DSF - 1991 - Problema Resuelto : Linealización - Respuesta Temporal

El péndulo invertido de la fig(1) es un modelo del control de posición de un impulsor espacial de despegue. El objetivo del control de posición es mantener al impulsor espacial en posición vertical.

El impulsor vertical real es inestable a menos que se aplique una fuerza F de control adecuada.

La fig(2) es el DB del sistema de control. Nótese que el hecho de que la entrada de referencia θ_{ref} sea cero significa que se quiere mantener el péndulo invertido en posición vertical.

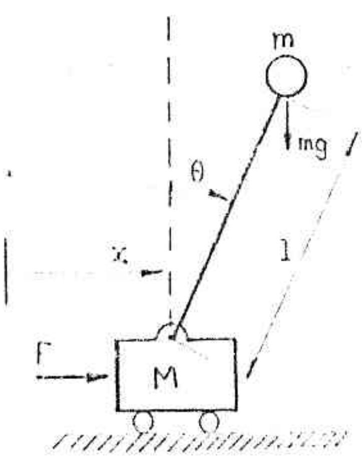


fig (1)

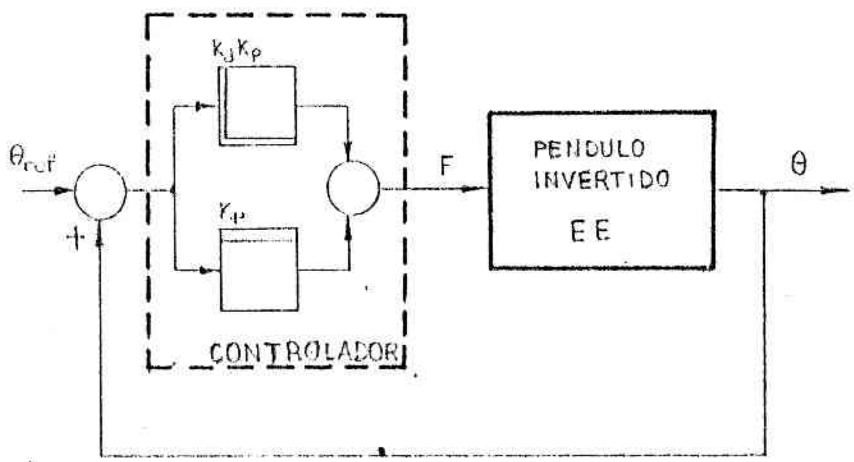


fig.(2)

El modelo matemático del péndulo invertido, con EE es:

$$
EE \begin{cases} \dot{x} = V \\ \dot{V} = \dfrac{F + m l \omega^2 \operatorname{sen}\theta - m g \operatorname{sen}\theta\cos\theta}{M + m - m\cos^2\theta} \\ \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = \dfrac{F + m l \omega^2 \operatorname{sen}\theta - (M+m)\, g \operatorname{tg}\theta}{m l \cos\theta - (M+m)\, l . \dfrac{1}{\cos\theta}} \end{cases} \qquad ES \left\{ y = \theta \right.
$$

Suponiendo los valores numéricos:

M = 1000 Kg $\qquad$ l = 10 m $\qquad$ m = 200 Kg

K_p = 14.27 10^3 N/rad $\qquad$ K_d = 0.491 seg

a) Determinar el punto de trabajo correspondiente a $\bar{\theta}_{ref} = 0$

b) Hallar la FT del sistema linealizado alrededor del punto de trabajo hallado. (*)

c) Indicar un mnemónico que describa al controlador

d) Si se produce una perturbación en escalón en θ , de amplitud 0.1 rad, graficar la evolución θ(t) caracterizando a la curva. Calcular el correspondiente tiempo de respuesta al 2 % hasta alcanzar el equilibrio.

(*) Tener en cuenta que no es necesario linealizar todas las EE para

Solución

a) $\bar{\theta}_{ref} = 0$

En RPE (régimen permanente estacionario) es:

$$\dot{x} = \dot{V} = \dot{\theta} = \dot{\omega} = 0 \qquad (1)$$

y en las EE resulta:

$$\begin{cases} \dot{x} = \bar{V} = 0 & (2) \\ \dot{\theta} = \bar{\omega} = 0 & (3) \\ \dot{V} = 0 = \dfrac{\bar{F} + m\,l\,\bar{\omega}^2 \operatorname{sen}\bar{\theta} - mg \operatorname{sen}\bar{\theta}\cos\bar{\theta}}{M + m - m\cos^2\bar{\theta}} & (4) \\ \dot{\omega} = 0 = \dfrac{\bar{F} + m\,l\,\bar{\omega}^2 \operatorname{sen}\bar{\theta} - (M+m)\,g\,\operatorname{tg}\bar{\theta}}{m\,l\cos\bar{\theta} - (M+m)\,l\,\dfrac{1}{\cos\bar{\theta}}} & (5) \end{cases}$$

De (4) y (5) $\begin{cases} \bar{F} + m\,l\,\bar{\omega}^2 \operatorname{sen}\bar{\theta} - mg \operatorname{sen}\bar{\theta}\cos\bar{\theta} = 0 \\ \bar{F} + m\,l\,\bar{\omega}^2 \operatorname{sen}\bar{\theta} - (M+m)\,g\,\operatorname{tg}\bar{\theta} = 0 \end{cases}$

restando m.a.m.: $-mg \operatorname{sen}\bar{\theta}\cos\bar{\theta} + (M+m)\,g\operatorname{tg}\bar{\theta} = 0$

$$-mg\operatorname{tg}\bar{\theta}\cos^2\bar{\theta} + Mg\operatorname{tg}\bar{\theta} + mg\operatorname{tg}\bar{\theta} = 0$$

$$mg\operatorname{tg}\bar{\theta}\,(1 - \cos^2\bar{\theta}) + Mg\operatorname{tg}\bar{\theta} = 0$$

$$\operatorname{tg}\bar{\theta}\,(mg\operatorname{sen}^2\bar{\theta} + Mg) = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\bar{\theta} = 0 \Rightarrow \bar{\theta} = 0$$

Luego resulta:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \bar{\theta} = 0 & \bar{\omega} = 0 \\ \bar{V} = 0 & \bar{F} = 0 \end{array}} \quad \text{Punto de Trabajo}$$

b) Considerando que en el DB, la salida del péndulo invertido es θ, hace falta linealizar sólo la EE correspondiente a $\dot{\omega}$ (ya que $\dot{\omega}$ no depende ni de V, ni de x; no hace falta linealizar la ecuación de $\dot{V}$)

Tenemos que: $\dot{\omega} = f(F, \omega, \theta)$

de donde:

$$\Delta\dot{\omega}(t) = \left.\frac{\partial f}{\partial F}\right| \cdot \Delta F(t) + \left.\frac{\partial f}{\partial \omega}\right| \cdot \Delta\omega(t) + \left.\frac{\partial f}{\partial \theta}\right| \cdot \Delta\theta(t)$$

$\Delta\theta_0 = 0,1$ rad

Luego

$$\Delta\theta(s) = \frac{0,1\, s}{s^2 + 0,7 s + 2510}$$

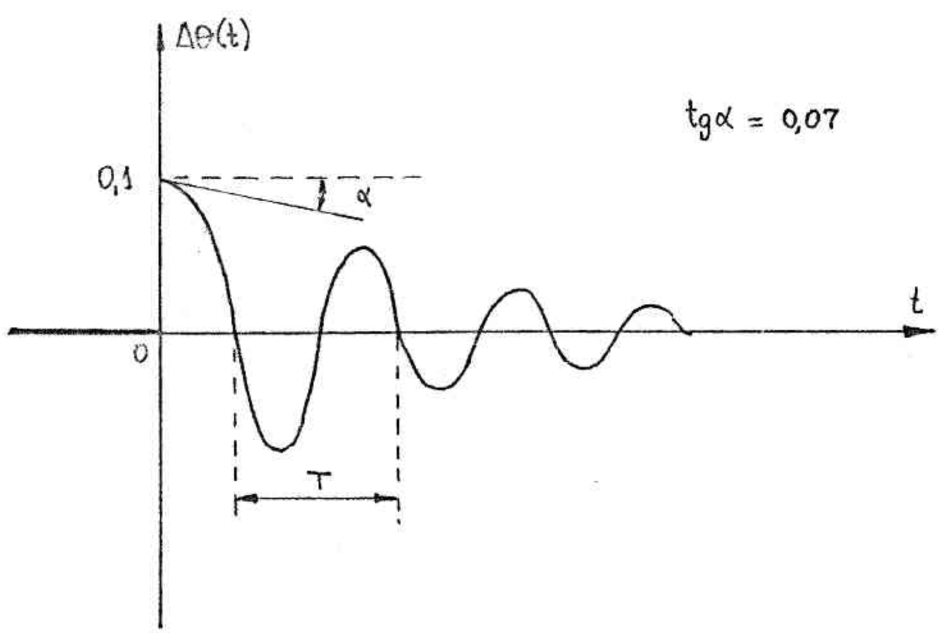
$$\Delta\theta(0^+) = \lim_{s\to\infty} s\,\Delta\theta(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{0,1\, s^2}{s^2+0,7 s+2510} = 0,1$$

$$\Delta\theta(t\to\infty) = \lim_{s\to 0} s\,\Delta\theta(s) = \lim_{s\to 0} \frac{0,1\, s^2}{s^2+0,7 s+2510} = 0$$

$$\Delta\dot{\theta}(0^+) = \lim_{s\to\infty} s\left[s\,\Delta\theta(s) - \Delta\theta(0^+)\right] =$$

$$= \lim_{s\to\infty}\left[\frac{0,1\, s^3}{s^2+0,7 s+2510} - 0,1\, s\right] =$$

$$\Delta\dot{\theta}(0^+) = \lim_{s\to\infty}\left[\frac{\cancel{0,1 s^3} - \cancel{0,1 s^3} - 0,07 s^2 - 251 s}{s^2+0,7 s+2510}\right] = -0,07$$

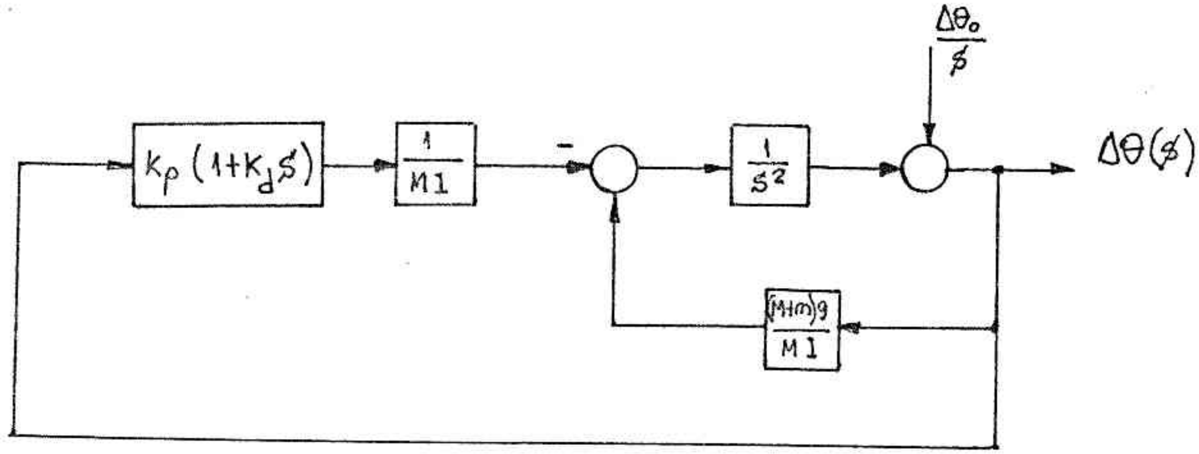


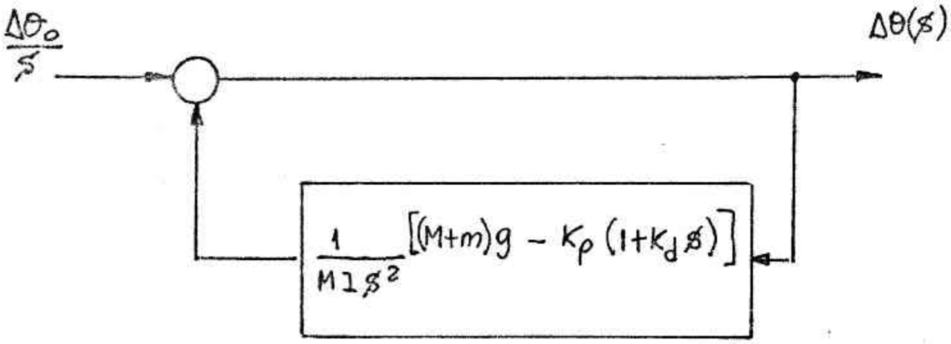
ω : pulsación de la oscilación $\quad \omega = |\mathrm{Im}(\lambda_{1,2})| = 50 = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{50}$ seg

$T = 0,125$ seg

τ : cte de tiempo del decaimiento exponencial de la oscilación

d) considerando una perturbación en escalón en θ, alrededor de punto de operación $\bar{\theta} = 0$, el DBIL en el dominio de la transformada resulta:





$$\frac{\Delta\theta(s)}{\frac{\Delta\theta_0}{s}} = \frac{1}{1 - \frac{(M+m)g - K_p - K_p K_d s}{MI s^2}} = \frac{MI s^2}{MIs^2 + K_p K_d s + [K_p - (M+m)g]}$$

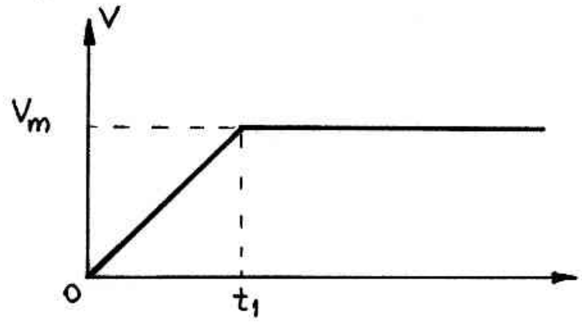
reemplazando numéricamente :

$$\frac{\Delta\theta(s)}{\frac{\Delta\theta_0}{s}} = \frac{s^2}{s^2 + \frac{K_p K_d}{MI} s + \frac{[K_p - (M+m)g]}{MI}} = \frac{s^2}{s^2 + 0{,}7 s + 2510}$$

$$\left.\begin{aligned} 2\xi\omega_n &= 0{,}7 \\ \omega_n^2 &= 2510 \Rightarrow \omega_n \cong 50 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \xi = 0{,}007 \quad \text{subamortiguado}$$

DSF - 1991 . Problema Resuelto : Linealización

Para un vehículo de masa m se prescribe una evolución de su velocidad en función del tiempo como la indicada en la figura



Se supone que las únicas fuerzas actuantes sobre el vehículo son:

$F(t)$: fuerza de tracción

F_R : fuerza de rozamiento con el aire proporcional al cuadrado de la velocidad

1/ Haga un modelo del sistema y obtenga un modelo incremental lineal alrededor de la trayectoria de operación especificada

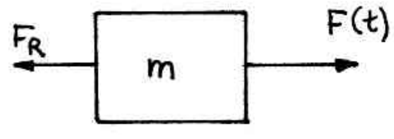
2/ Obtenga la ley de la fuerza $F(t)$ que debe aplicarse para lograr la respuesta deseada. ¿Es necesario conocer $F(t)$ para calcular el modelo linealizado? ¿Por qué?

Solución

1/ La trayectoria de operación es:

$$V^*(t) = \begin{cases} \dfrac{V_m}{t_1} \cdot t & 0 \leq t < t_1 \\ \\ V_m & t \geq t_1 \end{cases} \qquad (1)$$

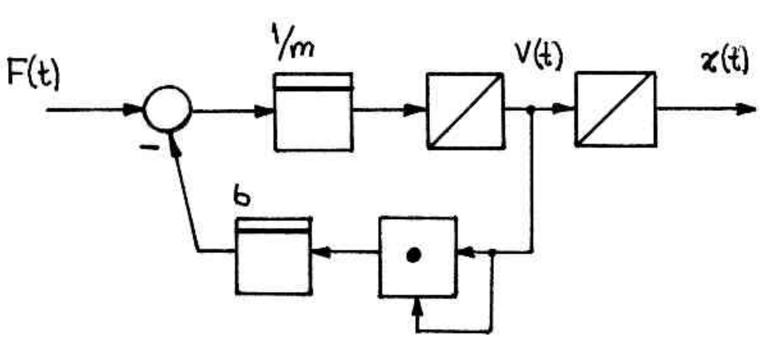
El diagrama de cuerpo libre sobre el vehículo, resulta:



$$m\,\dot{V}(t) = F(t) - b.[V(t)]^2$$

$$\boxed{EE \begin{cases} \dot{V}(t) = \dfrac{1}{m}\left[F(t) - b.[V(t)]^2\right] & (2) \\ \dot{x}(t) = V(t) & (3) \end{cases}}$$

El DB resulta:



En el modelo con EE, sólo la ecuac. (2) es no-lineal y por lo tanto debemos linealizar sólo esta ecuación. La ecuac. (2) puede escribirse

$$\dot{V}(t) = g\left(F(t), V(t)\right)$$

luego:

$$\Delta\dot{V}(t) = \left.\frac{\partial g}{\partial F}\right|_{F^*(t),V^*(t)} \cdot \Delta F(t) + \left.\frac{\partial g}{\partial V}\right|_{F^*(t),V^*(t)} \cdot \Delta V(t)$$

donde $F^*(t)$: trayectoria de operación de la entrada

$V^*(t)$: trayectoria de operación de la salida

Se tiene que

$\frac{\partial g}{\partial F} = \frac{1}{m}$ independiente de $F(t)$ y $V(t)$, por lo que no es necesario conocer $F^*(t)$ para calcular $\left.\frac{\partial g}{\partial F}\right|_{F^*(t),V^*(t)}$, que resulta:

$$\left.\frac{\partial g}{\partial F}\right|_{F^*(t),V^*(t)} = \frac{1}{m}$$

Además

$$\left.\frac{\partial g}{\partial V}\right|_{F^*(t),V^*(t)} = \left.\frac{-2b}{m}V(t)\right|_{F^*(t),V^*(t)} = \begin{cases} -\frac{2b}{m}\cdot\frac{V_m}{t_1}\cdot t & 0\leq t < t_1 \\ -\frac{2b}{m}\cdot V_m & t \geq t_1 \end{cases}$$

Luego, el MMIL resulta:

$$\Delta\dot{V}(t) = \begin{cases} \frac{1}{m}\cdot\Delta F(t) - \frac{2b}{m}\cdot\frac{V_m}{t_1}\cdot t\cdot\Delta V(t) & 0\leq t < t_1 \end{cases}$$

$$\Delta\dot{x}(t) = \Delta V(t) \qquad \forall t \geq 0$$

2/ La ley de la fuerza $F(t)$ correspondiente a la trayectoria de operación puede obtenerse de (2) reemplazando $V(t)$ por $V^*(t)$, luego:

$$F(t) = m\,\dot{V}(t) + b\,[V(t)]^2$$

y

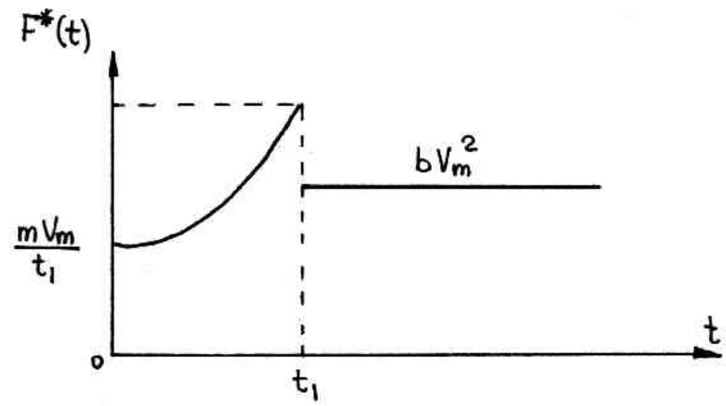
$$F^*(t) = m\,\dot{V}^*(t) + b\,[V^*(t)]^2$$

considerando (1)

$$\dot{V}^*(t) = \begin{cases} \dfrac{V_m}{t_1} & \text{si} \quad 0 \leq t < t_1 \\ 0 & \text{si} \quad t \geq t_1 \end{cases}$$

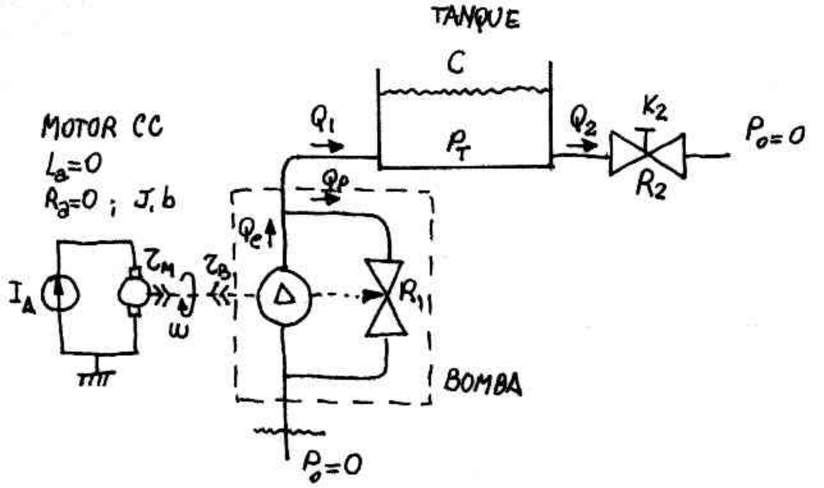
y entonces

$$F^*(t) = \begin{cases} m\,\dfrac{V_m}{t_1} + \dfrac{b \cdot V_m^2}{t_1^2} \cdot t^2 & \text{si} \quad 0 \leq t < t_1 \\ b\,V_m^2 & \text{si} \quad t \geq t_1 \end{cases}$$

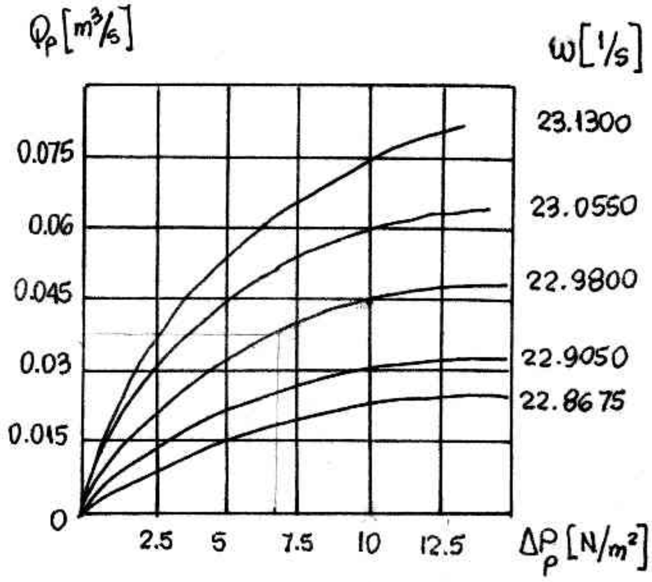


3/ Haga el DBIL alrededor de la trayectoria de operación válido para todo $t \geq 0$

Problema adicional   Mesa Octubre 1990



SISTEMA DE SUMINISTRO DE LIQUIDO



CARACTERISTICA DE LA RESISTENCIA DE PERDIDA DE LA BOMBA (R_1)

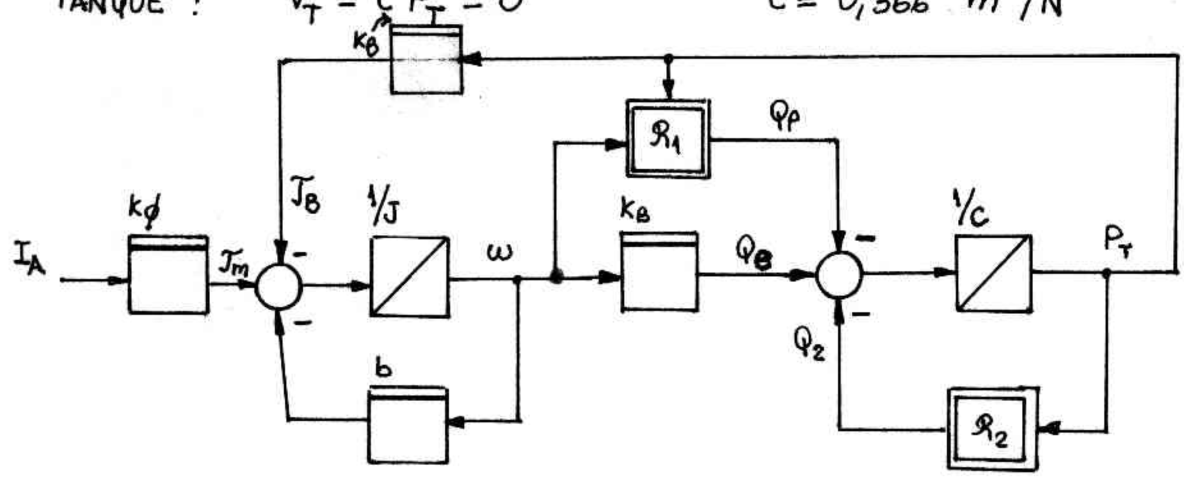
MOTOR CC : $J = 0{,}4\ Nms^2$ $b = 1 Nms$ $K_\phi = 0{,}493\ Nm/A$

BOMBA : $Q_B - K_B\,\omega = 0$ $\mathcal{T}_B - K_B\,\Delta P_B = 0$ $k_B = 1\ m^3$

$\mathcal{T}_B$: torque mecánico resistente de la bomba

VALVULA DE CARGA R_2 : $Q_2 - K_2\sqrt{\Delta P_2} = 0$

TANQUE : $V_T - C\,P_T = 0$ $C = 0{,}366\ m^5/N$



1/ Para los valores estacionarios $\bar{I}_A = 60\,A$ $\bar{P}_T = 96\ N/m^2$

1.1/ Determine el valor de $\bar{\omega}$ que se establece

1.2/ Calcule K_2 de la válvula de carga $\mathcal{R}_2$

2/ Obtenga un DBΔ lineal alrededor del punto de trabajo hallado nuyendo la presión P_T de 96 N/m^2 a [illegible]6 N/m^2 (2)

3.1 / Esboce la evolución temporal de $w(t)$ a partir de $t \geq t_0^-$, determinando $w(t_0^+)$; $w(t \to \infty)$ y $w'(t_0^+)$

3.2 / En cuanto tiempo se reestabiliza el sistema ?