

LINEALIZACION DE SISTEMAS DINAMICOS

A01006.94

D . S . F

A01007.99

DINAMICA DE LOS SISTEMAS FISICOS

A-844/E-147

Resumen

En este apunte se analiza, a partir de un modelo con EE del sistema, el procedimiento que permite obtener un Modelo Matemático Incremental Lineal que aproxima al sistema para pequeñas perturbaciones alrededor de un Punto de Operación (Linealización Estacionaria) o de una Trayectoria de Operación (Linealización Inestacionaria). Previamente se obtiene un Modelo Matemático Incremental Exacto del sistema.

Se analiza además el procedimiento de Linealización a partir de otros Modelos Matemáticos del sistema, como ser a partir del DB, o de la EDO.

Se dan ejemplos de la determinación del Punto de Operación a partir de diferentes MM, como ser: EE, DB, EDO.

INDICE

1. Introducción
2. Análisis Incremental
3. Linealización
 - 3.1 Linealización Estacionaria
 - 3.2 Linealización Inestacionaria
 - 3.3 Linealización sobre el DB
 - 3.3.1 Linealización Gráfica
 - 3.3.2 Linealización Analítica
 - 3.4 Linealización sobre la EDO
4. Determinación del Punto de Operación
 - 4.1 Ejemplo de Determinación del PO a partir de las EE
 - 4.2 Ejemplo de Determinación del PO a partir del DB
 - 4.3 Ejemplo de Determinación del PO a partir de la EDO

Linealización de Sistemas Dinámicos

1. Introducción

El estudio de la dinámica de Sistemas No-Lineales en un entorno de un punto de equilibrio o de una solución periódica se simplifica considerablemente obteniendo un Modelo Incremental Lineal que aproxime al Modelo No-Lineal del sistema, para pequeñas perturbaciones alrededor de dichas soluciones particulares.

Así mismo, la estabilidad de los puntos de equilibrio puede determinarse, en la mayoría de los casos, a partir del estudio de la estabilidad del Modelo Incremental Lineal asociado a cada punto de equilibrio.

En lo que sigue, el análisis general se realiza sobre un modelo con Ecuaciones de Estado (EE) del sistema, si bien podría hacerse un análisis similar sobre otro tipo de Modelo Matemático (MM).

Se dan, sin embargo, algunos métodos sobre la base de diversos tipos de MM

2. Análisis Incremental

Sea el siguiente MM con EE de un sistema multivariable de: n estados, m entradas y p salidas:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) & \text{(Ecuación Vectorial de Estado)} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} y(t) = g(x(t), u(t), t) & \text{(Ecuación Vectorial de Salida)} \end{cases} \quad (2)$$

con $t \in T \subset \mathbb{R}$ y

$$u(t) \in \mathbb{R}^m$$

vector de entrada

$$x(t) \in \mathbb{R}^n$$

$$y(t) \in \mathbb{R}^p$$

$$(2)$$

$$f: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad (4)$$

$$g: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^p \quad (5)$$

Si alguna de las funciones f ó g no es lineal en x o en u , se tiene un **sistema alineal**

Como el problema dinámico está concentrado en la EVE (1), lo importante es la alinealidad de f . Supondremos que esta función satisface las hipótesis que se le imponen en el apunte A01C10.88: "Solución de la Ecuación General de Estado", al tratar el teorema de existencia y unicidad

Un análisis global del sistema tiene en cuenta las relaciones entre las variables de estado, entrada y salida (3) dadas por las ecuaciones (1) y (2), estando, estas variables, medidas con referencia al sistema relajado.

Un análisis incremental, en cambio, considera las relaciones (consecuencia de las ecuaciones (1) y (2)) entre los incrementos de las variables de estado, de entrada y de salida. Las variables incrementales son las magnitudes medidas con referencia a un Régimen Permanente Estacionario (RPE) o a un Régimen Permanente Variable (RPV). Suele hablarse del valor de las variables en RPE o de Punto de Trabajo o de Operación; en tanto que para un RPV se habla de Trayectoria de Operación.

Notamos:

$x(t)$, $u(t)$, $y(t)$ variables globales

$\Delta x(t)$, $\Delta u(t)$, $\Delta y(t)$ variables incrementales

Por el caso RPE

$\bar{x}, \bar{u}, \bar{y}$

son vectores constantes que designan valores constantes de las magnitudes globales en el punto de operación

$$0 = f(\bar{x}, \bar{u}, t)$$

$$\bar{y} = g(\bar{x}, \bar{u}, t)$$

$\left. \begin{array}{l} 0 = f(\bar{x}, \bar{u}, t) \\ \bar{y} = g(\bar{x}, \bar{u}, t) \end{array} \right\} \Leftrightarrow$ Satisfacen las ecuaciones (1) y (2)

Las variables globales ~~no~~ pueden expresarse:

$$x(t) = \bar{x} + \Delta x(t)$$

$$u(t) = \bar{u} + \Delta u(t)$$

(6)

$$y(t) = \bar{y} + \Delta y(t)$$

Para el caso RPV

 $x^*(t), u^*(t), y^*(t)$

son vectores variables que designan los valores de las magnitudes globales sobre la trayectoria de operación. Son trayectorias en los espacios de estado, de entrada y

$$\dot{x}^*(t) = f(x^*(t), u^*(t), t)$$

de salida respectivamente, que

$$y^*(t) = g(x^*(t), u^*(t), t)$$

$\left. \begin{array}{l} \dot{x}^*(t) = f(x^*(t), u^*(t), t) \\ y^*(t) = g(x^*(t), u^*(t), t) \end{array} \right\} \Leftrightarrow$ satisfacen las ecuaciones (1) y (2)

Las variables globales pueden expresarse:

$$x(t) = x^*(t) + \Delta x(t)$$

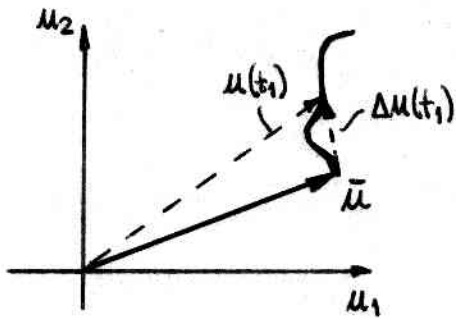
$$u(t) = u^*(t) + \Delta u(t)$$

(6')

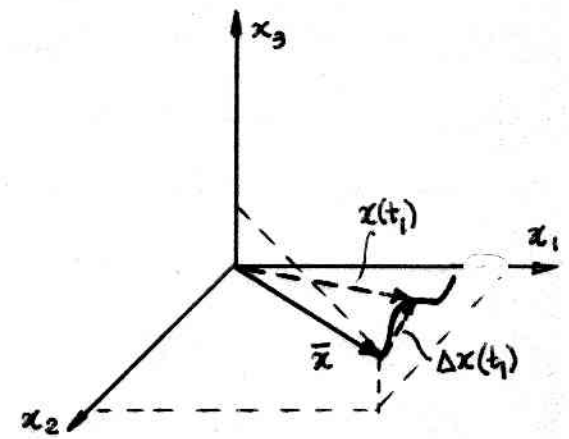
$$\Delta y(t) = y^*(t) + \Delta y(t)$$

Puede pensarse que en el sistema sucede lo siguiente: perturbaciones $\Delta u(t)$ sobre los valores de RP de las entradas provocan incrementos $\Delta x(t)$, $\Delta y(t)$ sobre los respectivos valores globales del RP de los estados y de las salidas.

Para un RPE



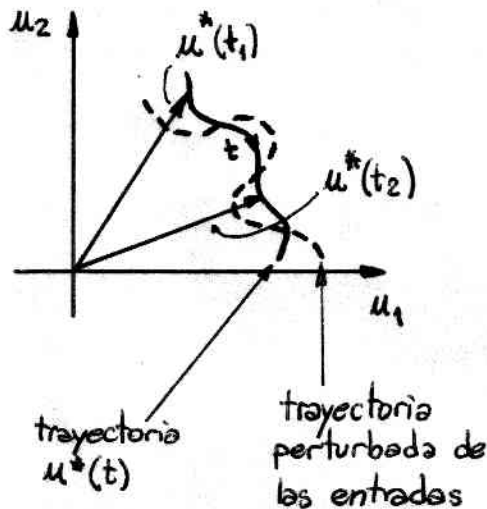
Espacio de Entradas



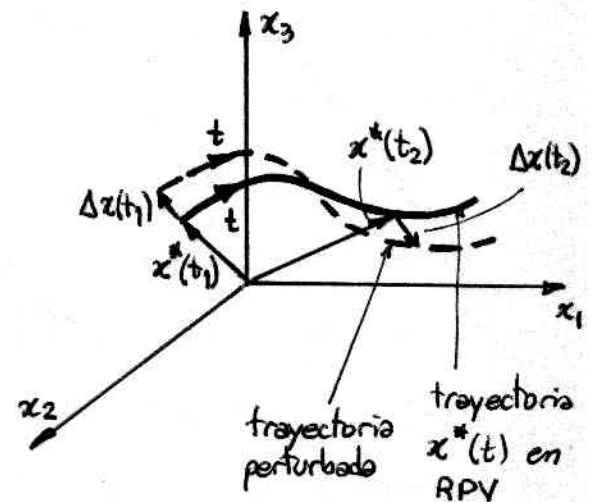
Espacio de Estados

fig (1)

Para un RPV



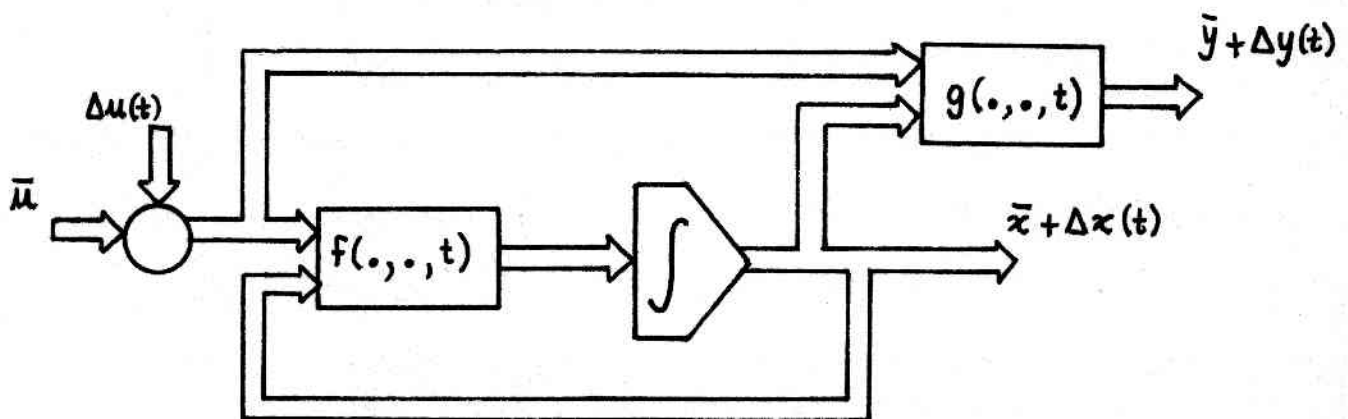
Espacio de Entradas

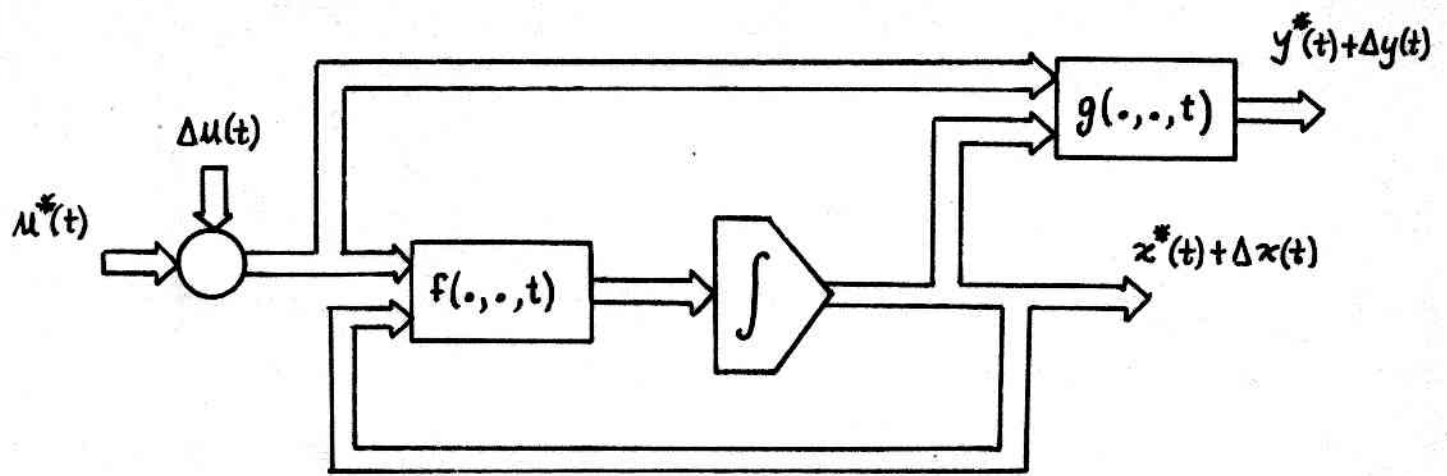


Espacio de Estados

fig (2)

La situación planteada puede representarse con los siguientes DB, que son modelos alternativos de las ecuaciones (1) y (2) para los casos de RPE y de RPV respectivamente





fig(4) DB2: RPV perturbado

Para poder hacer un análisis incremental, es necesario conocer previamente el RP. Si se dispone de un MM (EE, DB, etc), el RP puede obtenerse mediante:

- * solución analítica del modelo
- * solución numérica o simulación digital
- * métodos especiales (isoclinas, primer armónico, etc.)

Si no se dispone del MM, se debe recurrir a la medición y registro de las variables del sistema real. Hay métodos experimentales - analíticos para resolver problemas como los que se abordan aquí sobre el MM.

3. Linealización

Dado el MM y el RP interesa conocer la ley dinámica que relaciona las variables incrementales $\Delta u(t)$ y $\Delta x(t)$. Bajo ciertas hipótesis esta ley dinámica (que permite el análisis incremental) puede expresarse como un MM lineal, con un grado satisfactorio de aproximación.

Denominamos linealización al procedimiento que per-

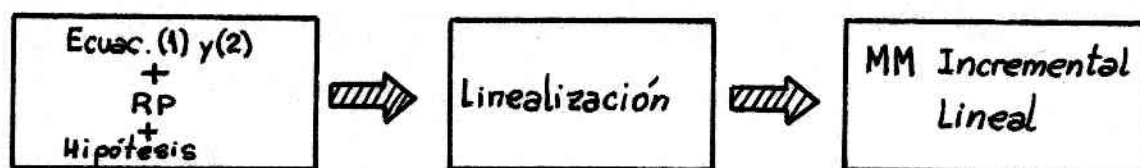


fig (5)

A un RPE corresponde una Linealización Estacionaria (LE) y a un RPV corresponde una Linealización Inestacionaria (LI). Si el MM (1)+(2) es estacionario (es decir f y g no dependen explícitamente de t), entonces, mediante la LE se obtiene un MMIL estacionario.

Mediante una LI se obtiene un MMIL inestacionario

3.1 Linealización Estacionaria

Supongamos que el MM (1)+(2) es estacionario (se elimina t como argumento de f y g) y que se encuentra inicialmente relajado y con entradas nulas.

Al aplicarse una entrada constante $u(t) = \bar{u}$, el sistema sale del reposo y transiciona al nuevo estado de régimen $\bar{x}$, el cual es alcanzado luego de un tiempo de establecimiento o de respuesta t_r . (se ha supuesto que el sistema es estable).

Consideremos que en un instante $t_0 > t_r$, por efecto de una perturbación (impulsional) el estado da un salto $\Delta x(t_0)$:

$$x(t_0) = \bar{x} + \Delta x(t_0) \quad (7)$$

Además, a partir de t_0 , las entradas son perturbadas

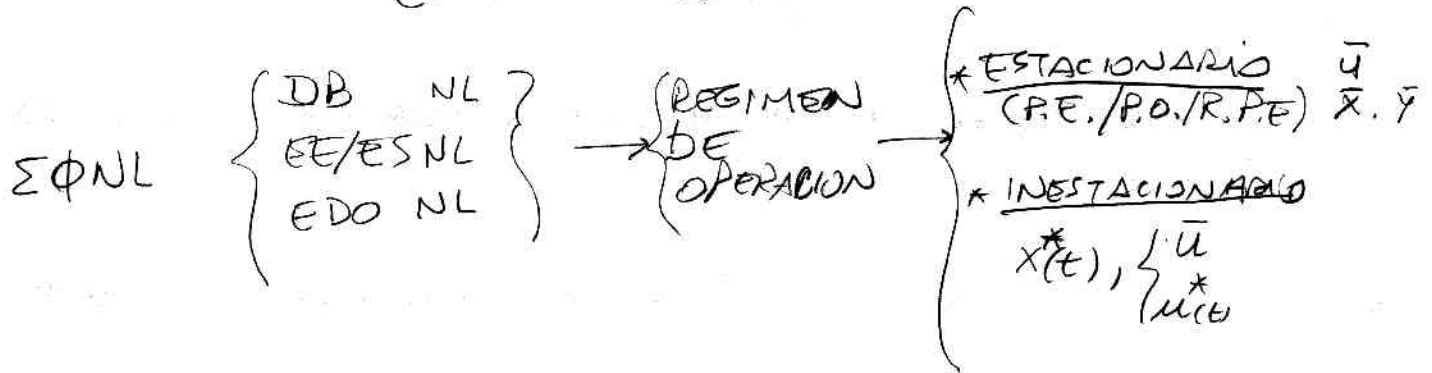
$$u(t) = \bar{u} + \Delta u(t) \quad t \geq t_0 \quad (8)$$

Por (7) y (8) resulta:

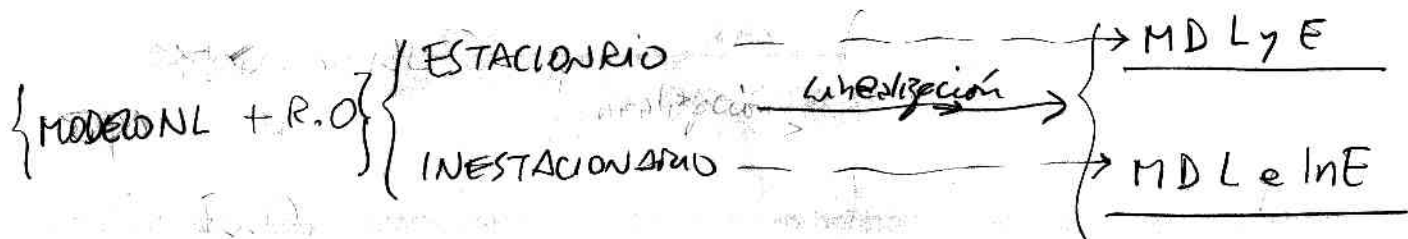
$$x(t) = \bar{x} + \Delta x(t) \quad t > t_0 \quad (9)$$

DSF - Vi 30 Ago '96

Linealización { estacionaria
inestacionaria



$\left. \begin{array}{l} * ESTACIONARIO \\ * INESTACIONARIO \end{array} \right\}$



Ejemplos:

- 1- Circuitos Eléctricos - Bilo
- 2- Osc. de Ampl. y Free Contr.

Llevando (8) y (9) a (1), (2), resulta:

$$\frac{d}{dt}(\bar{x} + \Delta x(t)) = f(\bar{x} + \Delta x(t); \bar{u} + \Delta u(t)) \quad (10)$$

$$\bar{y} + \Delta y(t) = g(\bar{x} + \Delta x(t); \bar{u} + \Delta u(t)) \quad (11)$$

de donde puede obtenerse un MMI desarrollando en serie de Taylor alrededor del punto de operación $\bar{x}, \bar{u}, \bar{y}$ (las funciones f y g deben ser continuamente diferenciables para que admitan un desarrollo en serie de Taylor)

Considerando la i -ésima fila de las ecua. (10) y (11) se obtienen las ecuaciones escalares:

$$(12) \quad \dot{\bar{x}}_i + \Delta \dot{x}_i(t) = f_i(\bar{x}_1 + \Delta x_1(t); \dots; \bar{x}_n + \Delta x_n(t); \bar{u}_1 + \Delta u_1(t); \dots; \bar{u}_m + \Delta u_m(t))$$

$$(13) \quad \bar{y}_i + \Delta y_i(t) = g_i(\bar{x}_1 + \Delta x_1(t); \dots; \bar{x}_n + \Delta x_n(t); \bar{u}_1 + \Delta u_1(t); \dots; \bar{u}_m + \Delta u_m(t))$$

Haciendo un desarrollo de Taylor de (12) alrededor del punto de operación $\bar{x}, \bar{u}$, se obtiene

$$\dot{\bar{x}}_i + \Delta \dot{x}_i(t) = f_i(\bar{x}, \bar{u}) + \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} \cdot \Delta x_j(t) + \sum_{k=1}^m \left. \frac{\partial f_i}{\partial u_k} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} \cdot \Delta u_k(t) +$$

$$+ \frac{1}{2!} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \left. \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial u_k} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} \cdot \Delta x_j(t) \cdot \Delta u_k(t) +$$

$$+ \frac{1}{2!} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left. \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} \cdot \Delta x_j(t) \cdot \Delta x_k(t) +$$

$$+ \frac{1}{2!} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \left. \frac{\partial^2 f_i}{\partial u_k \partial u_l} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} \cdot \Delta u_k(t) \cdot \Delta u_l(t) +$$

Considerando que en RPE es $\dot{\bar{x}}_i = f_i(\bar{x}, \bar{u}) = 0$, resulta:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x}_i(t) = & \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} \cdot \Delta x_j(t) + \sum_{k=1}^m \left. \frac{\partial f_i}{\partial u_k} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} \cdot \Delta u_k(t) + \\ & + \frac{1}{2!} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \left. \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial u_k} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} \Delta x_j(t) \cdot \Delta u_k(t) + \\ & + \frac{1}{2!} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left. \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} \Delta x_j(t) \cdot \Delta x_k(t) + \\ & + \frac{1}{2!} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \left. \frac{\partial^2 f_i}{\partial u_j \partial u_k} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} \Delta u_j(t) \cdot \Delta u_k(t) + \dots \end{aligned}$$

que puede escribirse

$$\Delta \dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} \cdot \Delta x_j(t) + \sum_{k=1}^m \left. \frac{\partial f_i}{\partial u_k} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} \cdot \Delta u_k(t) + \tilde{f}_i^{\sim}(\Delta x(t); \Delta u(t)) \quad (14)$$

En forma matricial

$$\Delta \dot{x}(t) = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} \cdot \Delta x(t) + \left. \frac{\partial F}{\partial u} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} \cdot \Delta u(t) + \tilde{F}(\Delta x(t), \Delta u(t)) \quad (15)$$

donde

$$\Delta x(t) = [\Delta x_1(t), \Delta x_2(t), \dots, \Delta x_n(t)]^T$$

$$\Delta u(t) = [\Delta u_1(t), \Delta u_2(t), \dots, \Delta u_m(t)]^T$$

$$\tilde{F}(\Delta x(t), \Delta u(t)) = [\tilde{f}_1^{\sim}(\Delta x(t), \Delta u(t)); \dots, \tilde{f}_n^{\sim}(\Delta x(t), \Delta u(t))]^T$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} & \dots & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} \\ \vdots & & \vdots \\ \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} & \dots & \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} \end{bmatrix}$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial u_1} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} & \dots & \left. \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} \\ \vdots & & \vdots \\ \left. \frac{\partial f_n}{\partial u_1} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} & \dots & \left. \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} \end{bmatrix}$$

Llamamos con:

$$A := \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} \quad B := \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\bar{x}, \bar{u}}$$

La ecuación (15) resulta entonces:

$$\Delta \dot{x}(t) = A \cdot \Delta x(t) + B \cdot \Delta u(t) + \tilde{f}(\Delta x(t), \Delta u(t)) \quad (16)$$

Procediendo en forma análoga con la ecuación (13), se llega a:

$$\Delta y(t) = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} \cdot \Delta x(t) + \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} \cdot \Delta u(t) + \tilde{g}(\Delta x(t), \Delta u(t)) \quad (17)$$

$$\left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial g_1}{\partial x_1} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} & \dots & \left. \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} \\ \vdots & & \vdots \\ \left. \frac{\partial g_p}{\partial x_1} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} & \dots & \left. \frac{\partial g_p}{\partial x_n} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} \end{bmatrix}$$

$$\left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial g_1}{\partial u_1} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} & \dots & \left. \frac{\partial g_1}{\partial u_m} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} \\ \vdots & & \vdots \\ \left. \frac{\partial g_p}{\partial u_1} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} & \dots & \left. \frac{\partial g_p}{\partial u_m} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} \end{bmatrix}$$

Llamando con

$$C := \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{u}}$$

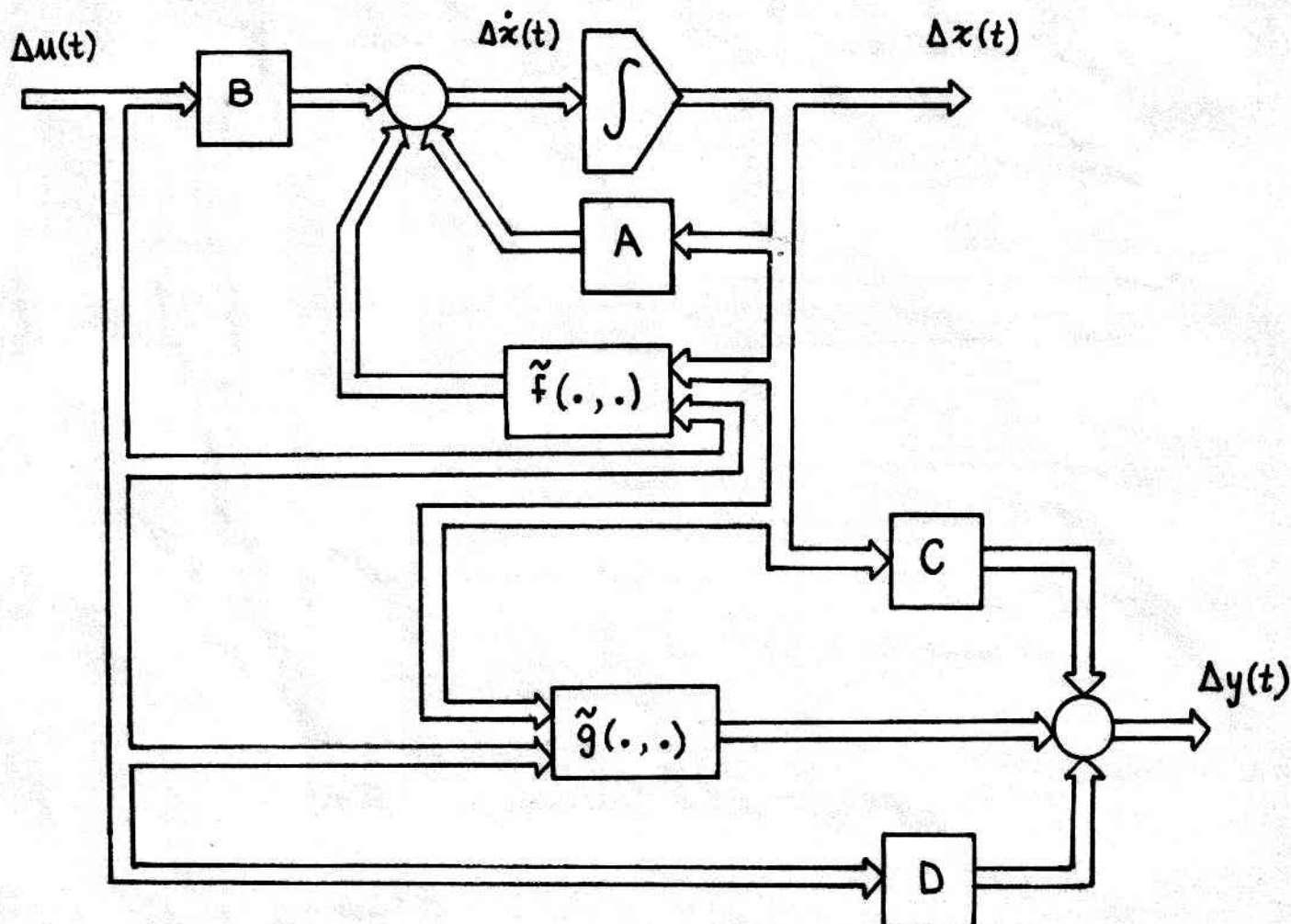
$$D := \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{\bar{x}, \bar{u}}$$

la ecuación (17) resulta

$$\Delta y(t) = C \cdot \Delta x(t) + D \cdot \Delta u(t) + \tilde{g}(\Delta x(t), \Delta u(t)) \quad (18)$$

(16) y (18) constituyen un MMI exacto del sistema (10) y (11). Este MMI exacto es no lineal. Las no linealidades aparecen en $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$

Asociado a (16) y (18) puede construirse el siguiente



Fig(6) DBI exacto

Considerando que $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ están compuestas por términos de orden superior en $\Delta x(t)$ y $\Delta u(t)$, entonces si se verifica

$$\|\Delta x(t)\| \times \|\Delta u(t)\| \quad t \geq t_0 \quad (19)$$

$$\text{muy pequeños} \quad t \geq t_0 \quad (20)$$

pueden aproximarse por:

$$\tilde{f}(\Delta x(t), \Delta u(t)) \approx 0$$

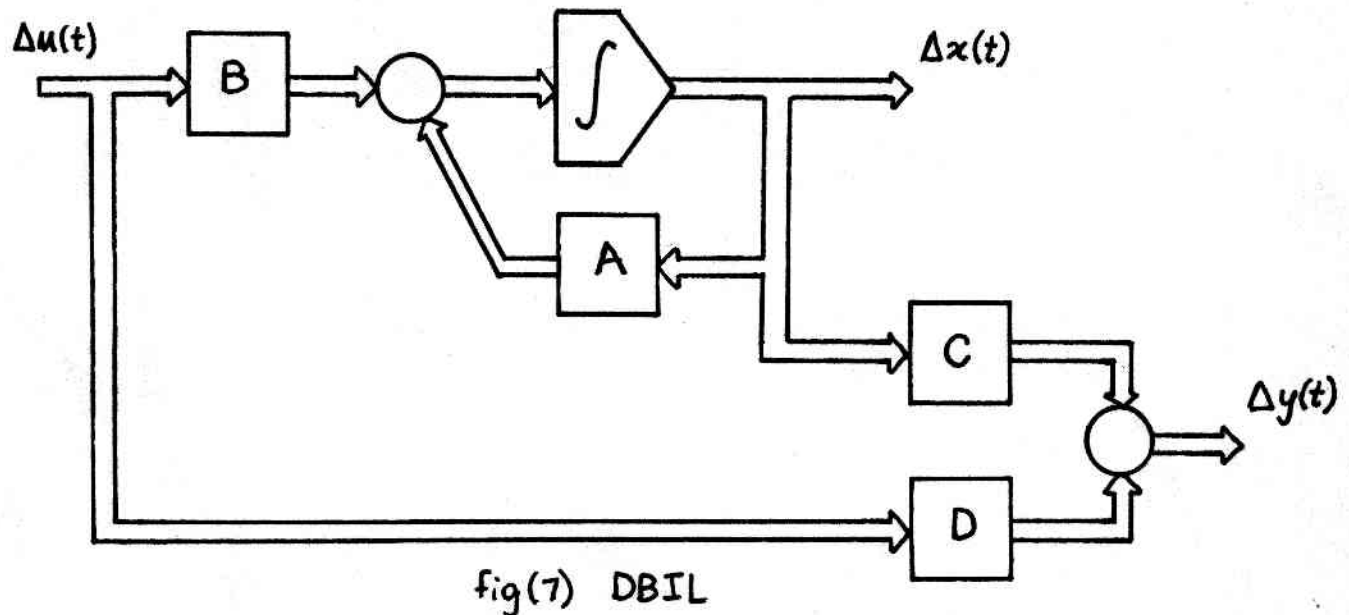
$$\tilde{g}(\Delta x(t), \Delta u(t)) \approx 0$$

resultando (16) y (18)

$$\Delta \dot{x}(t) = A \cdot \Delta x(t) + B \cdot \Delta u(t) \quad (21)$$

$$\Delta y(t) = C \cdot \Delta x(t) + D \cdot \Delta u(t) \quad (22)$$

que constituyen el MMILineal buscado y al cual puede asociarse el siguiente DBIL :



3.2 Linealización Inestacionaria

Supongamos ahora que el MM (1)+(2) se encuentra en un RPV caracterizado por la trayectoria de operación: $x^*(t)$, $u^*(t)$, $y^*(t)$; y que debido a una perturbación de la entrada, el sistema se aleja de esa trayectoria de operación, obteniéndose se :

$$u(t) = u^*(t) + \Delta u(t)$$

$$x(t) = x^*(t) + \Delta x(t) \quad (6')$$

$$y(t) = y^*(t) + \Delta y(t)$$

Llevando (6') a (1) y (2) resulta

$$\frac{d}{dt} (x^*(t) + \Delta x(t)) = f(x^*(t) + \Delta x(t), u^*(t) + \Delta u(t)) \quad (23)$$

Procediendo análogamente a como se hizo en la linealización estacionaria, se arriba al siguiente MMI

$$\Delta \dot{x}(t) = A(t) \cdot \Delta x(t) + B(t) \cdot \Delta u(t) + \tilde{f}(\Delta x(t), \Delta u(t), t) \quad (25)$$

$$\Delta y(t) = C(t) \cdot \Delta x(t) + D(t) \cdot \Delta u(t) + \tilde{g}(\Delta x(t), \Delta u(t), t) \quad (26)$$

que es *inestacionario* ya que las matrices A, B, C y D son ahora función del tiempo, y están definidas como:

$$A(t) := \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x^*(t), u^*(t)}$$

$$B(t) := \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x^*(t), u^*(t)}$$

$$C(t) := \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{x^*(t), u^*(t)}$$

$$D(t) := \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{x^*(t), u^*(t)}$$

Asociado al MMI (25)+(26) puede construirse un DBI exacto análogo al de fig (6).

Si se verifican las hipótesis (19) y (20), puede obtenerse un MMIL:

$$\Delta \dot{x}(t) = A(t) \cdot \Delta x(t) + B(t) \cdot \Delta u(t) \quad (27)$$

$$\Delta y(t) = C(t) \cdot \Delta x(t) + D(t) \cdot \Delta u(t) \quad (28)$$

válido para pequeñas variaciones alrededor de la trayectoria de operación $x^*(t), u^*(t), y^*(t)$

Al MMIL (27)(28) puede asociarse un DBIL análogo al de fig (7)

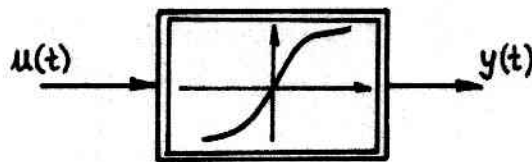
3.3 Linealización sobre el DB

La linealización puede efectuarse a partir del DB del sistema, en vez de a partir de las EE.

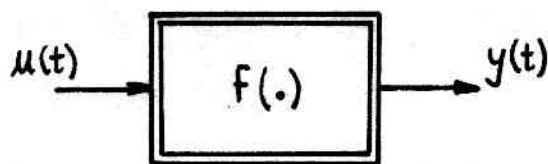
Se linealizan los bloques elementales correspondientes a Relac's no lineales, alrededor del punto de trabajo (trayectoria de operación) de dicho bloque que surge del punto de trabajo (trayectoria de operación) del sistema.

El procedimiento puede ser gráfico o analítico, dependiendo de como esté dada la Relac del bloque no-lineal.

Si la Relac viene dada en forma gráfica:

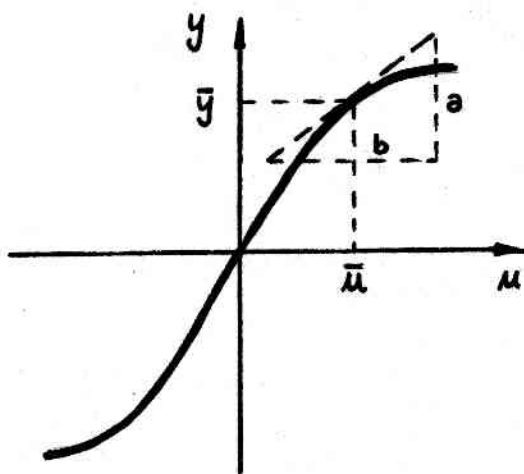


se realiza una Linealización Gráfica, en cambio si viene dada en forma analítica:



se realiza una linealización analítica.

3.3.1 Linealización Gráfica



Considerando que la Relac del bloque no lineal es:

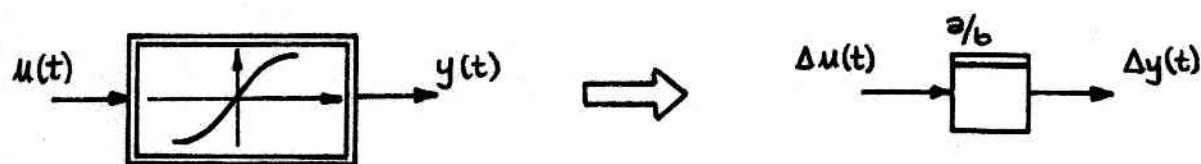
$$y = g(u)$$

entonces un MMIL resulta:

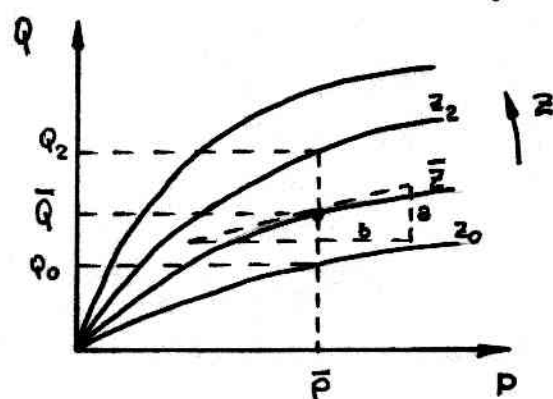
$$\Delta y = \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{\bar{y}, \bar{u}} \cdot \Delta u$$

$$\left. \frac{\partial q}{\partial u} \right|_{\bar{y}, \bar{u}} \approx \frac{a}{b} = \text{pendiente de la recta tangente a la curva en el punto de operación}$$

y el DBIL asociado al bloque no lineal es:



Considerando un bloque no lineal con más de una entrada, cuya Relac es; por ejemplo:



$$Q = h(P, z)$$

el MMIL resulta:

$$\Delta Q = \left. \frac{\partial h}{\partial P} \right|_{\bar{Q}, \bar{P}, \bar{z}} \cdot \Delta P + \left. \frac{\partial h}{\partial z} \right|_{\bar{Q}, \bar{P}, \bar{z}} \cdot \Delta z$$

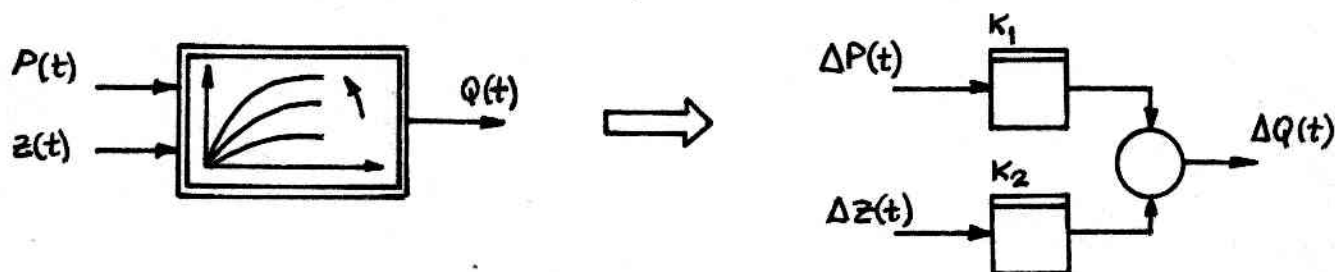
Como no conocemos la expresión

analítica de $h(\cdot, \cdot)$, aproximamos

$$\left. \frac{\partial h}{\partial P} \right|_{\bar{Q}, \bar{P}, \bar{z}} \approx \frac{a}{b} = k_1$$

$$\left. \frac{\partial h}{\partial z} \right|_{\bar{Q}, \bar{P}, \bar{z}} \approx \frac{Q_2 - Q_0}{z_2 - z_0} = k_2$$

y el DBIL asociado al bloque no lineal es:



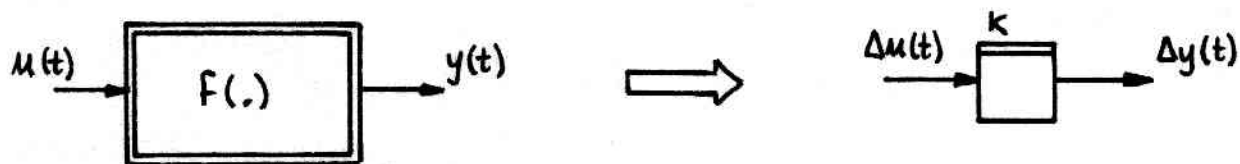
3.3.2 Linealización Analítica

$$y = f(u)$$

el MMIL es:

$$\Delta y(t) = \left. \frac{df}{du} \right|_{\bar{u}, \bar{y}} \cdot \Delta u(t) = k \cdot \Delta u(t)$$

y el DBIL asociado es:



Para el caso de un bloque no lineal multientrada, cuya Relac viene dada por:

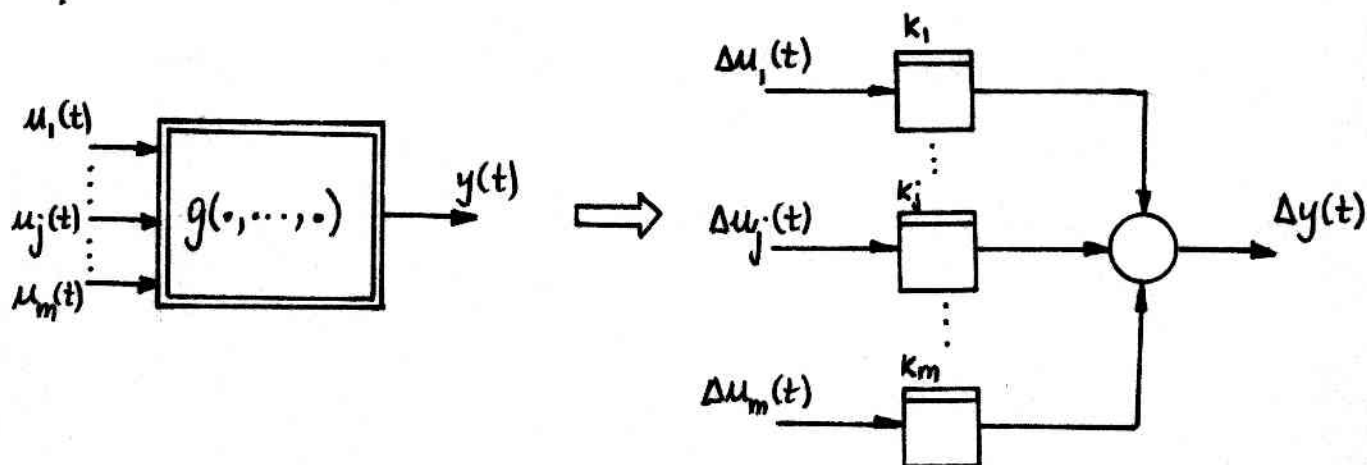
$$y(t) = g(u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))$$

el MMIL es

$$\Delta y(t) = \left. \frac{\partial g}{\partial u_1} \right|_{\bar{u}, \bar{y}} \cdot \Delta u_1(t) + \dots + \left. \frac{\partial g}{\partial u_m} \right|_{\bar{u}, \bar{y}} \cdot \Delta u_m(t) =$$

$$\Delta y(t) = \sum_{j=1}^m \underbrace{\left. \frac{\partial g}{\partial u_j} \right|_{\bar{u}, \bar{y}}}_{k_j} \cdot \Delta u_j(t) = \sum_{j=1}^m k_j \cdot \Delta u_j(t)$$

y el DBIL asociado es:



3.4 Linealización sobre la EDO

La linealización puede realizarse también a partir de la EDO del sistema, linealizando los términos de la EDO que sean no lineales, alrededor del punto de trabajo o trayectoria de operación.

A modo de ejemplo, y para ilustrar el procedimiento, supongamos que el MM del sistema es la siguiente EDO:

$$\ddot{x}(t) + \frac{b}{m} \cdot \dot{x}(t)^2 + \frac{k}{m} x(t) = F(t) \cdot \frac{1}{m}$$

Para un $F(t) = \bar{F}$, el sistema alcanza un RPE caracterizado por

$$x(t) = \bar{x}$$

$$\dot{x}(t) = 0$$

$$\ddot{x}(t) = 0$$

Debemos linealizar el 2do término de la EDO, que es el término no lineal:

$$d\left[\frac{b}{m} \cdot \dot{x}(t)^2\right] = \left.\frac{2b}{m} \dot{x}(t)\right|_{\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \ddot{\bar{x}}} \Delta \dot{x}(t) = k_1 \Delta \dot{x}(t)$$

y la EDO linealizada resulta:

$$\Delta \ddot{x}(t) + k_1 \Delta \dot{x}(t) + \frac{k}{m} \Delta x(t) = \frac{\Delta F(t)}{m}$$

4. Determinación del Punto de Operación

Un paso previo al procedimiento de LE explicado, es la determinación del Punto de Operación correspondiente al RPE establecido en el sistema.

Si el sistema es estable, se aplica el siguiente procedimiento:

una vez extinguido el transitorio, un valor constante de RP :

$$x(t) = \bar{x}$$

al igual que el vector de salida

$$y(t) = \bar{y}$$

Además, resulta

$$\dot{x}(t) = 0$$

por lo que, en RPE, las ecuaciones (1), (2) resultan

$$0 = F(\bar{x}, \bar{u}) \quad (29)$$

$$\bar{y} = g(\bar{x}, \bar{u}) \quad (30)$$

que son ecuaciones algebraicas en $\bar{x}, \bar{u}, \bar{y}$.

Resolviendo (29) y (30) suponiendo conocido $\bar{u}$ se obtienen los valores que caracterizan el punto de operación $\bar{x}, \bar{y}$.

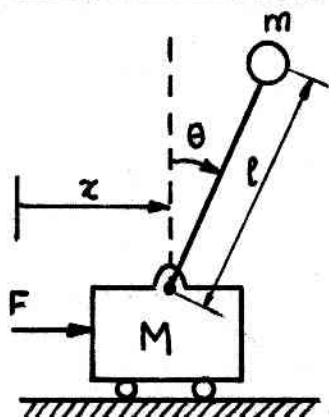
El procedimiento descrito se basa en el MM con EE y ES.

Puede obtenerse el punto de operación a partir de otros MM, como ser el DB o la EDO

Ilustraremos el procedimiento de obtención del punto de operación mediante ejemplos.

4.1 Ejemplo de determinación del PO a partir de los EE

Péndulo Invertido



Las EE son:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = \frac{F + m l \omega^2 \sin \theta - m g \sin \theta \cos \theta}{M + m - m \cos^2 \theta} \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases}$$

$$F + m l \omega^2 \sin \theta - (M + m) a \cos \theta$$

Suponiendo $\bar{F}=0$, en RPE es:

$$\dot{\bar{x}} = \dot{\bar{v}} = \dot{\bar{\theta}} = \dot{\bar{\omega}} = 0$$

luego

$$\bar{v} = 0$$

$$\bar{\omega} = 0$$

$$0 = m l \bar{\omega}^2 \sin \bar{\theta} - m g \sin \bar{\theta} \cos \bar{\theta} \quad (31)$$

$$0 = m l \bar{\omega}^2 \sin \bar{\theta} - (M+m) g \tan \bar{\theta} \quad (32)$$

restando m.a.m (31)-(32), resulta

$$0 = -m g \sin \bar{\theta} \cos \bar{\theta} + (M+m) g \tan \bar{\theta}$$

de donde resulta $\bar{\theta} = 0$

Además $\bar{x} = x_0$

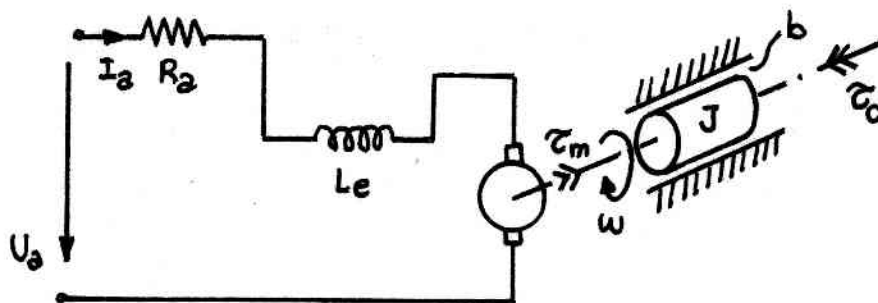
Luego, el PO está definido por

$$\bar{v} = 0, \bar{\omega} = 0, \bar{\theta} = 0, \bar{x} = x_0$$

para $\bar{F} = 0$

4.2 Ejemplo de determinación del PO a partir del DB

MCC con excitación serie

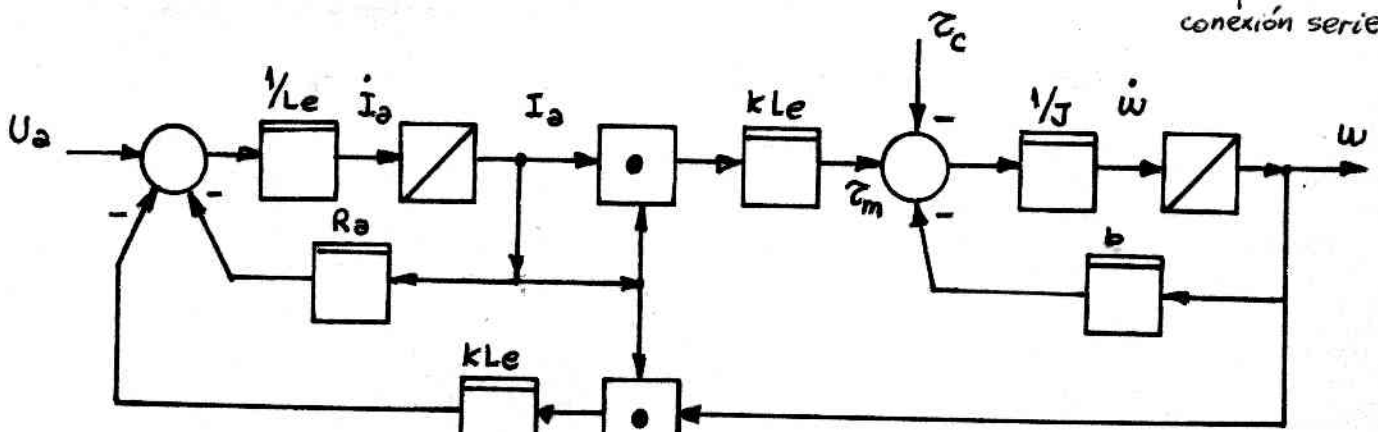


Obs.:

Se hace la hipótesis de que la curva de magnetización de la excitación es lineal (el motor no trabaja en zona de saturación) $\Rightarrow$

$$\psi_e = L_e I_e = L_e I_a$$

↑
conexión serie



En RPE correspondiente a las entradas constantes

$$U_a(t) = \bar{U}_a$$

$$\tau_c(t) = \bar{\tau}_c$$

resulta $\omega = cte$

$$I_a = cte$$

y por lo tanto $\dot{\omega} = \dot{I}_a = 0$

Leyendo del DB a partir de I_a y $\dot{\omega}$ se obtiene

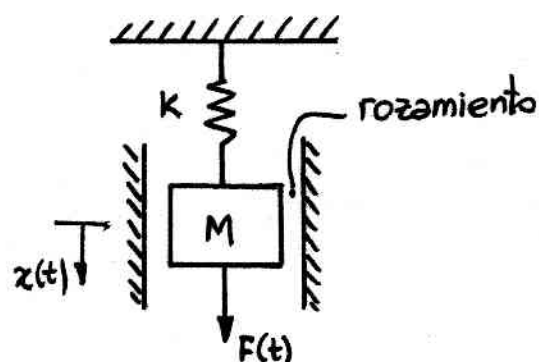
$$0 = \bar{U}_a - R_a \bar{I}_a - k_{Le} \bar{I}_a \bar{\omega}$$

$$0 = k_{Le} \bar{I}_a^2 - \bar{\tau}_c - b \bar{\omega}$$

que es un sistema en las dos incógnitas $\bar{I}_a$ y $\bar{\omega}$ que permite calcularlas.

En gral, el PO puede obtenerse del DB, planteando entradas a los integradores (y salida de los derivadores, en caso que los hubiera) nulas, y leyendo del DB las ecuaciones que permiten determinarlo

4.3 Ejemplo de determinación del PO a partir de la EDO



La EDO es:

$$m \ddot{x}(t) + b \dot{x}(t)^2 + Kx(t) = mg + F(t)$$

Suponiendo $F(t) = \bar{F} = cte$, el sistema alcanza un RPE y por lo tanto $\ddot{x}(t) = \dot{x}(t) = 0$

de donde $K \bar{x} = mg + \bar{F}$

y el PO está definido entonces por

En gral, el PO puede obtenerse de la EDO, planteando que en RPE todas las derivadas son nulas.