Definición y formulación de los Diagramas de Bloques

INTRODUCCIÓN

La obtención de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDOs) a partir de las relaciones constitutivas y estructurales, tal como lo hace la Física Aplicada y como lo vimos en el capítulo anterior, tiene la desventaja de no constituir una metodología muy estructurada y por lo tanto no es un procedimiento muy práctico para la modelización de sistemas relativamente complejos.

Además, esta clase de modelos (EDOs) está limitado a sistemas de una entrada y una salida. Si bien podemos encontrar algunas ventajas para el análisis de sistemas lineales y estacionarios en el dominio frecuencial, esto será una limitación ya que en la mayor parte de los sistemas y procesos de interés técnico tendremos más de una variable manipulable (entradas) y más de una variable de interés (salidas). Tampoco debemos perder de vista que la EDO es un modelo externo, por lo que no nos muestra toda la dinámica de un sistema sino sólo las partes que se manifiestan en una relación particular de entrada salida.

Por este motivo, preferiremos obtener modelos internos, en los cuales esté contenida toda la dinámica del sistema y que permitan representar sistemas con múltiples entradas y salidas. Las Ecuaciones de Estado y de Salida (EE/ES) nos brindan tales herramientas y además permiten utilizar técnicas de análisis y de simulación no sólo para sistemas lineales sino también para no lineales.

Sin embargo, no es muy práctico buscar una representación en ecuaciones de estado de un sistema directamente a partir de las relaciones estructurales y constitutivas. Más aún, esto puede no sólo ser engorroso sino también imposible en sistemas con *singularidades estructurales*. Por esto se recurre habitualmente al uso de métodos gráficos de modelado como paso previo a la obtención de los modelos de ecuaciones de estado e incluso de ecuaciones diferenciales ordinarias.

El lenguaje gráfico de representación de sistemas dinámicos más difundido en la ingeniería es, sin dudas, el de los Diagramas de Bloques (DB). Esta representación permite no sólo obtener modelos a partir de las relaciones constitutivas y estructurales y traducir dichos modelos en EE/ES y EDOs, sino también utilizar ciertas técnicas de análisis directamente sobre los diagramas. Además, hay herramientas de simulación muy poderosas (como Simulink por ejemplo) que utilizan este lenguaje de representación para el ingreso de los modelos a simular.

DIAGRAMAS DE BLOQUES. Conceptos básicos y bloques elementales

Un Diagrama de Bloques se compone de *bloques funcionales* o simplemente *bloques* que enlazan las variables del sistema. Cada bloque simboliza una operación matemática con un sentido *causal*. Antes de seguir con las definiciones, se torna necesario repasar en el concepto de causalidad. Hasta aquí hemos escrito las relaciones entre las variables de manera acausal, es decir, sin identificar que variables son “causa”y cuales son “efectos”.

Retomando el ejemplo mecánico del capítulo anterior:

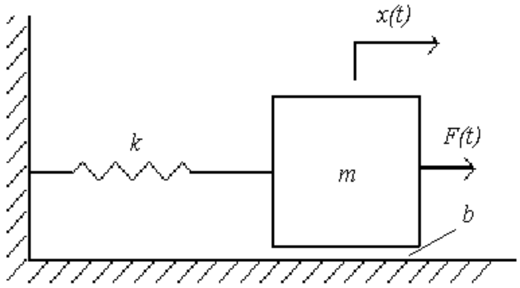

Figura 1. Sistema mecánico “masa resorte”

habíamos escrito el siguiente juego de relaciones “acausales”:

$\dot{x}(t) - v(t) = 0$, $\dot{p}(t) - F_{neta}(t) = 0$, $p(t) - m \cdot v(t) = 0$, $F_{friccion}(t) - b \cdot v_{friccion}(t) = 0$, $F_{resorte}(t) - k \cdot \Delta x(t) = 0$, $x(t) - l_0 - \Delta x(t) = 0$, $F(t) - F_{friccion}(t) - F_{resorte}(t) - F_{neta}(t) = 0$, y $v_{fricción}(t) - v(t) = 0$.

Si tomamos la primera de ellas, $\dot{x}(t) - v(t) = 0$ podríamos causalizarla como:

$$v(t) = \dot{x}(t)$$

o bien según

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$$

En el primer caso, la variable *x* es la causa (lado derecho de la ecuación) y *v* es el efecto (lado izquierdo), mientras que en el otro caso tenemos la relación inversa.

La primer situación tiene la siguiente representación en el lenguaje de los Diagramas de Bloques:

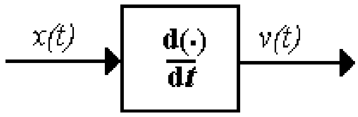

Figura 2. Bloque *Derivador*

Debido a que la operación que realiza el bloque es el cálculo de una derivada, el bloque se denomina *bloque derivador*. En este caso, la variable *x* es la entrada de bloque (o sea, la causa) y la variable *v* es la salida (efecto). Estas variables usualmente se denominan *señales* y puede verse a cada bloque como un procesador de señales que fluyen en el sentido causal dado por la dirección de las flechas.

Para la segunda situación causal, la representación en Diagramas de Bloques es la que sigue:

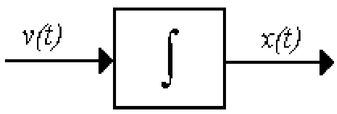

Figura 3. Bloque *Integrador*

La relación entre *x* y *v* debería completarse con la incorporación de la condición inicial x_0.

La relación entre *x* y *v* es dinámica, ya que hay una derivada o integral de por medio y por lo tanto no alcanza con el conocimiento de una de las variables en un punto para saber el valor de la otra. Para la segunda ecuación valen las mismas consideraciones. La siguiente es, en cambio, una relación estática:

$$p(t) - m \cdot v(t) = 0$$

que puede causalizarse como:

$$p(t) = m \cdot v(t)$$

o bien de acuerdo a:

$$v(t) = \frac{1}{m} \cdot p(t)$$

Para estas ecuaciones, tenemos las representaciones en DB de la Figura 4. En ambos casos se trata de bloques *ganancia*, donde el parámetro indicado es la constante que multiplica la señal de entrada para obtener la de salida.

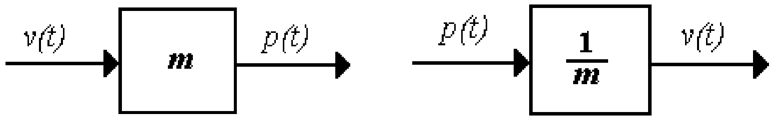

Figura 4. Bloques *Ganancia* para las diferentes situaciones causales.

Otra relación estática que involucra más de dos variables es la que sigue:

$$F(t) - F_{friccion}(t) - F_{resorte}(t) - F_{neta}(t) = 0$$

En este caso, tenemos 4 opciones para establecer las relaciones causales:

1) $F(t) = F_{friccion}(t) + F_{resorte}(t) + F_{neta}(t)$
2) $F_{friccion}(t) = F(t) - F_{resorte}(t) - F_{neta}(t)$
3) $F_{resorte}(t) = F(t) - F_{friccion}(t) - F_{neta}(t)$
4) $F_{neta}(t) = F(t) - F_{friccion}(t) - F_{resorte}(t)$

Sin embargo, la fuerza $F(t)$ es una entrada y es independiente de lo que ocurra en el sistema. Por lo tanto, la primer relación causal no es admisible. Las representaciones de las otras 3 situaciones causales están en la Figura 5.

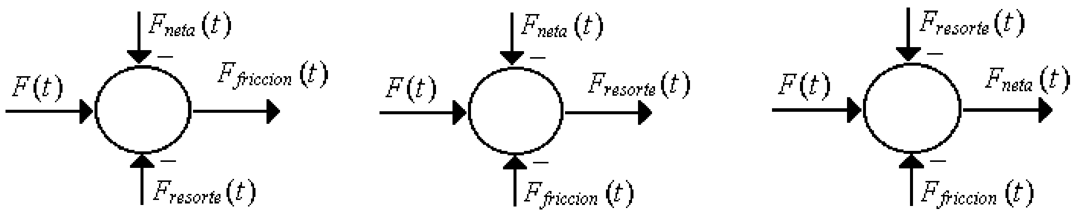

Figura 5. Bloques *Sumador* para las 3 situaciones causales posibles.

El último caso diferente es el más simple:

$$v_{fricción}(t) - v(t) = 0$$

que puede causalizarse como:

$$v_{fricción}(t) = v(t)$$

o bien como

$$v(t) = v_{fricción}(t)$$

siendo ambos casos funciones identidades, cuyas representaciones no requieren de ningún bloque, sino de un simple *punto de derivación*:

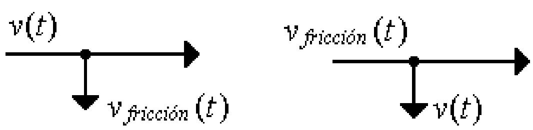

Figura 6. *Puntos de derivación*.

Los bloques integrador, derivador, ganancia y sumador más los puntos de derivación son la base de los DBs para sistemas lineales y estacionarios. Para los casos no lineales necesitaremos de bloques que realicen operaciones no lineales que veremos más adelante.

CONSTRUCCIÓN DEL DIAGRAMA DE BLOQUES

De lo que vimos hasta acá, hay más de una posibilidad de asignación causal asociada a cada relación constitutiva o estructural. En algunos casos la elección de una u otra situación causal no modifica el tipo de bloque a utilizar (esto ocurre con los bloques estáticos en general). Sin embargo, cuando tenemos de por medio una derivada la elección de la situación causal nos puede llevar por dos caminos completamente distintos.

En estos casos, elegiremos siempre que sea posible la situación causal que implique una integración. Esto se debe a varios motivos que iremos viendo a lo largo del curso. Por ahora, sólo mencionaremos que de esta forma será posible obtener más fácilmente las ecuaciones de estado, realizar de manera más simple y eficiente una simulación numérica y podremos también aplicar herramientas de análisis que requieren de este tipo de asignación causal. Además, de esta forma será posible incorporar las condiciones iniciales al modelo (que son indispensables entre otras cosas para realizar una simulación). Decimos de todas formas que utilizaremos integradores siempre que sea posible ya que, como veremos luego, habrá casos en que la estructura del sistema físico idealizado nos obligará a incorporar derivadores.

Para el resto de los bloques no habrá mayores restricciones que las de respetar que las entradas del sistema sean en efecto señales entrantes a los bloques y no salientes de los mismos (como ya vimos con la entrada $F(t)$ en el bloque sumador). También, por una cuestión de coherencia, cada señal deberá ser calculada por un único bloque.

Un método que nos permite cumplir con todas estas restricciones es el siguiente: se comienza por la salida (una señal de interés) y se buscan las relaciones que la involucren. Si entre estas relaciones existe una que pueda calcularla como una integral, se elige esta relación. Por ejemplo, si en el ejemplo de la Figura 1 tomamos como salida la posición $x(t)$, tendremos dos relaciones que la involucran: $\dot{x}(t) - v(t) = 0$ y $x(t) - l_0 - \Delta x(t) = 0$. Elegimos la primera de ellas que calcula esta salida como una integración. Entonces, el DB calculará la salida con el bloque:

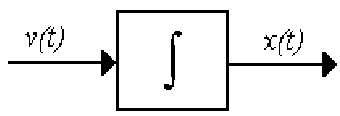

Figura 7. Primer paso para la obtención del DB: cálculo de la salida.

Una vez hecho esto, la relación utilizada en este bloque $\dot{x}(t) - v(t) = 0$ no deberá usarse más.

Luego, el método sigue repitiendo el primer paso pero tomando ahora como salida la entrada del último bloque que pusimos. Es decir, ahora tenemos que buscar una relación que involucre a $v(t)$. Tenemos de nuevo dos relaciones: $p(t) - m \cdot v(t) = 0$ y $v_{fricción}(t) - v(t) = 0$. Aquí podríamos utilizar cualquiera de las dos relaciones, pero como veremos luego, lo mejor será utilizar la primera de ellas:

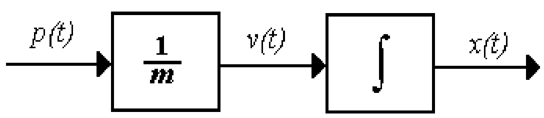

Figura 8. Segundo paso para la obtención del DB.

En el tercer paso, repetimos el primero tomando como salida la cantidad de movimiento $p(t)$, de la cual nos queda una única relación: $\dot{p}(t) - F_{neta}(t) = 0$ ya que la otra la utilizamos en el paso anterior. El DB ahora nos queda:

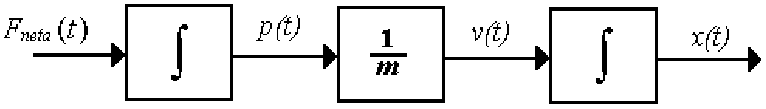

Figura 8. DB tras el tercer paso.

Similarmente, para la Fuerza neta nos queda la única ecuación:

$$F(t) - F_{friccion}(t) - F_{resorte}(t) - F_{neta}(t) = 0$$

de donde el DB nos queda:

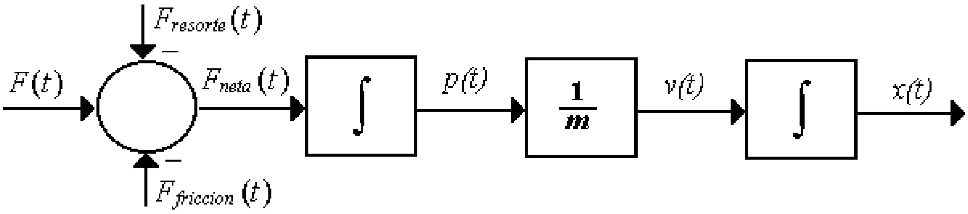

Figura 9. Cuarto paso.

En el siguiente paso tenemos 2 variables a obtener para seguir y la tercera, $F(t)$, es una entrada, por lo tanto no debe calcularse con ningún bloque.

Calculamos entonces primero la fuerza de fricción, utilizando para esto la única relación que nos queda vinculando la misma: $F_{friccion}(t) - b \cdot v_{friccion}(t) = 0$.

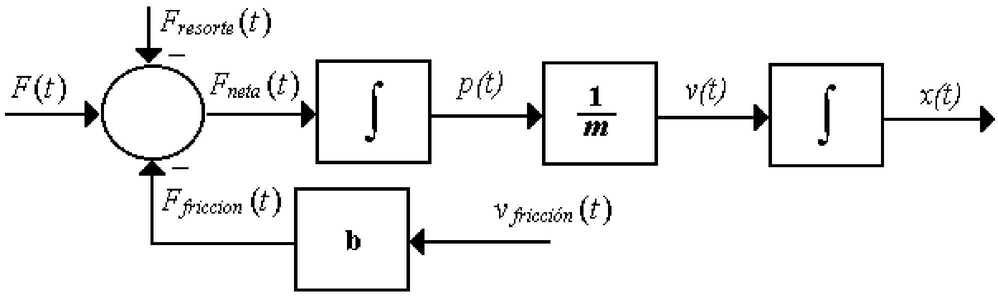

Figura 10. Incorporación de la fuerza de fricción.

Ahora tenemos nuevamente dos variables a determinar: $v_{friccion}(t)$ y $F_{resorte}(t)$. Por una cuestión de ordenamiento del método, seguiremos con el camino que veníamos desarrollando en el paso anterior, o sea, determinaremos $v_{friccion}(t)$. Para esta, nos queda únicamente la ecuación $v_{fricción}(t) - v(t) = 0$, que debe causalizarse como $v_{fricción}(t) = v(t)$. Esto, como ya vimos, se representa mediante un punto de derivación que saldrá de la señal $v(t)$, quien está calculada por el bloque ganancia de parámetro $1/m$. Tras este paso, tenemos:

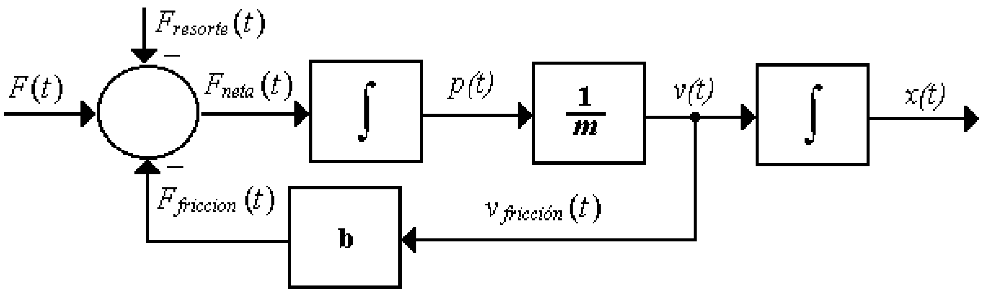

Figura 11. Agregado del punto de derivación.

Luego, incorporamos al DB la fuerza del resorte, utilizando para esto la relación: $F_{resorte}(t) - k \cdot \Delta x(t) = 0$.

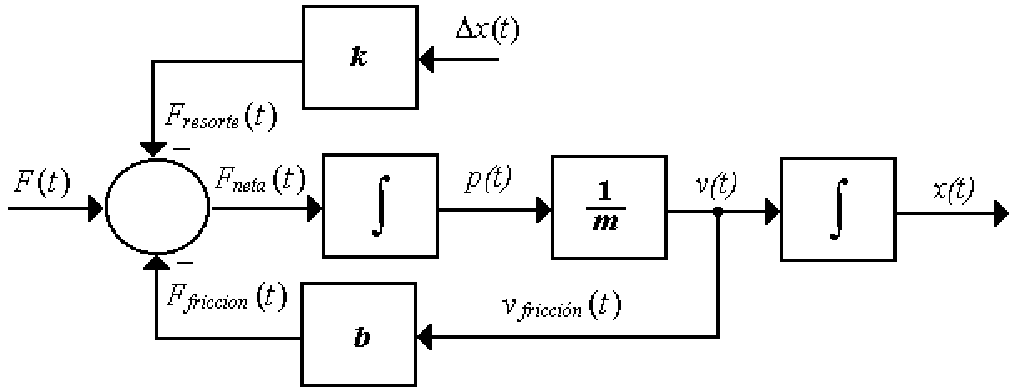

Figura 12. Cálculo de la fuerza del resorte.

Finalmente, el DB se completa con el cálculo de la deformación del resorte, a partir de la única ecuación que todavía no utilizamos: $x(t) - l_0 - \Delta x(t) = 0$. La Figura 12 entonces muestra el DB completo:

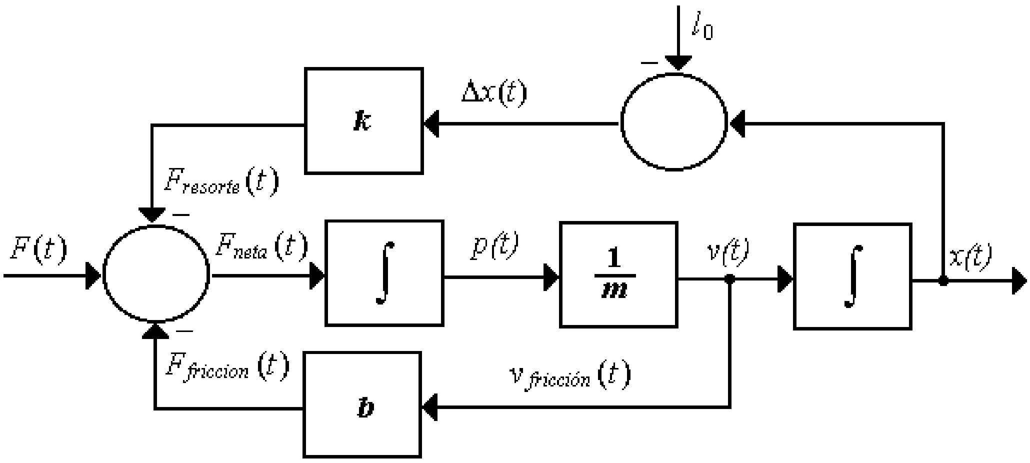

Figura 12. DB completo del sistema *masa-resorte*.

Todos los pasos, a excepción de los dos primeros, fueron realizados de acuerdo a una única posibilidad de asignación causal. En el primero, de acuerdo al método, se eligió la relación que implicaba una integración. En el segundo en cambio se eligió una de las relaciones (determinar v a partir de p en lugar de determinarla a partir de la $v_{friccion}$) sin dar muchas explicaciones. Si hubiéramos elegido el otro camino, habríamos llegado a tener que calcular p a partir de v y luego la F_{neta} a partir de p, lo que implicaría el uso de un derivador. Por eso la elección hecha fue en realidad la única que nos garantiza tener un número máximo de integradores.

BLOQUES NO LINEALES

Hasta aquí utilizamos exclusivamente bloques lineales. Sin embargo, en una gran cantidad de problemas se requiere de la utilización de modelos no lineales. Por ejemplo, en el sistema masa resorte de la Figura 1 supusimos que la fricción era lineal. Sin embargo, una hipótesis habitual es que la fuerza de fricción depende del cuadrado de la velocidad:

$$F_{friccion}(t) = k_f \cdot v_{friccion}(t) \cdot \left| v_{friccion}(t) \right|$$

Las barras de valor absoluto son para que la relación mantenga el signo y valga tanto para valores positivos como negativos de $v_{friccion}$.

La representación en DB de esta relación (con el sentido causal ya establecido) es la que sigue:

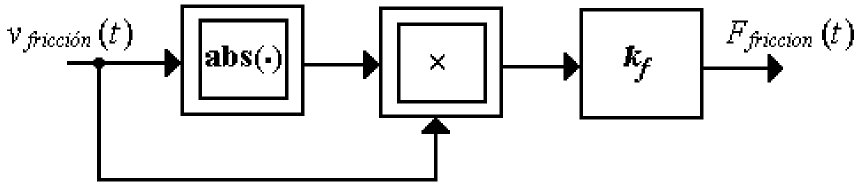

Figura 13. Bloques No Lineales.

Como puede verse en la figura, utilizamos doble cuadro para indicar que un determinado bloque realiza una operación no lineal. Ahora bien, no es necesario representar cada operación elemental con un bloque. Podemos directamente representar la relación no lineal mediante un único bloque:

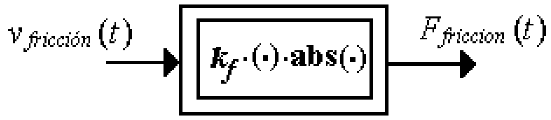

Figura 13. Bloque con una operación no lineal no elemental.

En muchos sistemas, hay relaciones que se modelizan mediante una curva o un conjunto de curvas, de las cuales no se tiene una expresión matemática. Típicamente en una válvula modulada:

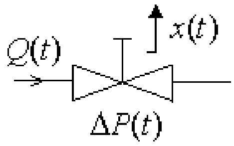

Figura 14. Válvula modulada

se tienen características del tipo:

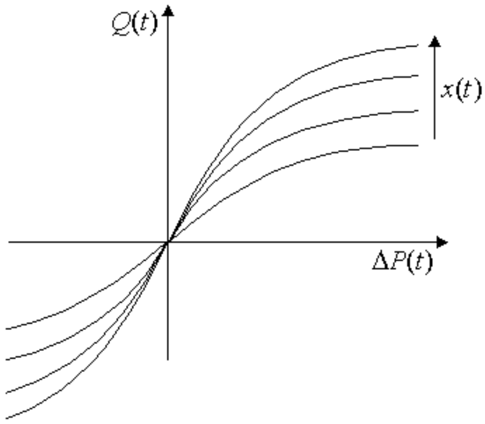

Figura 15. Relación constitutiva de una válvula modulada.

y en este caso, la representación en DB es:

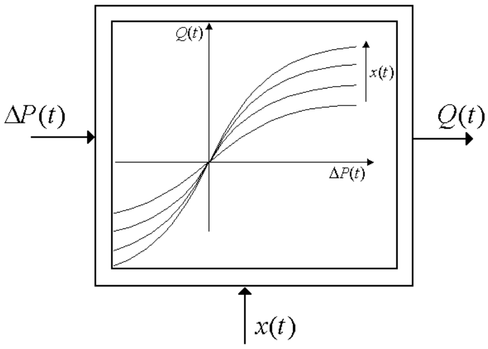

Figura 16. Bloque no lineal representando una válvula modulada.

PRESENCIA DE DERIVADORES

Consideremos ahora el siguiente circuito eléctrico:

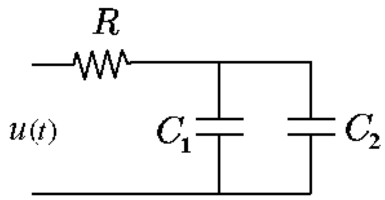

Figura 17. Circuito eléctrico

Siguiendo el procedimiento explicado para la obtención del DB, llegamos a la representación de la Figura 18.

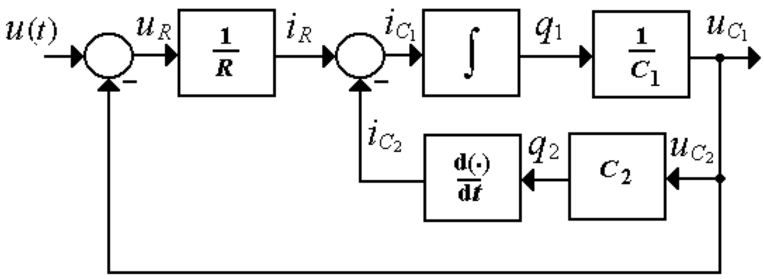

Figura 18. DB del circuito eléctrico.

Como puede verse en el DB, pese a haber aplicado correctamente el método, tenemos un derivador. Aún si hubiéramos elegido otra causalización, nos habría quedado un derivador de todas formas.

Esto se debe a que el sistema es en realidad de primer orden ya que las cargas de ambos capacitores no son independientes entre si. Conociendo una de ellas podemos determinar todas las variables del sistema. Sin embargo, tenemos dos relaciones dinámicas. Esto produce una situación que se denomina *singularidad estructural*.

El uso del derivador puede evitarse trabajando con *Álgebra de Bloques*. En los programas de simulación antiguos se producían problemas debido a la inclusión de bloques derivadores ya que esto implica ciertas dificultades para el tratamiento numérico. Sin embargo, prácticamente todos los programas de simulación modernos (incluido Simulik) cuentan con herramientas que transforman el problema en un *lazo algebraico* (que es otra singularidad más simple de tratar que veremos más adelante) que puede simularse mediante la inclusión de alguna rutina iterativa de resolución de ecuaciones implícitas o incluso con manipulación simbólica de las mismas.

Si bien es interesante eliminar a veces los derivadores para poder aplicar herramientas de análisis que son sólo válidas en ausencia de estos, desde el punto de vista de la simulación no es ya un problema crucial.

Sí es importante hacerlo en los casos en que haya derivadas de la entrada ya que esto puede ocasionar algunos problemas numéricos y de amplificación de ruido cuando se trabaja con señales realistas. Más adelante veremos un ejemplo de la aplicación del álgebra de bloques para eliminar un derivador de la entrada.

T2.1 Diagramas de Bloques y Ecuaciones de Estado

La representación de sistemas mediante ecuaciones de estado nos permite utilizar las herramientas de análisis y los métodos de simulación más generales para los sistemas dinámicos en general.

Una de las maneras más prácticas de obtener las ecuaciones de estado de un modelo es a partir de la representación en DB.

Recordemos que la representación en EE/ES es de la forma:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= f_1(x_1(t),\dots,x_n(t),u_1(t),\dots,u_m(t),t)\\
\dot{x}_2(t) &= f_2(x_1(t),\dots,x_n(t),u_1(t),\dots,u_m(t),t)\\
&\vdots\\
\dot{x}_n(t) &= f_n(x_1(t),\dots,x_n(t),u_1(t),\dots,u_m(t),t)\\
y_1(t) &= g_1(x_1(t),\dots,x_n(t),u_1(t),\dots,u_m(t),t)\\
y_2(t) &= g_2(x_1(t),\dots,x_n(t),u_1(t),\dots,u_m(t),t)\\
&\vdots\\
y_p(t) &= g_p(x_1(t),\dots,x_n(t),u_1(t),\dots,u_m(t),t)
\end{aligned}$$

donde las variables x_i son las variables de estado (que juntas conforman el vector de estado); y_i son las salidas y u_i son las entradas. Vimos también que conociendo el vector de estados y la entrada en un instante de tiempo podemos determinar estáticamente cualquier otra variable del sistema, y que cuando el vector de estados es minimal (el de menor dimensión posible) su número de componentes nos da el orden del modelo (n).

DEL DB A LAS ECUACIONES DE ESTADO

Para obtener estas ecuaciones a partir de un DB debemos en primer lugar identificar los vectores de estado, de entrada y de salida. Las entradas y salidas se ven claramente, ya que las primeras son las señales que no salen de ningún bloque (por ejemplo $F(t)$ en el DB de la Figura 12) y las otras son simplemente las variables que nos interesa medir.

Nos queda entonces determinar cómo elegir el vector de estados. Si miramos el DB de la Figura 12, vemos que, a excepción de los bloques integradores, el resto de los bloques calculan exclusivamente operaciones estáticas. Por este motivo, si conocemos las señales de salida de los integradores ($x(t)$ y $p(t)$ en dicho DB) y el valor de la entrada $F(t)$ podremos determinar mediante cálculos estáticos todas las otras señales utilizando las operaciones que realizan los distintos bloques estáticos. En virtud de esto, decimos lo siguiente:

Las variables de estado se corresponden con las salidas de los integradores del DB..

No debemos olvidar que aquí estamos asumiendo que hemos construido el DB con integradores en lugar de derivadores. De las definiciones de orden de un modelo dadas anteriormente, se desprende también que:

El orden de un Diagrama de Bloques es igual al número de bloques integradores.

Volviendo entonces al DB de la Figura 12, las variables de estado serán $x(t)$ y $p(t)$, y la variable de entrada será $F(t)$. El orden del modelo, por supuesto, será 2.

Tras identificar las variables de estado, debemos escribir las ecuaciones, es decir, la expresión de sus derivadas en función de las variables de entrada y de las mismas variables de estado. Dado que éstas variables son las salidas de los integradores, sus derivadas se encontrarán a la entrada de los integradores. En nuestro ejemplo, la primera ecuación comenzaría entonces según:

$$\dot{x}(t) = v(t)$$

Dado que $v(t)$ no es una variable de estado ni de entrada, la ecuación no está aún completa. Entonces debemos seguir *hacia atrás* leyendo el DB. El bloque que calcula $v(t)$ es una ganancia, que realiza la operación:

$$v(t) = \frac{1}{m} \cdot p(t)$$

y reemplazando esta en la ecuación anterior, llegamos a:

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{m} \cdot p(t)$$

que ahora sí es una ecuación de estados.

Procediendo de la misma manera para la otra variable, tenemos:

$$\dot{p}(t) = F_{neta}$$

que continua hasta llegar a las variables de estado y de entrada:

$$\dot{p}(t) = F(t) - F_{friccion}(t) - F_{resorte}(t) = F(t) - b \cdot v(t) - k \cdot \Delta x(t) = F(t) - \frac{b}{m} \cdot p(t) - k \cdot [x(t) - l_0]$$

Ordenando, nos quedan las ecuaciones de estado que siguen:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{1}{m} \cdot p(t) \\ \dot{p}(t) &= -k \cdot x(t) - \frac{b}{m} \cdot p(t) + F(t) + k \cdot l_0 \end{aligned}$$

DE LAS ECUACIONES DE ESTADO AL DB

En ciertos problemas, es deseable tener como modelo un Diagrama de Bloques en lugar de un conjunto de ecuaciones de estados. En particular, algunos simuladores como *Simulink* utilizan los Diagramas de Bloques como herramienta de ingreso de los modelos. Por esto, muchas veces será necesario construir Diagramas de Bloques a partir de las Ecuaciones de Estado.

El método para este pasaje es bastante sencillo. Ya sabemos que las variables de estado serán las salidas de los integradores y ya tenemos las herramientas suficientes para representar el resto de las funciones estáticas involucradas. Utilizando esto, podemos proceder de la misma forma que procedíamos para construir un Diagrama de Bloques a partir de las relaciones constitutivas y estructurales, es decir, construyendo el mismo de adelante hacia atrás buscando quien calcula cada señal.

De manera genérica, un sistema de EE/ES:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1(t),\dots,x_n(t),u_1(t),\dots,u_m(t),t) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1(t),\dots,x_n(t),u_1(t),\dots,u_m(t),t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1(t),\dots,x_n(t),u_1(t),\dots,u_m(t),t) \\ y_1(t) &= g_1(x_1(t),\dots,x_n(t),u_1(t),\dots,u_m(t),t) \\ y_2(t) &= g_2(x_1(t),\dots,x_n(t),u_1(t),\dots,u_m(t),t) \\ &\vdots \\ y_p(t) &= g_p(x_1(t),\dots,x_n(t),u_1(t),\dots,u_m(t),t) \end{aligned}$$

puede representarse mediante el siguiente Diagrama de Bloques

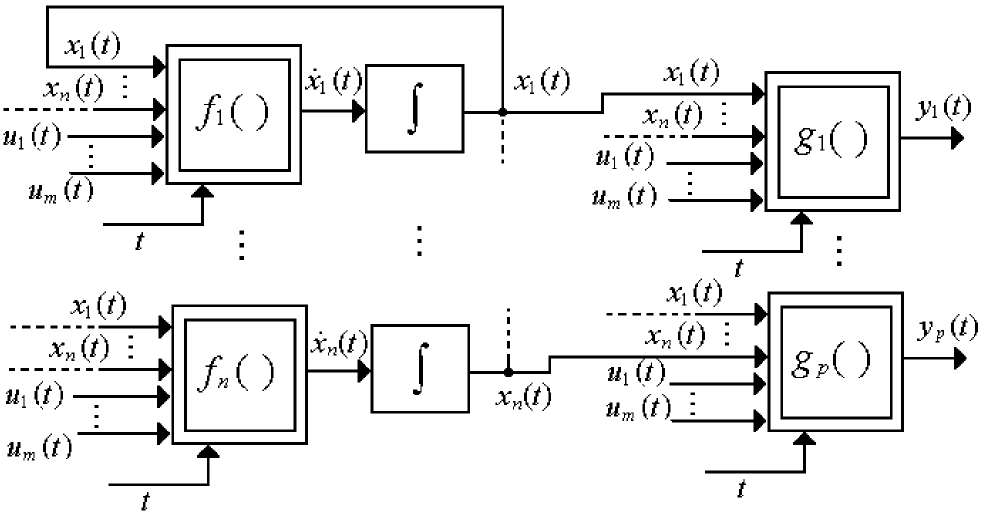

Figura 19. Diagrama de Bloques asociado a un Sistema de EE/ES genérico.

DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA AL DB

Como ya mencionamos antes, una de las formas de representar modelos continuos es a través de la ecuación diferencial ordinaria. Pese a que esta representación nos brinda únicamente modelos externos (entrada salida), en muy habitual encontrar modelos de sistemas dinámicos representados de esta forma.

Por esto, en muchos problemas debemos obtener un Diagrama de Bloques o bien las Ecuaciones de Estado y de Salida a partir de la EDO. En particular, si queremos simular con Simulink un sistema del cual conocemos el modelo en forma de ecuación diferencial ordinaria, será necesario contar con el DB.

El pasaje de la EDO al DB es un problema de *realización*. Puede haber infinitos DBs que representen una EDO. Esto es porque el DB es un modelo mucho más completo, ya que no sólo contiene información sobre las entradas y salidas sino que también incorpora las variables de estado.

Un método simple para este pasaje consiste en comenzar con la salida y colocar una cadena de integradores hacia atrás de dicha salida con tantos integradores como el orden de la EDO (la máxima derivada de la salida).

Tras esto, tenemos la salida y sus *n* derivadas representadas. Luego se debe despejar el término de la máxima derivada de la salida y representar la función que la calcula utilizando bloques estáticos y eventuales derivadores para la entrada.

Por ejemplo, la EDO que sigue es una versión de la *Ecuación de Duffing*.

$$\ddot{y}(t) + d \cdot \dot{y}(t) + [y^3(t) - y(t)] = u(t)$$

Esta ecuación no lineal ha sido y es muy estudiada debido al comportamiento caótico que presenta cuando $u(t)$ es una entrada senoidal. Un Sistema Físico Idealizado que responde a la ecuación de Duffing es el que se muestra en el esquema de la Figura 20.

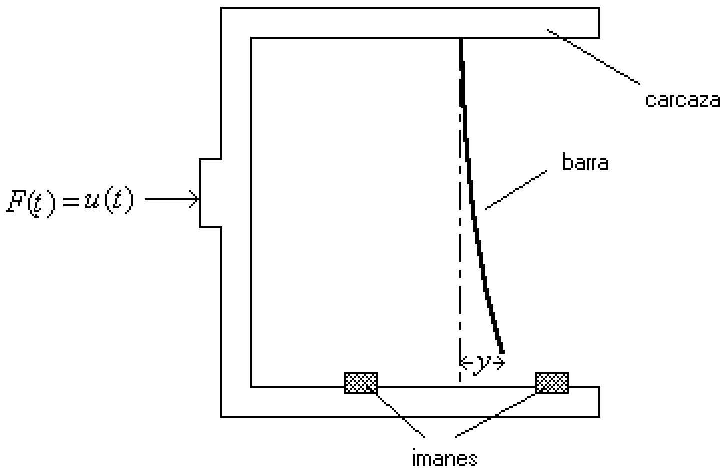

Figura 20. Esquema de un sistema mecánico asociado a la Ecuación de Duffing.

Para obtener el Diagrama de Bloques entonces procedemos como sigue. En primer lugar colocamos una cadena de dos integradores:

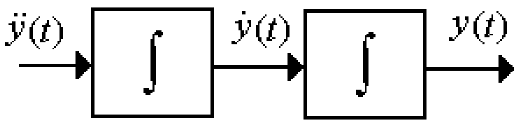

Figura 21. Primer paso para la construcción del DB

Luego, debemos despejar la expresión de la derivada segunda de y. Esto es:

$$\ddot{y} = u(t) - d \cdot \dot{y} - (y^3 - y)$$

con lo que nos queda el siguiente DB

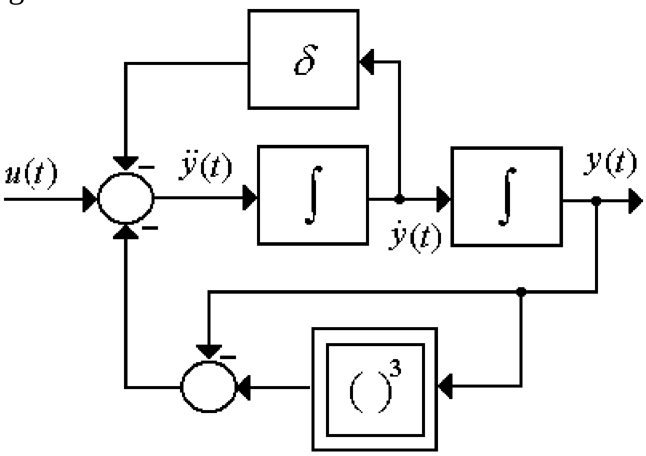

Figura 22. DB de la Ecuación de Duffing

Consideremos como último ejemplo la EDO:

$$\ddot{y}(t) + a_1 \cdot \dot{y}(t) + a_0 \cdot y(t) = b_1 \cdot \dot{u}(t) + b_0 \cdot u(t)$$

En este caso, de acuerdo al método visto para obtener el DB tenemos que comenzar de acuerdo a la Figura 21. Luego, despejamos:

$$\ddot{y}(t) = b_1 \cdot \dot{u}(t) + b_0 \cdot u(t) - a_1 \cdot \dot{y}(t) - a_0 \cdot y(t)$$

de donde nos queda el siguiente DB:

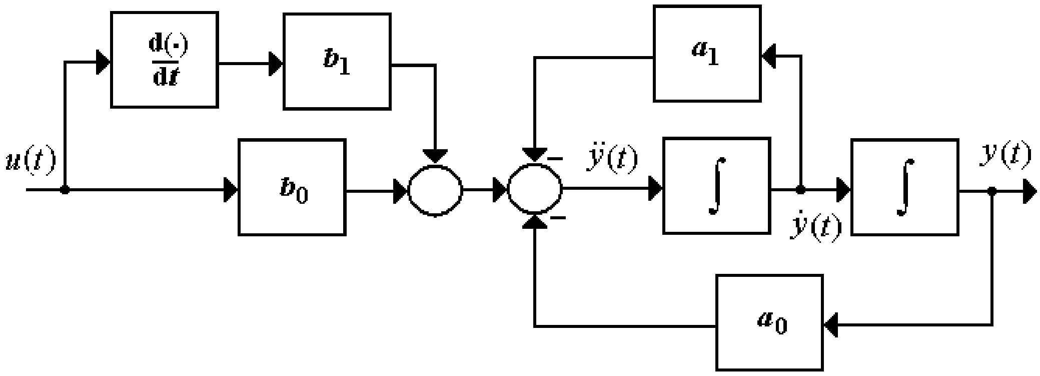

Figura 23. DB con un bloque derivador

La presencia del bloque derivador es en este caso una desventaja, ya que si la entrada fuese por ejemplo un escalón, tendríamos a la salida de este bloque una señal no acotada (un impulso), lo que teóricamente puede ser aceptable pero en la práctica de simulación no es para nada conveniente.

Por otro lado, si tuviéramos en dicha entrada la medición de una señal real con ruido, este se vería amplificado por la presencia del derivador afectando de manera drástica la performance de la simulación.

Por fortuna, esto se puede solucionar modificando el DB aplicando reglas del *Álgebra de Bloques*, llegando a un diagrama equivalente desde el punto de vista externo sin derivadores.

Las reglas del Álgebra de Bloques no son otra cosa que las reglas más elementales del álgebra llevadas al lenguaje de los Diagramas de Bloques. La idea es ir desplazando los bloques dentro del DB de forma tal que en cada desplazamiento nos quede un sistema equivalente.

En el caso particular de la presencia de los derivadores, la idea es llevarlos hacia donde están los integradores para que se cancelen.

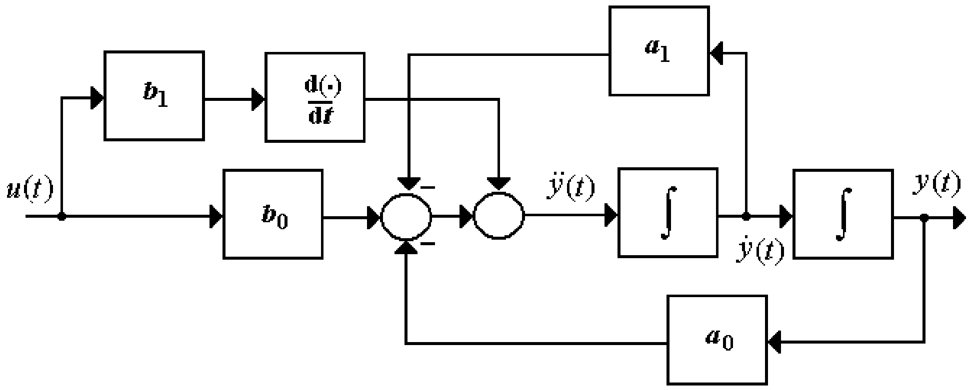

Figura 24. Primer paso: intercambio del derivador y ganancia y reagrupamiento de sumadores.

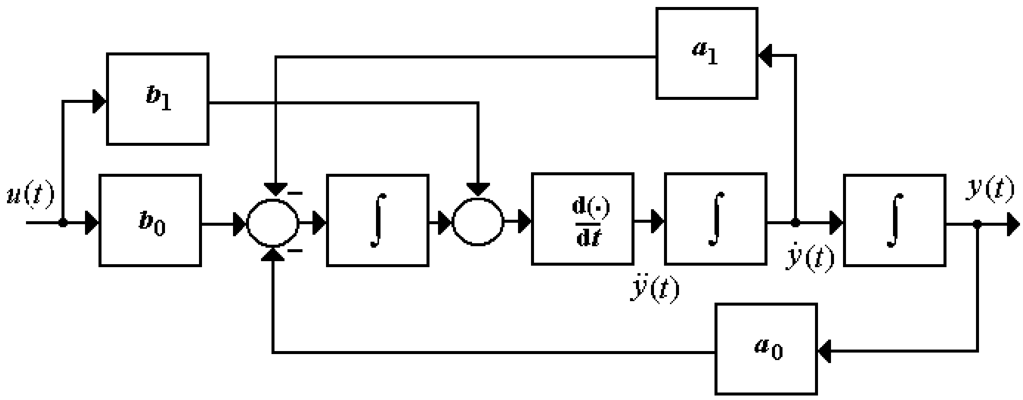

Figura 25. Segundo paso: Pasaje del derivador como factor común.

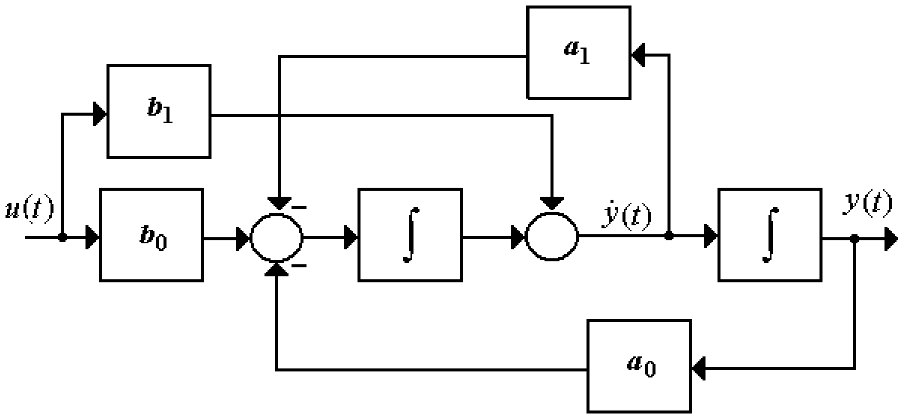

Figura 24. Último paso: Eliminación del derivador.

Notar que en el último DB (sin derivadores), la derivada de la salida no es más una variable de estado.