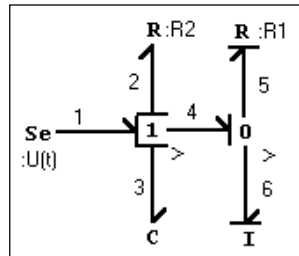
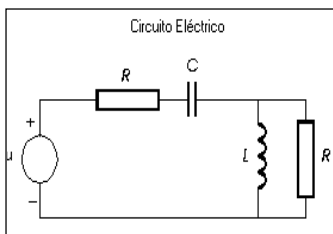
$$\dot{p}_{10} = \left( \frac{J_c}{J_c + J \cdot k_t^2} \right) \left( \frac{k_t k_m}{L_a} p_2 - \frac{k_t^2 b + b_c}{J_c} p_{10} \right)$$

**Ejercicio: Obtener la otra Ecuación de Estado**



## Ecuaciones de Estado

### Ejemplo 3:



$$\dot{q}_3 = f_3 = f_4 = f_5 + f_6 = \frac{e_5}{R_1} + \frac{1}{L} p_6 = \frac{1}{R_1} e_4 + \frac{1}{L} p_6$$

$$\dot{q}_3 = \frac{1}{R_1} (e_1 - e_2 - e_3) + \frac{1}{L} p_6 = \frac{1}{R_1} U(t) - \frac{R_2}{R_1} (f_4) - \frac{1}{R_1 C} q_3 + \frac{1}{L} p_6$$

Debido a la presencia de *disipadores acoplados*, para calcular  $f_4$  necesitamos  $f_4$ .

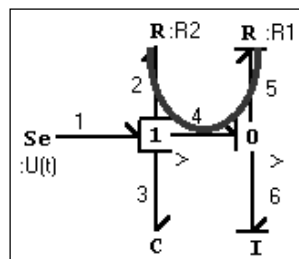
Introducción a la modelización con Bond Graphs - Cátedra DSF - FCEIA - UNR

49

## Ecuaciones de Estado

### Disipadores Acoplados

#### Método:



1 -Detectar los disipadores acoplados y utilizar las salidas de los mismos como variables auxiliares al leer las ecuaciones.

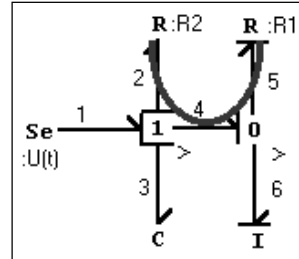
$$\dot{q}_3 = f_3 = f_4 = f_5 + f_6 = f_5 + \frac{1}{L} p_6$$

Introducción a la modelización con Bond Graphs - Cátedra DSF - FCEIA - UNR

50

## Ecuaciones de Estado

### Disipadores Acoplados



**2 -Leer del BG las variables auxiliares en función de las variables de estado, entradas y de ellas mismas.**

$$f_5 = \frac{e_5}{R_1} = \frac{1}{R_1} e_4 = \frac{1}{R_1} (e_1 - e_2 - e_3) = \frac{1}{R_1} U(t) - \frac{1}{R_1} e_2 - \frac{1}{R_1 C} q_3$$

$$e_2 = R_2 \cdot f_2 = R_2 \cdot f_4 = R_2 (f_5 + f_6) = R_2 f_5 + \frac{R_2}{L} p_6$$

Introducción a la modelización con Bond Graphs - Cátedra DSF - FCEIA - UNR

51

## Ecuaciones de Estado

### Disipadores Acoplados

**3 -Despejar del sistema anterior las variables auxiliares en función de las variables de estado y de entrada.**

$$f_5 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \left( \frac{1}{R_1} U(t) - \frac{R_2}{R_1 L} p_6 - \frac{1}{R_1 C} q_3 \right)$$

**4 -Reemplazar las variables auxiliares en las ecuaciones obtenidas en el primer punto.**

$$\dot{q}_3 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \left( \frac{1}{R_1} U(t) - \frac{R_2}{R_1 L} p_6 - \frac{1}{R_1 C} q_3 \right) + \frac{1}{L} p_6$$

### Ejercicio: Obtener la otra Ecuación de Estado

Introducción a la modelización con Bond Graphs - Cátedra DSF - FCEIA - UNR

52

## Comentarios

- Separación de los problemas de modelado y de obtención del modelo computacional.
- Ventajas al trabajar con un paradigma acausal.
- El pasaje del modelo BG al modelo “matemático” es completamente algoritmizable.
- Algunas herramientas de Software para dicho pasaje: Dymola, 20Sim, Power Dynamo.
- Problemas de “Singularidades Estructurales”.

## Bibliografía Recomendada

(Disponible en la cátedra)

- Cellier, F.E. 1991. *Continuous System Modeling*. Springer-Verlag, New York.
- Karnopp, D.C., D.L. Margolis, and R.C. Rosenberg. 1990. *System Dynamics: A Unified Approach*, 2<sup>nd</sup> ed., John Wiley & Sons, New York.
- Karnopp, D. and R. Rosenberg. 1983. *Introduction to Physical System Dynamics*. N.Y: McGraw-Hill.
- Cellier, F., H. Elmqvist, and M. Otter. 1995. “Modeling from Physical Principles”, *The Control Handbook* (W.S. Levine, ed.), CRC Press, Boca Raton, FL, pp.99-108.
- Borutzky, W. 1999. “Relations between bond graph based and object-oriented physical systems modeling”. *Proceedings ICBGM'99 / Simul. Series* 31:1
- Junco, S. 1986 “Los Diagramas de Enlaces y un Eficaz Método Estructurado de Modelado Analítico de Sistemas Dinámicos”. *Anales del 2do. Congreso Latinoamericano de Control Automático*.