

6. SUPERFICIES DE SIMPLE CURVATURA

6-1. Clasificación de las superficies

Las superficies regulares se pueden considerar divididas en dos clases principales, con las subdivisiones siguientes:

1. SUPERFICIES REGLADAS.
 - a. *Poliedros.*
 - b. *Superficies de simple curvatura.*
 - c. *Superficies alabeadas.*
2. SUPERFICIES DE DOBLE CURVATURA.
 - a. *Superficies de revolución.*
 - b. *Superficies de evolución.*

Las superficies regladas se engendran por el movimiento de una línea recta, y las de doble curvatura por el de una línea curva. Ya vimos que el movimiento de un punto engendraba una línea, recta o curva; pues del mismo modo el movimiento de una línea, recta o curva, engendra las cinco superficies que hemos enumerado. Las líneas limitan las superficies, y éstas a los cuerpos; pero, sin embargo, podemos considerar a la superficie en sí misma, como algo sustantivo, que aunque tenga espesor sea desatendible por su pequeñez, y así en forma convencional, y para fines prácticos, consideramos superficies a tuberías, conductos, tolvas, y a muchos objetos acanalados o ranurados.

Recalcamos que las *superficies regladas* son engendradas por una línea recta móvil.

Los *poliedros* tienen su superficie completa compuesta de superficies planas (véanse arts. 4-28 al 4-31).

Las *superficies de simple curvatura*, son las engendradas por el movimiento de una línea recta desplazándose por una línea curva directriz, sin perder su contacto, para que en cada dos posiciones consecutivas de esa generatriz se

conservar bien paralela a sí misma o cortándose. Los únicos ejemplos de estas clases de superficies son las superficies cónicas, cilíndricas y las convolutas.

Las superficies alabeadas son las engendradas, también, por el movimiento de una línea recta, desplazándose sobre dos o tres líneas directrices, con la condición de que dos posiciones consecutivas de la línea generatriz tengan que cruzarse; lo que distingue a estas superficies no desarrollables de las de simple curvatura o desarrollables, en las que dos posiciones seguidas de la generatriz o se cortan o son paralelas.

Las superficies de doble curvatura son las engendradas por el movimiento de líneas curvas.

Las superficies de revolución se pueden considerar engendradas, esencialmente, por el movimiento de una línea, recta o curva, que gire alrededor de un eje. Con este especial concepto están incluidas, como de revolución, las superficies de simple curvatura, alabeadas y de doble curvatura.

Las superficies de evolución, solamente pueden ser engendradas por el movimiento de una línea curva, con inclinación constante o variable, siguiendo una trayectoria curva que no sea circular, con cambios de trayectoria o de generatriz.

En los trabajos de ingeniería, las superficies de simple curvatura que tienen más aplicación son la cilíndrica y la cónica, y por ello les dedicaremos mayor atención. Veremos que los métodos resolutivos que se empleen para el cilindro, serán extensivos para el prisma; y los que sirvan para el cono se aplicarán a la pirámide, al considerar a ésta como una variante del cono. Y hasta, con un poco de imaginación, podemos considerar al cilindro como si fuera un cono cuyo vértice se hubiera ido al infinito; por lo que las soluciones de muchos problemas empleadas para el cono, con ligeras modificaciones, se aplicarán también al cilindro.

6.2. Líneas de curvatura

Una línea de curvatura es la trayectoria que sigue un punto que se mueve cambiando constantemente de dirección. Si este punto móvil no sale de un plano, la línea será una *línea curva plana*, o *línea de simple curvatura*; en caso contrario, que la trayectoria no esté en un solo plano, será una *línea curva del espacio*, o *línea de doble curvatura*.

Hay infinitas curvas planas, pero solamente se consideran el número reducido que se emplean en las tareas de Ingeniería. De primordial importancia son las secciones cónicas, en las que están incluidas el círculo, elipse, parábola e hipérbola. En el Apéndice figuran las propiedades y métodos de construcción de las secciones cónicas. Estas curvas serán tratadas más ampliamente en el artículo 6-8.

Otras curvas planas de importancia práctica son las *Ruletas*, que comprenden el *Cicloide*, *Epicloide*, y el *Hipocicloide* (que se emplean para los perfiles dentados de engranajes cicloidales); Las *Espirales*, entre las cuales la *Involuta* es la más corriente (que se emplea para los perfiles dentados de engranajes que tienen esa forma); y las *Curvas Trigonométricas*, especialmente la *Sinu-soide*, para los estudios referentes a movimientos periódicos.

Las líneas de doble curvatura tienen también una variedad infinita, pero la *hélice*, en sus variadas formas, es con mucho la más corriente (véase artículo 6-27). La intersección de dos superficies de curvatura suele ser una línea de doble curvatura.

6.3. Superficies de simple curvatura

Como dijimos se engendran por el movimiento de una línea recta, llamada *generatriz*, que se desplaza dirigida sobre una *curva directriz*, de tal modo que dos posiciones consecutivas de la generatriz estén en un plano; es decir que las líneas consecutivas han de cortarse o ser paralelas, pero no cruzarse, para que la superficie que obtengamos sea de simple curvatura o desarrollable y no sea alabeada. Comprenderán, pues, solamente las superficies correspondientes al cono, cilindro, y a la convoluta.

CONOS. El cono está engendrado por una línea recta que se desplaza sobre una línea curva y que pasa siempre por un punto fijo llamado *vértice*, que no esté en el mismo plano que la curva. En la figura 6-1(a), la directriz es la línea curva *AB*; el punto fijo *V* es el vértice; la línea *XY* es la generatriz, que al desplazarse siguiendo la línea *AB* engendra la superficie cónica, llamándose *elemento* de esta superficie a cada posición que tome esa generatriz, la que teniendo que pasar siempre por *V*, se considera indefinida en ambos sentidos formando dos hojas o ramas de superficie cónica con su movimiento, y así el segmento *VX* engendra la hoja *inferior* mientras el *VY* engendra la hoja *superior*. Cuando los elementos de un cono están limitados por un plano, horizontal como el indicado en la figura o bien oblicuo, la curva que resulta de la intersección se llama *base* del cono.

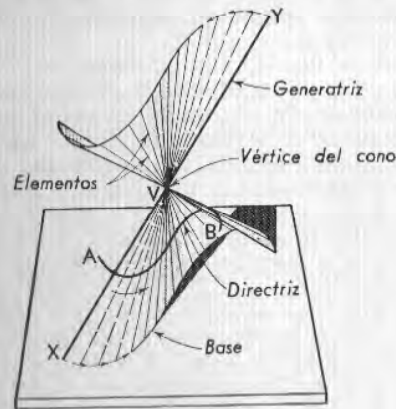
CILINDROS. Un cilindro es engendrado por el movimiento de una línea recta que se desplaza sobre una línea curva plana, permaneciendo siempre en todas sus posiciones *paralela a su posición inicial*. En la figura 6-1(b), la directriz es la línea curva plana *AB*; la línea recta *XY* es la generatriz, que al desplazarse por *AB* paralela a su posición inicial engendra la superficie cilíndrica, mostrándose en la figura esas posiciones diversas o *elementos* de la superficie. Aunque la superficie es indefinida se considera limitada por dos planos paralelos horizontales o bien oblicuos, que al cortar a esta superficie originan las curvas que se llaman *bases* del cilindro.

La directriz del cono o del cilindro dijimos que era una línea curva plana, que es lo corriente, pero también puede ser una línea de doble curvatura. Esta directriz puede tener la forma irregular que vemos en la figura 6-1, pero lo más común es que tenga una forma regular y cerrada, soliendo ser una circunferencia o una elipse. A continuación en los artículos que veamos se tratará de los conos y cilindros que corrientemente aparecen en la práctica, sin perder su carácter cuando esas figuras tengan otro aspecto menos familiar.

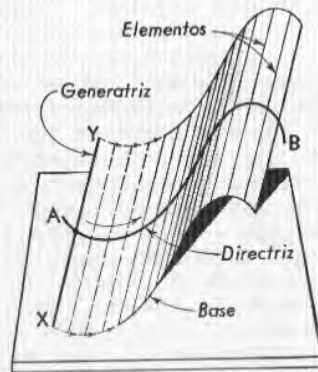
CONVOLUTAS: GENERACIÓN POR LÍNEA TANGENTE.—Una convoluta puede ser engendrada por una línea recta que se mueva de tal modo que sea siempre *tangente a una línea de doble curvatura*. En la figura 6-1(c) la directriz es la línea de doble curvatura *AB*, y la línea *XY* es la generatriz que se traslada por *AB*, siempre tangente a ella en los sucesivos puntos *X*, engendrando la convoluta, siendo los elementos de su superficie las distintas posiciones que va tomando *XY*. La longitud de *XY* puede ser fija o variable, y se puede extender a ambos lados del punto de tangencia formándose dos hojas de convoluta, siendo de una hoja la que se indica en la figura 6-1(c).

Aunque la convoluta pudiera aparecer como una superficie alabeada es realmente una superficie de simple curvatura, ya que dos posiciones consecutivas de la generatriz se pueden considerar tan cerca como sea preciso para que se corten, y la tercera posición adyacente cortará a una de las dos, como vemos en el dibujo de detalle de la izquierda de la figura 6-1(c), en los puntos de encuentro *M* y *N*.

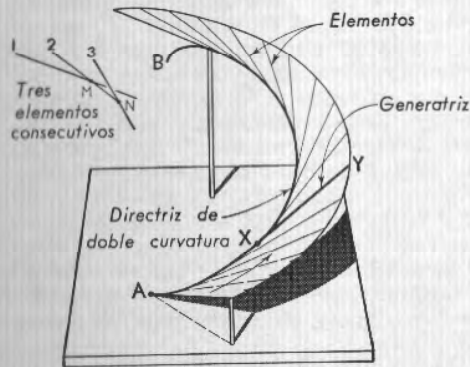
CONVOLUTAS: GENERACIÓN POR PLANO TANGENTE. Una convoluta se puede considerar también engendrada de otro modo de considerable valor práctico. Si colocamos un plano de tal modo que sea tangente a la vez a dos líneas curvas, que no estén en el mismo plano, la línea recta que une los puntos de tangencia similares de las dos curvas será un elemento de la superficie de la convoluta que une las dos curvas. En la figura 6-1(d) las *directrices* son las dos curvas semejantes AB y CD ; se coloca al plano tangente de tal modo que sea tangente a la curva AB en un punto X y a la curva CD en un punto Y , siendo XY un elemento de la superficie. El plano tangente lo será a la superficie de la convo-



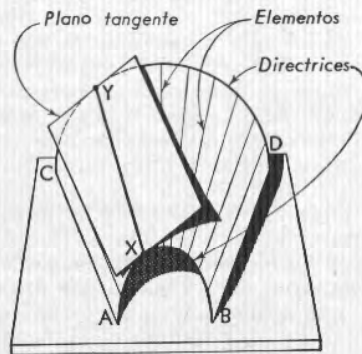
(a) Generación de un cono



(b) Generación de un cilindro



(c) Generación de una convoluta por línea tangente



(d) Generación de una convoluta por plano tangente

Fig. 6-1. Generación de las superficies de simple curvatura.

luta a lo largo de cada elemento XY , siendo por tanto una superficie reglada de simple curvatura la que se obtiene, *envolvente* de las sucesivas posiciones que va tomando el elemento XY del plano tangente. Las directrices AB y CD pueden ser líneas curvas planas o líneas curvas del espacio. Si los elementos consecutivos fueran paralelos, la superficie sería *cilíndrica*; si los elementos pasaran todos por un punto fijo, la superficie sería *cónica*. Luego la superficie engendrada, podrá ser cilíndrica, cónica, convoluta, o una combinación de los tres. Las superficies convolutas pueden ser infinitamente variadas, pero los tipos más importantes serán tratados con todo detalle en los próximos artículos de este capítulo.

6-4. Representación de conos

Los conos se representan en las proyecciones múltiples por la *base curva*, el *vértice*, y los *elementos extremos*. La base curva suele tener forma regular, que con su centro y el eje que lo unia al vértice suelen ser los elementos que se indican en estas proyecciones. Y aunque en la superficie cónica existen una infinidad de elementos sólo se representan los dos que definen el contorno o *elementos extremos*, que son los *últimos visibles* a cada lado del cono.

La figura 6-2, muestra un cono circular recto con su eje vertical, también llamado *cono de revolución*, al suponerlo engendrado por el movimiento de la generatriz, siguiendo la base o directriz girando alrededor del eje. En la proyección horizontal figura el vértice y el eje proyectado en v_T , y los elementos que en ella se indican figuran como radios de la circunferencia de la base; y por ello no existen en esta proyección elementos extremos. En la proyección vertical los elementos extremos son los $v_F a_F$, $v_F b_F$ los que aparecen formando un diámetro en la proyección horizontal, e indican que la mitad de la superficie del cono es visible en esa proyección vertical.

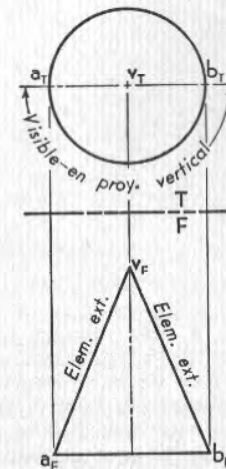


Fig. 6-2. Cono circular recto.

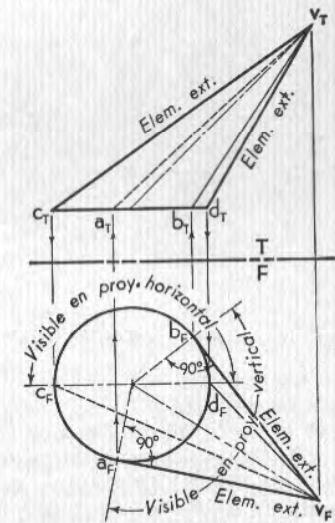


Fig. 6-3. Cono circular oblicuo.

NOTA DE LA CÁTEDRA:

Al leer las proyecciones, tener en cuenta que el autor trabaja en sistema ISO (A), es decir, Sistema Americano. T-F representa una línea de tierra o referencia que separa las proyecciones vertical (F) de la horizontal (T). Las nomenclaturas deben entenderse de la siguiente manera, por ejemplo para el vértice V ($VT = V'$) y ($VF = V''$) Elementos extremos (Elem. ext.) deben entenderse a las generatrices de Contorno Aparente.

La figura 6-3 muestra un cono circular oblicuo, de base circular, pero como las secciones rectas son elipses algunos autores le llaman cono elíptico, aunque no muy apropiado ya que la designación de los nombres va más de acuerdo con la forma de las bases que con la forma de las secciones. En la proyección horizontal las generatrices v_Fc_T y v_Td_F son elementos extremos, y cualquier elemento que se encuentre en la mitad superior del cono es visible en esa proyección horizontal; como le pasa al elemento VB , estando oculto el elemento VA , por estar en la mitad inferior del cono. Esos elementos extremos aparecen en la proyección vertical en v_Fc_F y v_Fd_F , el primero oculto y el segundo visible, en esta proyección vertical al considerar la base en primer término y luego el vértice v_F . Y es que en realidad cambian los elementos extremos de una a otra proyección. En la vertical son ahora sus elementos extremos los v_Fa_F y v_Fb_F , que son las tangentes a la base del círculo desde v_F , y las perpendiculares desde el centro del círculo a estas tangentes determinarán exactamente los puntos de tangencia a_F y b_F , siendo visibles menos de la mitad de los elementos del cono, en esta proyección vertical. Debe notarse que basta que unos elementos sean extremos en una proyección para que dejen de serlo en la proyección adyacente; y que los elementos extremos en una proyección, y visibles por tanto, uno de ellos deje de serlo en la adyacente.

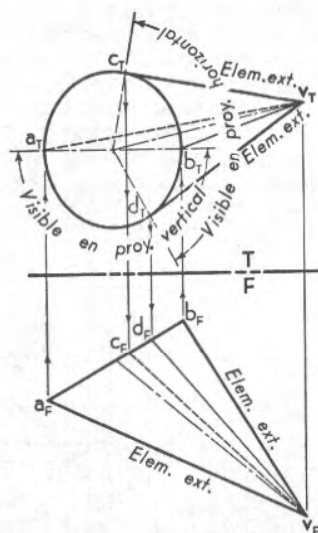


Fig. 6-4. Cono circular oblicuo.

La figura 6-4 muestra un cono circular oblicuo, cuya base aparece de perfil en la proyección vertical y como una elipse en la horizontal; siendo este caso muy parecido al de la figura 6-3. Los elementos extremos de la proyección vertical, VA y VB , se localizan en la proyección horizontal, para comprobarse las dos consecuencias que vimos antes —que los elementos extremos de una proyección no son los de la otra, y que uno de ellos queda invisible— y además para ver que ahora en la proyección vertical la mitad de los elementos son los visibles, mientras que en la proyección horizontal sólo son visibles los elementos

que están en el arco menor $CTdT$, comprendidos entre los elementos extremos, tangentes a la elipse. Y los elementos que son visibles en ambas proyecciones, son los comprendidos en el pequeño arco BD , lo mismo que ocurría en la figura 6.3.

6.5. Proyecciones principales de un cono circular recto con eje inclinado

En la figura 6-2 vimos un cono circular recto en su posición más sencilla, o sea de eje vertical. Consideremos ahora el mismo cono, pero con el eje inclinado, y base inclinada.

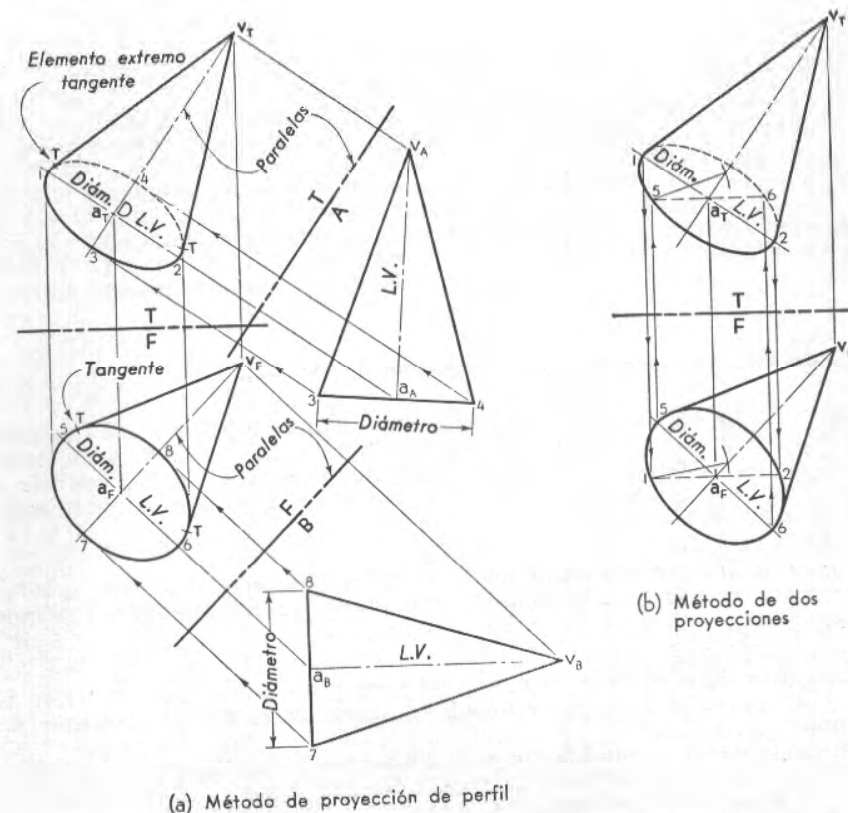


Fig. 6.5. Proyecciones principales de un cono circular recto con eje inclinado.

ANÁLISIS. La base circular del cono aparecerá como una elipse en las dos proyecciones. Como el eje del cono ha de ser perpendicular al plano de la base, el eje mayor de cada elipse ha de aparecer perpendicular al eje del cono en cada proyección (Regla 15). La dirección de los ejes de la elipse son por lo tanto conocidos, y la longitud de cada eje menor se determina por el método de pro-

yección de perfil del artículo 4-17, o por el método de las dos proyecciones del artículo 4-18.

PROBLEMA. En la figura 6-5 se conocen, el eje VA y el diámetro de la base, y se solicita el trazado de las proyecciones horizontal y vertical del cono circular recto.

MÉTODO DE PROYECCIÓN DE PERFIL. En la figura 6-5(a) los diámetros mayores, 1-2 y 5-6, se han trazado perpendiculares al eje del cono, y en su longitud verdadera, como dato del problema, en las dos proyecciones. Se trazan las proyecciones A y B , para encontrar el eje del cono VA en longitud verdadera, pues la dada en las proyecciones iniciales no lo era; apareciendo la base circular de perfil y perpendicular al eje. Los ejes menores de las elipses, que representan la base circular, se obtienen a partir de las proyecciones A y B .

Una vez conocidos los dos ejes se podrán trazar las dos elipses de la base, y desde el punto dado V las tangentes a las mismas, que no coinciden con las rectas que van a los extremos del eje mayor, y así tendremos los elementos extremos y el poder completar las dos proyecciones solicitadas.

La parte oculta del perímetro de la base, de la elipse de la proyección horizontal, se toma a partir de los puntos de tangencia T , siendo un poco menos de la mitad del perímetro de la base.

MÉTODO DE LAS DOS PROYECCIONES. En la figura 6-5(b), los diámetros mayores en su longitud verdadera 1-2 y 5-6, se han trazado perpendiculares al eje del cono en cada proyección. Para encontrar los ejes menores podemos seguir el método establecido en el artículo 4-18 (y también en el Apéndice, A-8). Y luego las elipses y los elementos extremos se pueden trazar según el método anterior.

6-6. Situación de un punto sobre la superficie de un cono

En el artículo 4-5 ya vimos que para resolver este problema era necesario primeramente, cuando se trataba de una superficie plana, situar al punto sobre una línea de ese plano; pues lo mismo habrá que hacer ahora si la superficie es de simple curvatura, alabeada, o de doble curvatura. Por esto se puede establecer, en términos generales:

Un punto puede ser localizado sobre una superficie, solamente por una vez por medio de una línea o elemento que estando en esa superficie contenga a ese punto.

Un elemento lineal recto es la línea más simple que puede encontrarse en la superficie de un cono, y es generalmente la línea preferida para localizar un punto en una superficie.

En la figura 6-6(a) se supone que se da el punto x_F como punto visible, sobre la superficie de un cono circular recto, solicitándose situar al punto x_T . Por v_F se traza la generatriz correspondiente al punto x_F que corta a la base en el punto a_F . Al ser visible el punto x_F también será visible el elemento $v_F a_F$ y el punto a_F también será visible y la proyección horizontal x_T estará en la mitad del círculo de la base visible o sea la más cercana a la línea de referencia $T-F$. Encontrándose el punto x_T en el elemento $v_T a_T$ y, en la paralela desde x_F .

Supongamos de nuevo la figura 6-6(a) en la que ahora nos dan el punto y_T , solicitándose y_F . Como está en un elemento de perfil no puede encontrarse y_F solamente por alineación; pero podemos girar el elemento $v_T b_T$ hasta la posi-

ción extrema del elemento extremo de la proyección vertical, es decir, que y_T pasa a la posición y_T^R y ya por alineación encontramos y_F^R y haciendo una contrarrevolución se encuentra por fin el punto y_F . Si el cono fuera oblicuo, se puede hacer el giro alrededor de un eje vertical, sin emplear la posición del elemento extremo.

En la figura 6-6(b) supongamos al punto x_T sobre la superficie de un cono circular oblicuo y se solicita encontrar el punto x_F . El punto x_T está oculto, así como el elemento $v_T x_T$ con el punto a_T de intersección con la base. Por alineación se halla a_F y el elemento visible $v_F a_F$, que con la paralela desde x_T se encuentra x_F ; sin precisar elementos extremos.

En la figura 6-6(c) la base del cono no aparece de perfil en ninguna de las dos proyecciones, debiendo buscar con sumo cuidado los puntos de la base curva de una proyección con los de la otra proyección adyacente. Se da el punto x_F y hay que hallar x_T . El punto x_F se supone oculto, y por eso el elemento $v_F x_F$ también lo será, no así la intersección a_F con la base. Por a_F se traza la paralela a la proyección horizontal y como es el punto más bajo de esta base, también será el punto más bajo de la base de proyección horizontal, luego se encontrará en a_T , que está en la parte más baja y oculta de esa base. Una vez encontrado a_T se trazará el elemento $v_T a_T$ el que encontrará a la paralela trazada desde x_F en el punto pedido x_T , situado en la parte oculta.

PROBLEMAS. Grupo 59.

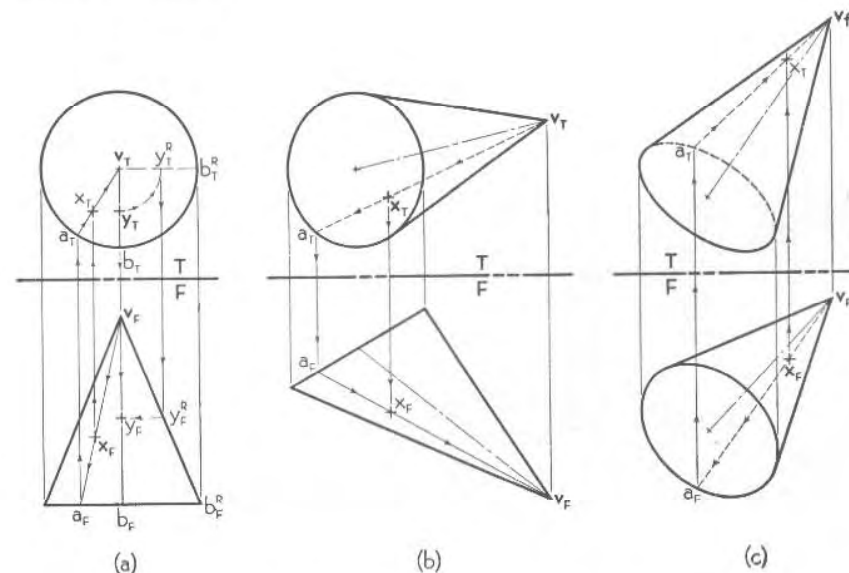


Fig. 6-6. Localización de un punto sobre un cono.

6-7. Intersección de un plano y un cono

ANÁLISIS. La intersección de un plano y un cono, será una línea de simple

curvatura de forma regular o no según sea la curva de la base. Si se suponen un cierto número de elementos sobre el cono, se podrán localizar los puntos de intersección con el plano dado. A través de esta serie de puntos se puede trazar una línea curva continua y suave, que es la sección plana solicitada.

El procedimiento gráfico será el mismo que el empleado para encontrar la intersección de un plano con un poliedro (arts. 4-29 y 4-30). Podemos encontrar el punto de intersección de cada *elemento supuesto* con el plano dado, por uno o dos métodos.

1. *Mostrando el plano de perfil (como se hizo en la fig. 4-35).*
2. *Empleando planos de corte (como se hizo en la fig. 4-36).*

Como es necesario localizar un gran número de puntos, entre los dos métodos es el primero (método de proyección de perfil) el más indicado, aunque requiera una proyección adicional.

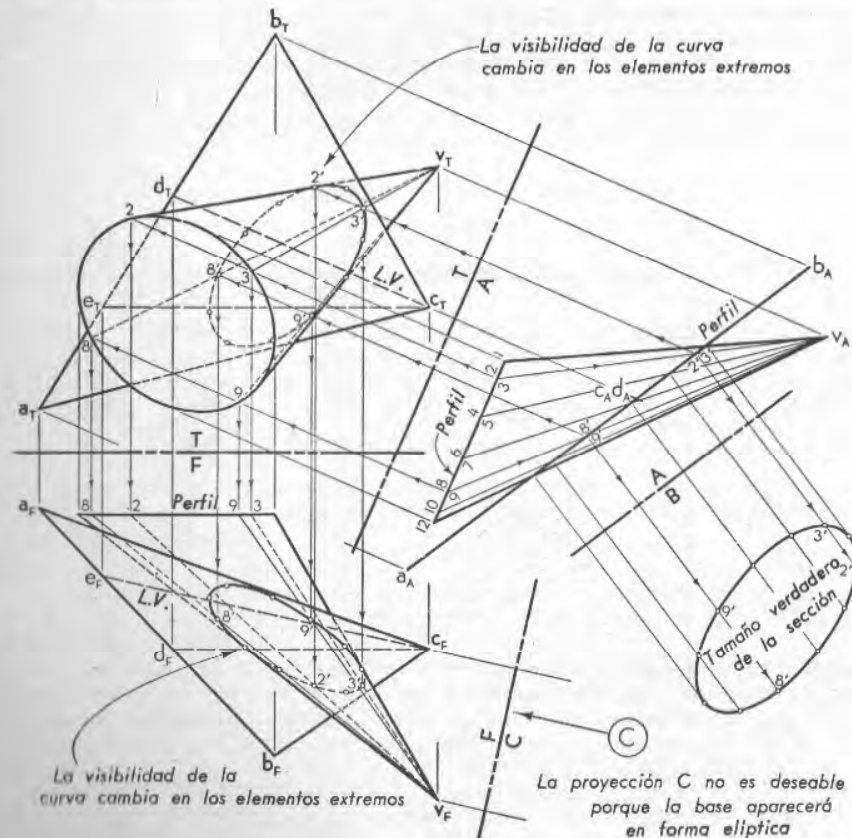


Fig. 6-7. Intersección de un plano con un cono (método de proyección de perfil).

PROBLEMA. En la figura 6-7 se dan como datos las proyecciones horizontal y vertical del plano ABC y de un cono elíptico oblicuo, solicitándose la curva de intersección, de estos dos elementos.

CONSTRUCCIÓN. Se pone el plano de perfil, en las proyecciones A y C , siendo preferible el empleo de la A , en donde el plano de la base figura de perfil encontrándose en su verdadero tamaño, por ser adyacente a la proyección horizontal en vista elevada. En la proyección C se mostraría la curva de la base como una elipse cuyo contorno, deformado, habría que determinar punto a punto; por ello se elige la proyección A . Si la base del cono apareciera inclinada, como en la figura 6-4, aparecería elíptica en las dos proyecciones dichas, horizontal y vertical.

En la proyección A se trazan la base, el vértice, y los elementos extremos del cono, figurando de perfil el plano ABC : tomamos en la base una serie de puntos, 1, 2, 3, etc., que al unirlos con v_A dan una serie de elementos. Nótese que cada punto que hemos tomado representa dos puntos de la base de la curva, y que sobre cada elemento que vemos visible existe otro invisible confundido con él.

Para conseguir una mayor seguridad en el trazado se pueden usar hasta 24 o más elementos, empleándose un mínimo de 12, que representan los seis de la proyección A . Los elementos se acercan más a los extremos para obtener un espaciado semejante de puntos en la curva de intersección.

Los puntos de la base, tales como el 2,3 y el 8,9 pueden ser localizados en las dos proyecciones principales y trazados con visibilidad correcta. Con todos estos elementos numerados podremos encontrar los puntos de sus intersecciones con el plano ABC . Por ejemplo los elementos, 8 y 9, en la proyección A dan los puntos 8 y 9' de intersección con ese plano ABC ; a continuación y por alineaciones trasladamos esos puntos a las dos proyecciones dadas, para luego ir uniendo todos estos puntos en cada proyección y tener las dos curvas solicitadas de intersección, que deberán ser tangentes a los elementos extremos en cada proyección; debiendo prestar especial cuidado a los puntos donde la curva cambia de visibilidad.

Si quisiéramos encontrar la sección plana referida en su verdadero tamaño, bastaría en la proyección A trazar una línea de referencia $A-B$ que fuese paralela a la recta que representa el perfil de la sección plana, pues en la proyección B tiene que figurar en su magnitud verdadera, y los puntos de intersección de esa sección en la proyección A , que habíamos trasladado, por alineaciones y medidas, a las proyecciones dadas, las trasladaríamos también a la proyección B .

6-8. Cono circular recto y sus secciones

La intersección de un cono circular recto con un plano es una curva plana llamada *sección cónica*; según el ángulo que este plano cortante forme con la base del cono, así esa sección recta o cónica se llamará *elipse*, *parábola*, o *hipérbola*. Cada una de estas tres secciones se ilustran en la figura 6-8.

En la figura 6-8(a), el plano cortante forma con la base un ángulo A menor que el ángulo de la base B , entonces la intersección es una **ELIPSE**. En el caso de la figura 6-8(b) el plano cortante es paralelo a la generatriz, elemento extremo de la proyección vertical, o sea, que el ángulo A es igual al B , siendo la intersección una **PARÁBOLA**. Para en la figura 6-8(c) mostrarnos el caso en que el ángulo A es *mayor* que el B , siendo la sección de la intersección una **HIPÉRBOLA**.

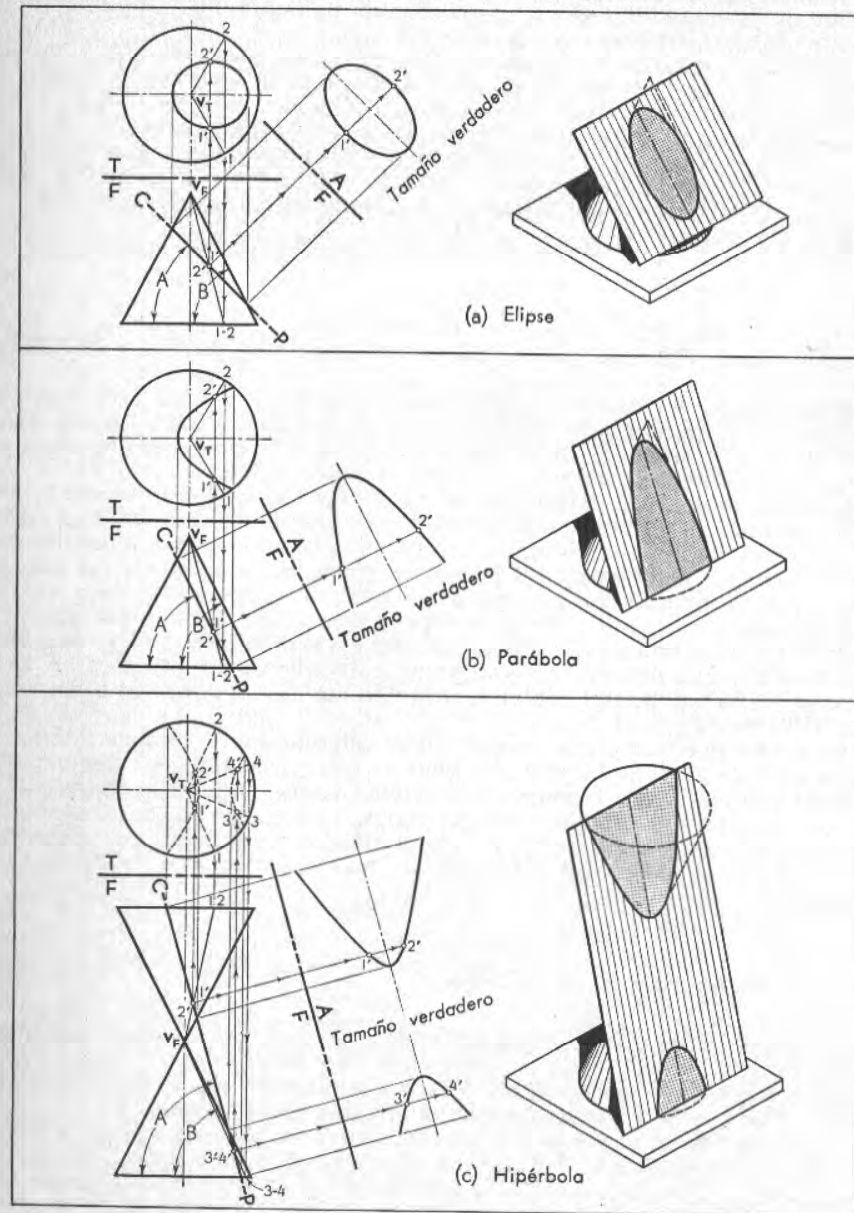


Fig. 6.8. Las secciones cónicas.

BOLA, con dos ramas u hojas, si es que las tuviera la superficie cónica dada.

CONSTRUCCIÓN. El método de construcción es exactamente el mismo que el empleado en el artículo 6.7. Se pueden suponer una serie de elementos en el cono para encontrar sus intersecciones con el plano; de ese modo se suponen los elementos V-1 y V-2, para hallar en cada proyección las intersecciones 1' y 2'. En el caso de la hipérbola las secciones son dos curvas separadas.

Las secciones cónicas dichas también se pueden construir según los métodos de la geometría plana. Como estas secciones son muy corrientes, los métodos indicados han sido dados en el Apéndice.

CASOS ESPECIALES. Hay otras dos posiciones del plano cortante, de particular importancia para la conveniente discusión; si el plano de corte es paralelo al plano de la base del cono, la intersección es un *circulo*; y si este plano pasa por el vértice del cono la intersección será un *par de líneas rectas*, elementos del cono. Esta última intersección es la más sencilla y aplicable a cualquier clase de cono, siempre que el plano pase por el vértice.

PROBLEMAS. Grupo 60.

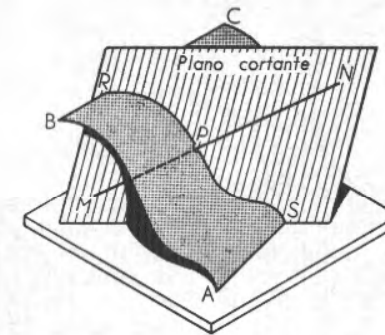


Fig. 6.9. Intersección de una línea con cualquier superficie.

6.9. Intersección de una línea con cualquier superficie

El punto de intersección de una línea con un plano se ha encontrado por medio de un plano que conteniendo a la línea dada corte al plano dado (Regla 14). La podemos hacer extensiva ahora, para cualquier línea y superficie. En la figura 6-9, la superficie curva irregular ABC es cortada por la línea MN, y cualquier plano cortante que contenga a MN cortará a la superficie ABC según una línea RS, que puede ser recta, circular o irregular; debiendo luego encontrar la intersección de las líneas MN y RS. Consideremos por lo tanto a la Regla 14 como regla general:

REGLA 17. REGLA DE UNA LÍNEA QUE CORTA A CUALQUIER SUPERFICIE. La intersección de una línea con cualquier superficie, deberá encontrarse en la línea de intersección entre la superficie dada y el plano cortante que contenga a la línea.

Como tiene que servir *cualquier* plano cortante que contenga a la línea dada, para resolver los problemas futuros se escogerá un plano cortante que corte a la superficie dada en la forma más sencilla posible.

6.10. Intersección de una línea y un cono

PROBLEMA. En la figura 6-10 se pide encontrar los puntos de intersección de la línea MN con la superficie del cono circular oblicuo.

ANÁLISIS. Por la línea MN pueden pasar infinidad de planos, que corten a la superficie del cono según líneas curvas, menos el plano que pasa por el vértice, que cortará a la superficie según dos elementos. Luego para mayor sencillez:

Se elige un plano cortante que contenga a la línea dada y al vértice.

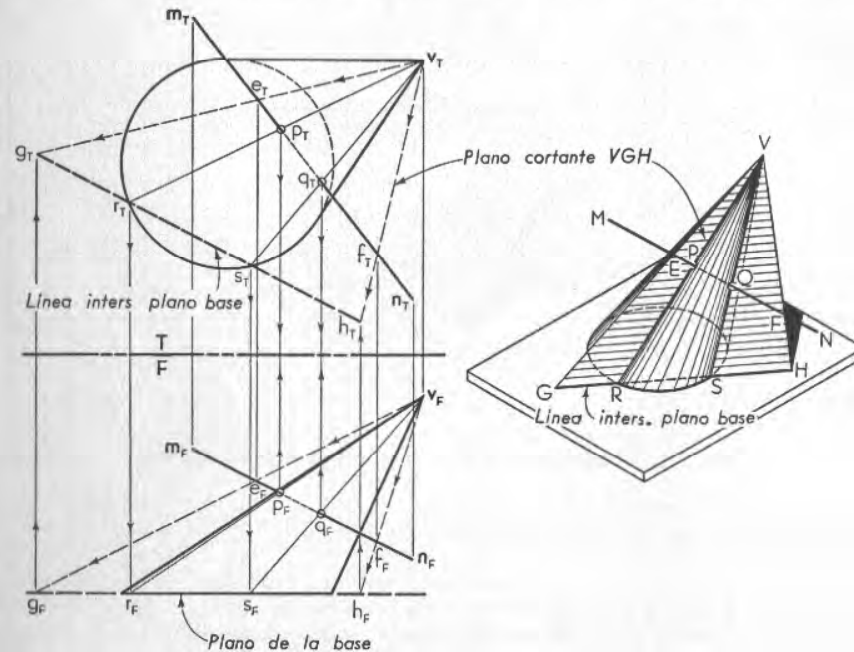


Fig. 6-10. Intersección de una línea con un cono.

Para trazar un plano cortante que pase por el vértice y la recta MN , bastará unir el vértice citado con esa recta por una línea cualquiera, tal como la VE , ya que esas dos rectas definen un plano; y cualquier línea adicional, como la VF , pertenece también a este plano cortante.

Habrà que determinar los dos elementos que limitan la intersección del plano y del cono; para ello se prolonga el plano cortante hasta que corte al plano de la base del cono. Las líneas VE y VF cortan al plano de la base en

los puntos G y H , luego la línea GH será la intersección del plano cortante con el plano de la base del cono, y como GH corta a la circunferencia de la base en los puntos R y S , los elementos VR y VS serán los elementos de intersección que cortan a la línea MN en los puntos P y Q , que serán los puntos solicitados de intersección de la línea y el cono.

CONSTRUCCIÓN. Se puede seguir el procedimiento dicho en el sistema de las dos proyecciones. Las líneas supuestas $v_F e_F$ y $v_F f_F$ se prolongan hasta cortar al plano de la base en los puntos g_F y h_F , que se trasladan a la proyección horizontal a los puntos g_T y h_T , que son los puntos de encuentro de las paralelas trazadas desde g_F y h_F con las prolongaciones de $v_T e_T$ y $v_T f_T$, con lo que se establece la línea de intersección con el plano de la base. Esta línea corta a la curva de la base en los puntos r_T y s_T , determinando los elementos $v_T r_T$ y $v_T s_T$. De este modo se localizan en las dos proyecciones los puntos de intersección P y Q , de la línea MN con el cono. Como comprobación final de esta construcción los puntos p_F y q_F deberán estar precisamente debajo de los puntos p_T y q_T . Y la visibilidad de esos puntos P y Q dependerá de la que tengan los elementos VR y VS , donde están situados.

Aunque se han elegido las líneas VE y VF , para establecer los puntos G y H podrían elegirse otras líneas como las VM , VN , o MN , sin que la posición de la línea elegida afecte a la posición de GH .

PROBLEMAS. Grupo 61.

6.11. Representación de cilindros

Los cilindros se representan en las proyecciones, por la curva (o curvas) de la base, y por los elementos extremos, así como el eje para los cilindros regulares. Es útil la consideración de imaginar al cilindro como un cono cuyo vértice se hubiera trasladado al infinito con lo que los elementos coincidentes del cono quedan paralelos en el cilindro. Con ello se aprecia la similitud que existe entre los problemas de ambos cuerpos.

CILINDROS CIRCULARES RECTOS. La figura 6-11 indica cuatro proyecciones distintas de un cilindro circular recto de eje vertical. Las dos principales, horizontal y vertical, son las más ventajosas, siendo visto oblicuamente en las A y B , donde las bases aparecen como elipses. Debe observarse que el eje mayor de cada elipse es siempre perpendicular al eje del cilindro y siempre igual al diámetro D , de la base del cilindro (comparar con la figura 3-20, y recordar la Regla 10), de lo dicho se deduce:

La distancia perpendicular entre los elementos extremos de un cilindro circular recto es siempre igual al diámetro de la base del cilindro.

Como la superficie del cilindro es el lugar geométrico de todos los puntos del espacio que están separados del eje la misma distancia, habrá que tenerlo en cuenta para aquellos problemas que supongan se solicite la localización de un punto que esté de una línea a una distancia dada. Por ejemplo el lugar geométrico engendrado por el centro de una esfera que sea siempre tangente a una recta dada, es un buen ejemplo de aplicación de la observación indicada.

CILINDROS CIRCULARES OBLICUOS. En la figura 6-12 se reflejan diversas proyecciones de un cilindro circular oblicuo. En las proyecciones principales no figura el eje del cilindro ni en su verdadera longitud ni como un punto, y sin embargo

es conveniente la posición de tales proyecciones en algunos casos, como por ejemplo en los desarrollos. En las proyecciones A y C figura el eje en su longitud real, pero como en la proyección horizontal está la base del cilindro en su tamaño verdadero, en la A figura de perfil, siendo esta proyección de eje verdadero la que es más fácil de construir. En la C el eje mayor es perpendicular a la línea de referencia $C-F$, valiéndole el diámetro D . Si se olvidaran estos datos se pueden construir las elipses trazando series de puntos, como se ha hecho con el punto C . En las proyecciones B y D el eje del cilindro se proyecta como un punto, así como todos los elementos, por ello la superficie del cilindro aparece de perfil en estas proyecciones, que siendo iguales, muestran en su superficie verdadera la sección recta del cilindro, con la misma forma. La posición del eje mayor r_{DSD} se determina con un valor igual al diámetro D ; siendo por tanto r_{CSC} paralelo a la línea de referencia $C-D$.

6.12. Localizar un punto sobre un cilindro

Lo mismo que en el caso del cono (art. 6.6), se puede localizar un punto de la superficie del cilindro localizando primeramente un elemento lineal recto que pase por ese punto. En la figura 6.11 el punto pedido X se encuentra colocado en el elemento CD , como puede observarse en las proyecciones principales.

Para localizar el elemento CD en las proyecciones A y B es necesario solamente localizar los puntos c_A y c_B , en la base del círculo, debiendo ser el elemento siempre paralelo al eje del cilindro. Los puntos x_A y x_B pueden ya ser localizados sobre ese elemento, por alineación.

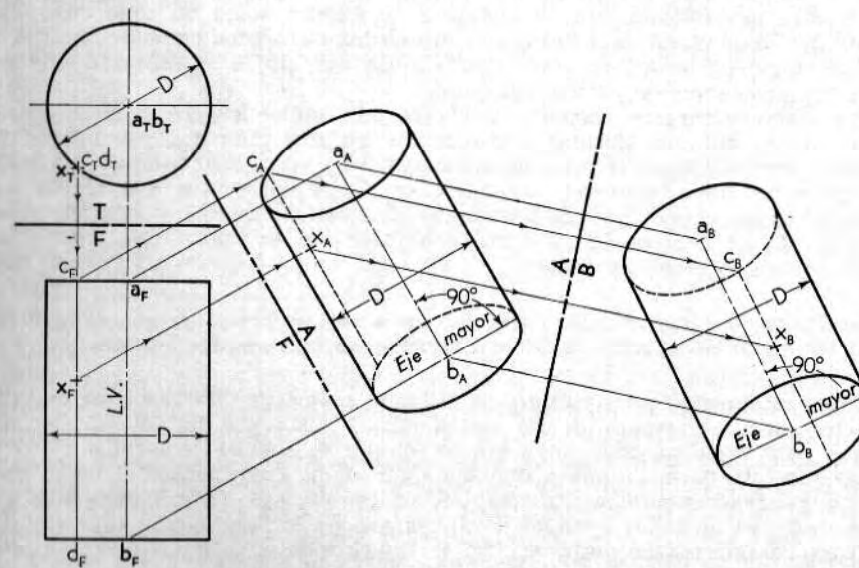


Fig. 6.11. Representación de un cilindro circular recto.

10. DESARROLLO DE SUPERFICIES

10.1. Introducción

El desarrollo de una superficie es la figura plana que se obtiene al desdoblar su superficie total en un plano. Así, en la figura 10-1(a) podemos imaginar que un prisma rectangular estuviera envuelto, o encerrado por una envoltura de un material fino, tal como papel o chapa. Si esta cubierta se abriera a lo largo de las aristas se muestra cada superficie plana desdoblada hacia abajo para situarla en un plano horizontal, entonces toda la envoltura de la figura quedaría extendida en un plano, en el caso de la figura es el *desarrollo* de un prisma. La vista o proyección del verdadero tamaño y forma de este desarrollo consta en la figura 10-1(b). Aquí cada área rectangular tiene la misma forma y tamaño que la superficie correspondiente en el prisma. No hay alargamientos ni deformaciones de la superficie, en el proceso empleado para hacer el desarrollo, por ello podemos establecer la siguiente regla:

REGLA 18. REGLA DE DESARROLLO. Cada línea de un desarrollo muestra la longitud real de la línea correspondiente en la superficie del cuerpo.

Este es un principio fundamental que tiene que ser observado en la construcción de todos los desarrollos.

Solamente los poliedros y las superficies de simple curvatura pueden ser desarrolladas; los poliedros son desarrollables porque están limitados enteramente por superficies planas que puedan ser colocadas en un desarrollo de tamaño verdadero y en serie relacionada. Las superficies de simple curvatura (cono, cilindro y convoluta) son desarrollables, porque cada par de elementos rectilíneos consecutivos están colocados en el mismo plano (art. 6-3). Las superficies alabeadas no pueden ser desarrolladas porque no tienen dos elementos consecutivos que puedan formar un plano (art. 7-1). Las superficies de doble curvatura tampoco pueden ser desarrolladas por no contener superficies ni líneas rectas o planas (art. 8-1). Las superficies alabeadas y las de doble curvatura pueden, sin embargo, ser aproximadamente desarrolladas, con una exactitud que es suficiente para muchos propósitos prácticos.

10.2. Desarrollo de chapas o láminas de metal

Muchos artículos manufacturados están contruidos con simples láminas de metal, habiendo cortado y doblado la materia prima hasta lograr la forma deseada. En cada caso se puede hacer primero el desarrollo de la superficie del objeto, a escala natural o reducida, sobre el papel o directamente sobre la superficie plana del metal. Si se necesita un gran número de elementos de ese cuerpo el desarrollo puede hacerse primeramente reproducido en una muestra del metal, o modelo, cuyo cortorno se pueda trasladar a la pletina. Las *líneas de dobleces* [véase fig. 10-1(b)] se pueden trazar por medio de punzones de marcar, o granetes, que taladran pequeños orificios en el modelo o plantilla. Después de cortar el contorno, el metal se dobla por medio de máquinas, prensas o plegadoras, o por rodillos de trenes de laminación o bien prensadas entre troqueles para darles la forma conveniente.

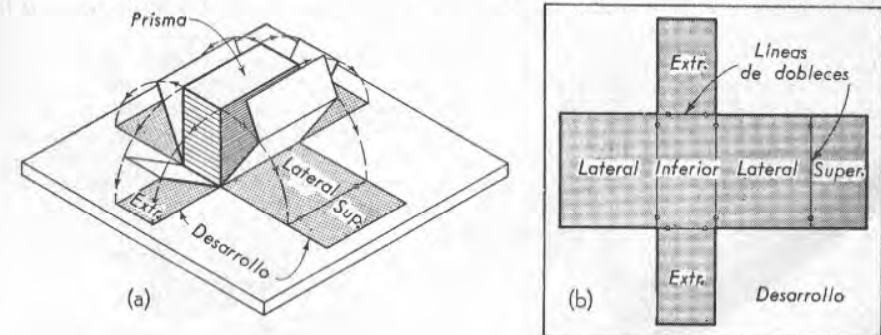


Fig. 10-1. Desarrollo de un prisma rectangular.

Los bordes que deban de unirse se unen por soldadura (corriente o especial), por remachado y por costura o engatillado de las chapas. Los metales especiales se pueden también unir por medio de solapas del tipo de costura (véase art. 10-25). Por economía, y sobre todo por sencillez, las juntas deberán hacerse por las líneas más cortas y preferentemente, a ser posible, por una línea de simetría. Un desarrollo muestra usualmente la superficie interior, para que las líneas marcadas y las señales que ha dejado el granete sobre el metal, puedan quedar ocultas. Para los metales más ligeros que el número 24 de galga (0,625 cm) el espesor del metal deja de considerarse. Para metales que se presentan en forma de chapas finas, medianas o gruesas, o para láminas de acero se debe tener en cuenta una *tolerancia de curvado*, para curvar o doblar estos materiales de mayor grosor (véase art. 10-26).

Todos los desarrollos que se indiquen en los artículos sucesivos lo son teóricamente, es decir, sin incluir las tolerancias de curvado. Para las aplicaciones prácticas se pueden agregar modificaciones relativas a la unión y al doblaje de las superficies de que se trate.

10.3. Clasificación de los desarrollos

Los desarrollos se pueden dividir en cuatro clases según el tipo de superficie o método que se emplee, siendo éstas las siguientes:

1. Desarrollo por líneas paralelas, que son las que se obtienen con los prismas y cilindros.
2. Desarrollo de líneas radiales, que son las que se obtienen con pirámides y conos.
3. Desarrollo de triangulaciones, que se logran dividiendo la superficie dada en una serie de áreas triangulares.
4. Desarrollos aproximados, que son los empleados para las superficies alabeadas y las de doble curvatura.

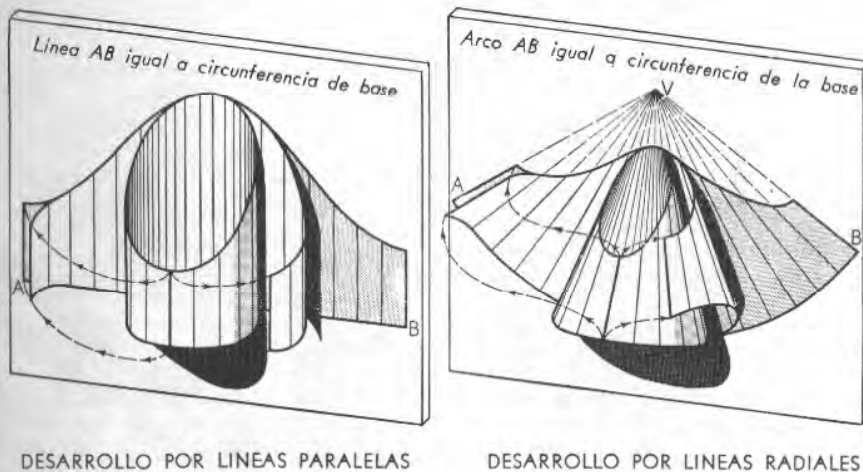


Fig. 10-2. Desarrollo de un cilindro y un cono.

CILINDROS. La figura 10-2(a) muestra gráficamente el desarrollo por líneas paralelas de un cilindro truncado circular recto. La superficie cilíndrica se extiende a partir de sus elementos de mayor longitud hasta quedar extendida en el plano, habiendo sido cortada por el elemento más corto frontal, la superficie ha sido desarrollada hacia abajo, a favor del plano y hacia los dos lados del elemento de corte. La sección recta de la base, su círculo, se ha convertido en la línea recta AB , que es el desarrollo, y los elementos de ese cilindro figuran como una serie de líneas rectas paralelas perpendiculares a esa línea AB . El extremo superior del sistema indicado, que es una elipse del cilindro, se ha convertido en la línea curva que se ve también desarrollada. Y estas características de todos los desarrollos de los cilindros, se pueden resumir así: los elementos paralelos siguen paralelos en el desarrollo; y las secciones rectas se representan luego como líneas rectas perpendiculares a esos elementos. Los elementos laterales de un prisma, o aristas laterales, figuran también paralelas en el desarrollo.

CONOS. La figura 10-2(b) indica, también gráficamente, el desarrollo por líneas radiales de un tronco de cono circular recto. Cuando el cono es colocado con sus elementos, o elemento, de mayor longitud contra la superficie plana, el vértice del cono V debe también situarse en el mismo plano; cortando el cono a lo largo de su elemento frontal más corto su superficie se puede desenrollar hacia abajo y en los dos sentidos hasta extenderla en el referido plano. De este modo, en el desarrollo, los elementos del cono se convierten en una serie de líneas radiales que coinciden en el vértice a modo de origen, y la base circular recta del cono se convierte en el arco AB con centro en V . La sección elíptica del cono es entonces una curva irregular en el desarrollo de esta sección. Las líneas radiales son la característica de todos los desarrollos de conos, pero la curva AB será solamente un arco circular cuando el cono sea circular y recto, en cuyo caso todos sus elementos tendrán la misma longitud. Las aristas laterales de una pirámide se convertirán, del mismo modo, en líneas radiales del desarrollo.

DESARROLLOS TRIANGULARES. Cualquier superficie reglada se puede desarrollar subdividiendo la superficie entre dos o más áreas triangulares. Determinando la longitud verdadera de cada lado de cada triángulo, todos los triángulos se pueden colocar y desarrollar hacia abajo en una serie relacionada para formar este desarrollo. El método de triangulación para los poliedros resulta exacto; para las superficies de simple curvatura la exactitud del desarrollo aumenta al aumentar el número de triángulos que se consideren los que también serán menores, y para las superficies alabeadas el desarrollo tiene que ser solamente aproximado, ya que estas superficies son teóricamente indesarrollables.

10.7. Desarrollo de un cilindro circular recto

PROBLEMAS. En la figura 10-6 se desarrolla la superficie lateral de un cilindro circular recto.

ANÁLISIS. En la figura 10-2(a) el desarrollo de un cilindro circular recto está ilustrado gráficamente, apareciendo los elementos del cilindro como líneas paralelas de longitud verdadera. La longitud del desarrollo es igual a la longitud de la circunferencia del cilindro y las divisiones de la línea de desarrollo muestran la distancia entre los elementos consecutivos. Las proyecciones dadas dan directamente los necesarios elementos en longitud verdadera, así como los espacios existentes entre dichos elementos.

CONSTRUCCIÓN. El círculo de la proyección horizontal ha sido dividido en 12 partes iguales, estableciendo así 12 espacios iguales entre los elementos del cilindro que se enumeran desde 0 a 11. Los mismos elementos se trazan también en la proyección vertical. La base inferior del cilindro es una sección recta que en el desarrollo figura como una línea recta, luego ya podemos emplear la línea de desarrollo (si ambos extremos del cilindro son oblicuos, se puede emplear cualquier sección recta para obtener la línea de desarrollo).

La longitud y las divisiones de esta línea de desarrollo, se pueden establecer de dos modos: (1) Calculando la exacta longitud matemática ($L = \pi D$), y dividiendo luego esta longitud en 12 partes iguales; (2) empleando la cuerda, o distancia a_7b_7 que se llevará 12 veces a partir de 0, sobre la línea de desarrollo. El primer método es evidentemente exacto, mas para no hacer divi-

siones, el segundo método dará un desarrollo alrededor del 1,1 por ciento, por defecto. Para 16 divisiones el error es sólo del 0,6 por ciento, y para 24 divisiones, solamente es de 0,3 por ciento; emplear más de 24 divisiones no es corriente en los trabajos de ingeniería.

Habiendo establecido la línea de desarrollo y sus divisiones se trazarán las perpendiculares por esos 12 puntos, tomando en cada una de ellas las longitudes de los elementos del cilindro, que se trasladarán desde la proyección vertical, obteniendo así los puntos A, B, C, etc., que unidos por una línea curva suave completan el contorno del desarrollo buscado. Obsérvese que las líneas B1, C2, etc., representan elementos de una superficie curvada, y de aquí que pudieran ser marcados con los símbolos de líneas de doblaje. El desarrollo empezó, por economía, por el elemento más corto (art. 10-2), y como es simétrico no necesita la indicación de interior.

PROBLEMAS. Grupo 109

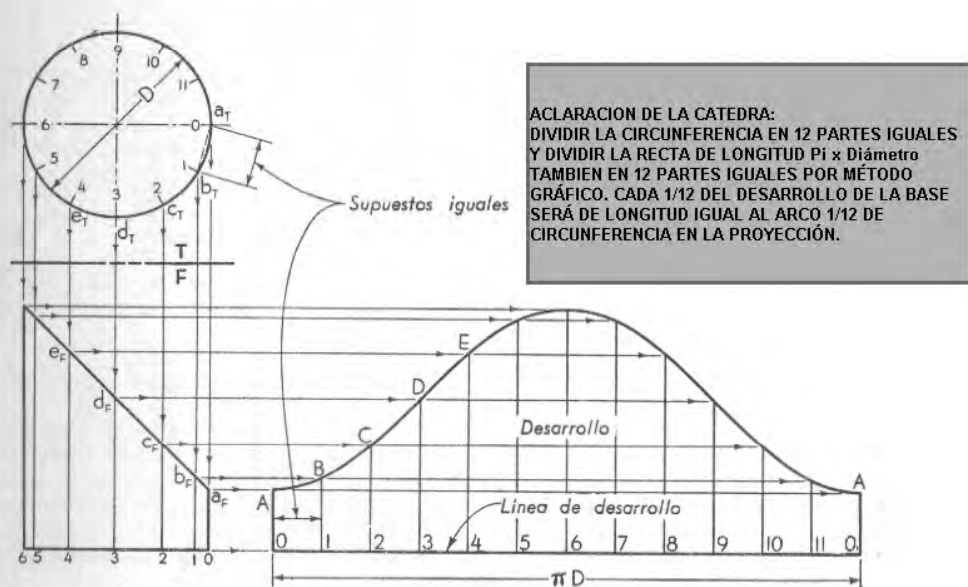


Fig. 10-6. Desarrollo de un cilindro circular recto.

10-8. Desarrollo de un cilindro oblicuo

PROBLEMA. En la figura 10-7 el cilindro oblicuo tiene una base circular horizontal con centro en A, y la base superior con centro en B está formada por la intersección del cilindro con un plano vertical. Un desarrollo de la superficie cilíndrica dicha, es lo que ahora se solicita.

ANÁLISIS. El desarrollo de un cilindro oblicuo puede reducirse a la forma más sencilla indicada en la figura 10-6, por lo que deducimos:

1. Una proyección que indique la longitud real de los elementos del cilindro.
2. Una proyección final (sección recta) que muestre los elementos como puntos.

CONSTRUCCIÓN DE LAS PROYECCIONES. La proyección A se traza adyacente a la proyección horizontal, para tener la ventaja de que la base circular inferior figure de perfil en esta proyección. Pero la base superior, de este cilindro oblicuo es elíptica y aparecerá como una elipse en la proyección A; por ello es necesario suponer una serie de elementos en este cilindro para construir la elipse en esa proyección A. La base circular en la proyección horizontal se ha dividido en ocho partes iguales (este número, sin embargo, no suele ser adecuado en la práctica, pero es conveniente en la explicación) y los elementos del cilindro se han trazado por cada punto de división. Los puntos 0', 1', 2', etc., del círculo de la base se han extendido a la proyección A, designándose como 0'', 1'', 2'', etc., al cortar al plano vertical y ser trasladados a la proyección A,

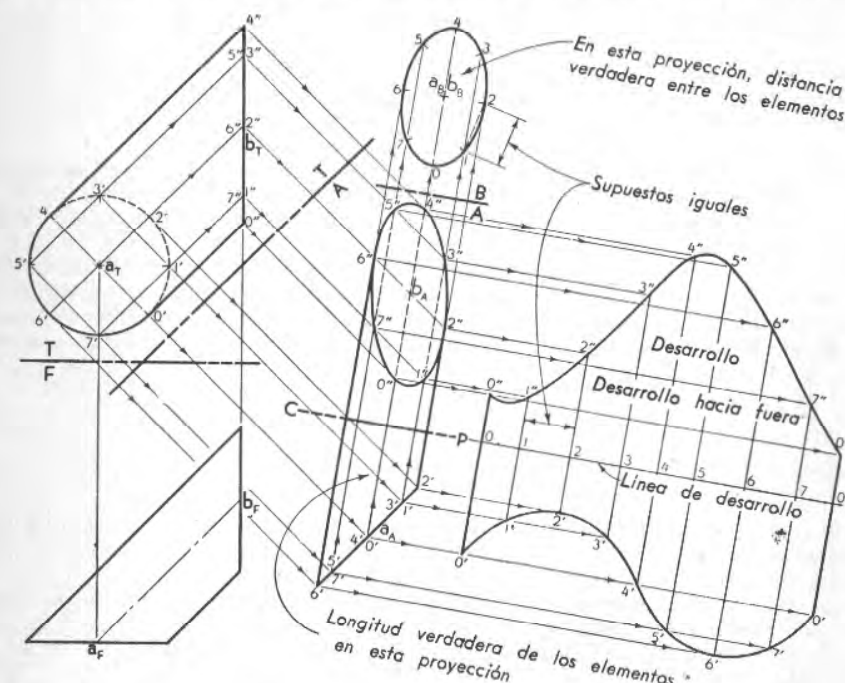


Fig. 10-7. Desarrollo de un cilindro oblicuo.

que al ser a su vez trasladados a la derecha de dicha proyección A vamos obteniendo los distintos puntos de la solicitada sección. Esta fase de la construcción es muy similar a la que ya se ha descrito en el artículo 6-7. La proyección B muestra la elipse en la fase terminal en la que cada elemento seleccionado está proyectado como un punto.

CONSTRUCCIÓN DEL DESARROLLO. Como la base del cilindro no puede servir de sección recta, se ha empleado el plano de corte $C-P$, arbitrariamente seleccionado, y la línea del desarrollo se ha supuesto colocada a continuación o enfrente de dicho plano $C-P$ (como se vio en la fig. 10-4 la línea de desarrollo puede ser colocada en cualquier sitio, poniendo los elementos por encima y debajo de dicha línea de los puntos de corte, con objeto de facilitar la transferencia al desarrollo). Los ocho elementos que se han supuesto inicialmente correspondientes a los intervalos de la base circular, como no pueden estar igualmente espaciados en la elipse de la proyección B , de ahí que las distancias de 0 a 1, de 1 a 2, etc., de la elipse deban ser llevadas directamente desde esta proyección B a la línea de desarrollo, transportando las longitudes de las cuerdas de estos arcos de la proyección B (véase también el Apéndice, art. A-4). La longitud verdadera de cada elemento se puede transportar al desarrollo al localizar los puntos $0'$, $1'$, $2'$, etc., pertenecientes a la curva inferior y transportar sobre la curva superior los puntos $0''$, $1''$, $2''$, etc.

Este desarrollo no es simétrico, por ello tiene que ser indicado el modo de su desenvolvimiento, es decir, hacia qué lado se efectúa con respecto al observador. Si el desarrollo es *hacia afuera*, se puede determinar comparando la serie de los elementos en la línea del desarrollo de la proyección A . El elemento O en la proyección A está en la superficie del cilindro más cercana al observador y los elementos 1 y 2 se van encontrando progresivamente hacia la derecha; al abrirse el cilindro por O , y *hacia afuera*, los diversos elementos se irían colocando en un plano en la forma que indica la proyección A .

Si el desarrollo se efectúa *hacia arriba*, el cilindro resultante se inclinará hacia la izquierda en vez de hacia la derecha, con sentidos inversos para la dirección de plegamiento. En otras palabras, un cilindro con numeración hacia la derecha, a partir del 0, se obtiene con enrollamiento hacia abajo; si la numeración va hacia la izquierda el cilindro se desenrolla *hacia arriba*, y aunque la forma es similar, en uno o en otro sentido, vienen a ser tan diferentes como son las formas de las plantillas del pie derecho y del izquierdo. Esto se puede comprender fácilmente cortando un perfil de desarrollo asimétrico y haciéndolo en la práctica.

10-12. Desarrollo de un cono circular recto

ANÁLISIS. En la figura 10-2(b) el desarrollo de un cono circular recto se efectuó ya gráficamente, todos los elementos tenían la misma longitud, luego las líneas radiales del desarrollo eran iguales con la misma inclinación en relación con la altura del cono. De este modo la base circular del cono se convertía en un arco circular en el desarrollo, siendo la longitud de este arco exactamente igual a la longitud de la circunferencia de la base del cono.

PROBLEMA. Encontrar en la figura 10-11 el desarrollo de la superficie lateral de un cono circular recto.

CONSTRUCCIÓN. Se divide la base del círculo en doce partes iguales, estableciendo así doce espacios numerados del 0 al 11. Los mismos elementos se

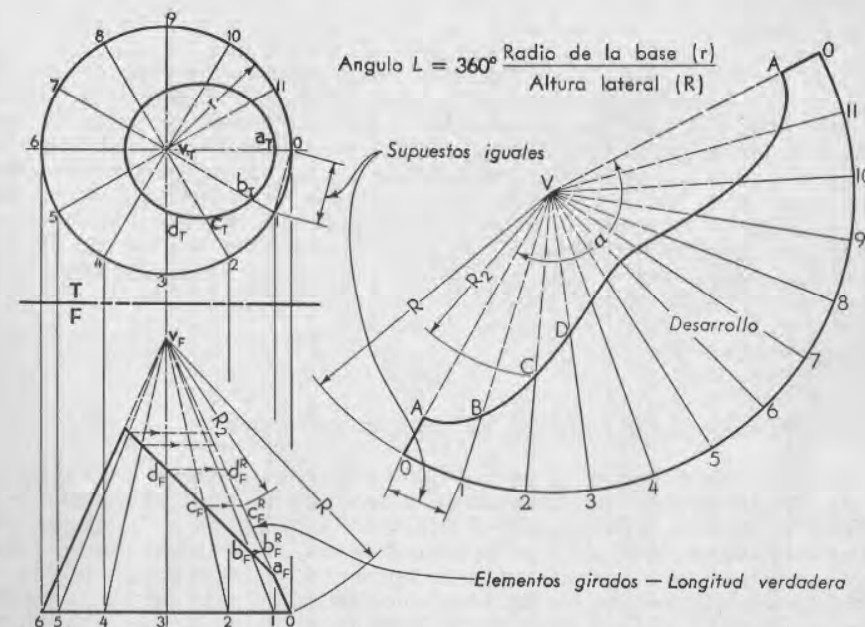


Fig. 10-11. Desarrollo de un cono circular recto, y tronco del mismo.

trazan en la proyección vertical. El elemento extremo v_F0 tiene su longitud verdadera que es la de la altura lateral o generatriz R del cono, por lo tanto haciendo centro en V y con ese radio R se traza un arco de círculo que será la longitud por donde va el desarrollo de la base del cono. La longitud de este arco y sus divisiones se pueden obtener de los dos modos siguientes: (1) calculando el ángulo α de acuerdo con la fórmula que se da en la figura 10-11,

ángulo $\alpha = 360^\circ \frac{\text{Radio de la base } (r)}{\text{Altura lateral } (R)}$, la longitud de este arco, correspondiente

al ángulo α , es el que se llevará al desarrollo antes dibujado con radio R , tomando sobre esta longitud 12 partes iguales; (2) este sistema se puede realizar con el compás de precisión llevando las cuerdas, que tienen todas la misma longitud, del arco de la base circular del cono, al arco del desarrollo que se ha trazado con radio R , y que se ha iniciado en dicha figura. El primer método es exacto, pero el error que se tiene con el segundo método será menor que los valores dados en el art. 10-7 para un cilindro. Las líneas radiales trazadas desde V a cada uno de los puntos trazados sobre el arco, representan los 12 elementos del cono en su desarrollo.

La parte de la superficie del cono cercana al vértice se puede deducir ahora del desarrollo de la totalidad del cono, restando de cada elemento radial la longitud verdadera que tiene el segmento que hay que deducir. Por ejemplo, al elemento $V2$ correspondiente al punto 2, se le deduce la longitud real del segmento VC , que puede deducirse girando $v_F C_F$ hasta la posición $v_F C_F^R = R_2$, siendo esta distancia R_2 la que se resta de $V2$ para tener la distancia buscada VC . Del mismo modo deduciríamos los demás segmentos que hay que ir restando de los elementos del desarrollo para así ir teniendo los puntos A, B, C , etcétera, que unidos por una curva suave complementan y completan la curva superior del desarrollo de la superficie del cono circular truncado. La simetría del cono y su desarrollo hacen innecesario designar si este desarrollo es hacia arriba o hacia abajo, al interior o al exterior. El tronco del cono circular recto se presenta frecuentemente en problemas de ingeniería de construcción (véase figura 10-15). Si la base del cono no es de sección recta circular será conveniente suponer entonces una sección recta, prescindiendo del círculo de la base, y en esa sección recta desarrollada ir trazando los elementos por los puntos definidos, tomando arriba y abajo de cada uno de estos elementos radiales las distancias que antes hemos encontrado con este método (véase art. 10-17).

PROBLEMAS. Grupo 113.

10-13. Desarrollo de un cono oblicuo, y tronco del mismo

ANÁLISIS. En el desarrollo de un cono oblicuo (o cualquier otro cono que no sea circular y recto) las líneas radiales serán ya de longitud desigual y por lo tanto el cono de la base, aunque ésta fuera circular, ya no se puede desarrollar como antes según un arco de circunferencia. Para desarrollar tales conos supongamos que la superficie existente entre dos elementos consecutivos sea lo suficientemente estrecha como para aproximarse, lo más posible, a un fino plano triangular; en otras palabras, la parte de curva de la base comprendida entre dos elementos, debe ser lo suficientemente pequeña para considerarla como una línea recta. Con esta aproximación el error no excederá a menudo de 1% y el cono podrá ser desarrollado como si fuera una pirámide oblicua con una base de múltiples lados.

PROBLEMA. En la figura 10-12 la curva de la base del cono oblicuo es elíptica y la parte de superficie cercana al vértice ha sido cortada por un plano vertical. Se solicita desarrollar la superficie del cono comprendida entre ese plano vertical y el plano horizontal de la base; es decir, desarrollar el tronco de cono oblicuo comprendido entre esas dos bases.

CONSTRUCCIÓN. La curva de la base del cono se divide en doce partes iguales y se trazan en cada proyección los doce elementos correspondientes. La curva en la proyección vertical se determina por el método corriente de ir

anotando los puntos donde cada elemento corta al plano vertical (art. 6-7). Suponiendo el cono como una pirámide oblicua de doce lados, el desarrollo se efectúa por el mismo procedimiento y método que se ha descrito en el artículo 10-11. El diagrama de las longitudes verdaderas se construye a la derecha y a continuación de la proyección vertical, donde se indican las longitudes verdaderas de todos y cada uno de los elementos desde el vértice a la base. Como hicimos en la figura 10-10 las longitudes de cada elemento en la proyección horizontal se transfieren a la línea $X3^R$ (línea base del diagrama) igual a v_T3 ; $X4^R$ igual a v_T4 , etc., para establecer así las longitudes verdaderas v_F3^R , v_F4^R , etc. La base del cono aparece con longitud verdadera, tamaño real, en la proyección horizontal, por ello las distancias de las cuerdas de los diferentes arcos, tales como el 9-10 de la figura, pueden ser llevados directamente al desarrollo.

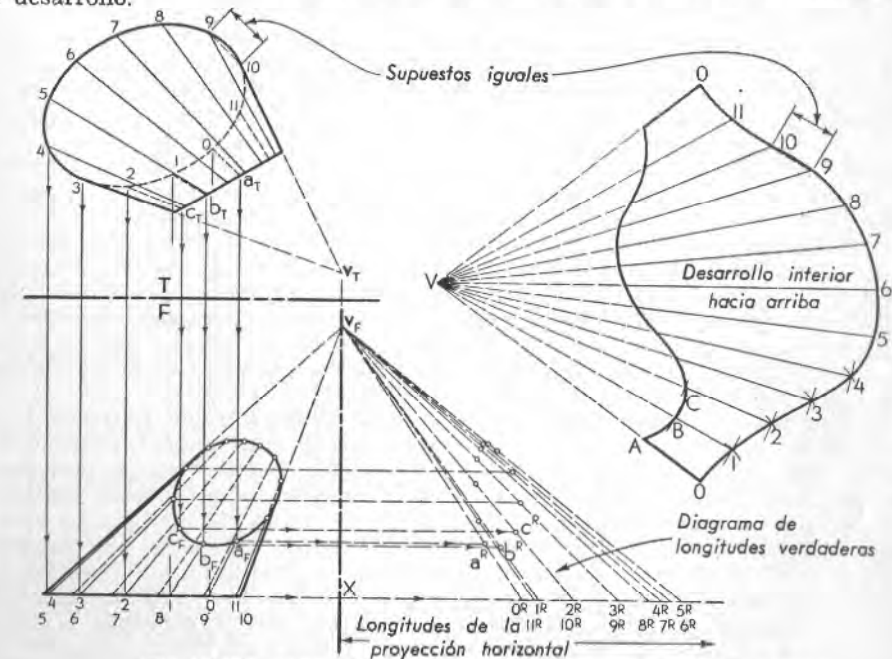


Fig. 10-12. Desarrollo de un cono oblicuo y tronco del mismo.

En el desarrollo la primera línea radial VO puede ser colocada en la posición que se desee, haciendo centro en el vértice V y con un radio igual a v_F1^R (longitud verdadera del elemento siguiente) se traza un corto arco para localizar con él el punto 1. Haciendo centro en O y con un radio igual a la cuerda del arco $O1$, de la proyección horizontal, se traza un segundo arco que al cortar al anterior trazado desde el vértice V , determina en su cruce la posición del punto 1. De la misma manera se van localizando sucesivamente los puntos 2, 3, 4, etc., Una curva suave que se trace por todos estos puntos dará la curva buscada del desarrollo.

Obsérvese que así como los arcos radiales y sus cuerdas son distintos, también los espacios angulares correspondientes a los mismos tendrán amplitud distinta.

La curva de la base superior del cono se obtiene separando de cada línea radial la longitud verdadera del segmento restado a partir de V .

Como hicimos en la figura 10-10 estas longitudes verdaderas se toman del diagrama de longitudes verdaderas. Evidentemente el desarrollo no es simétrico, debiendo designarse la dirección en que debe efectuarse.