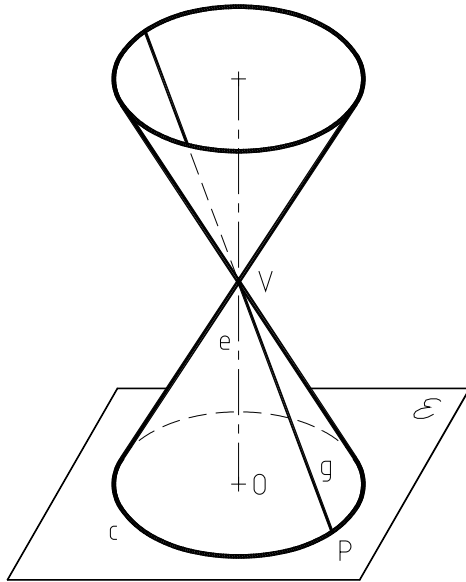


Capítulo 3: SECCIONES CONICAS.

3.1. DEFINICION DE SUPERFICIE CONICA DE REVOLUCION O CONICA RECTA.

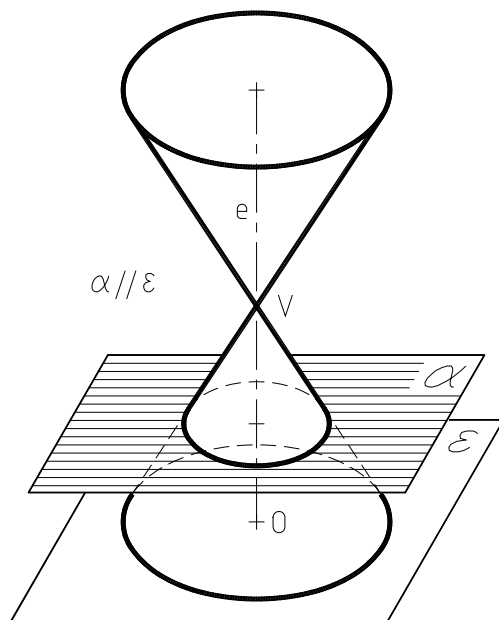


Se llama superficie cónica de revolución, o cónica recta, a la superficie generada por una recta g denominada generatriz que se mueve en el espacio pasando permanentemente por un punto V llamado vértice de la superficie y teniendo siempre un punto de contacto P de una circunferencia c , conocida como curva directriz, la que pertenece a un plano e , perpendicular a la recta e determinada por el vértice V y el centro O de la circunferencia, llamada eje de la superficie cónica de revolución.

Como consecuencia de la definición observamos en el esquema, que la superficie obtenida consta de dos mantos, los que tienen en común el vértice V .

3.2. CURVAS CÓNICAS.

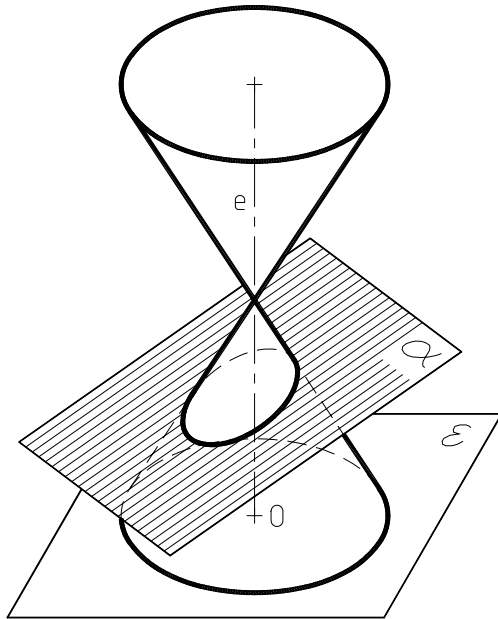
Son las obtenidas seccionando a la superficie cónica con un plano que no pase por el vértice de la misma. Según la posición del plano seccionante se obtiene:



a) Circunferencia:

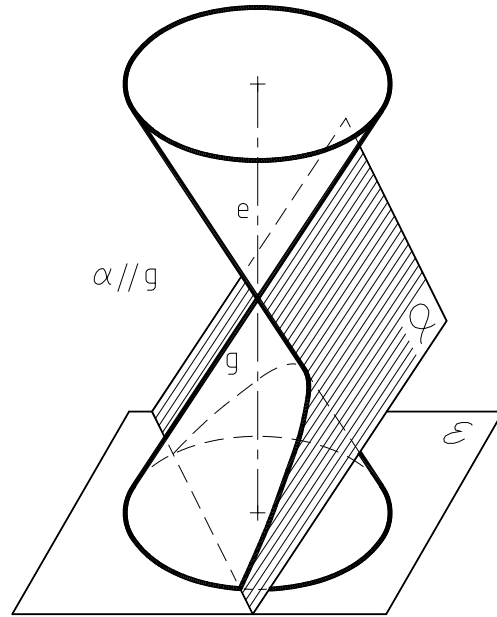
Cuando el plano secante es paralelo al de la directriz, se observa que el mismo intersecta a todas las generatrices y resulta perpendicular al eje de la superficie cónica recta.

El centro de la circunferencia se ubica en la intersección del eje e con el plano seccionante.



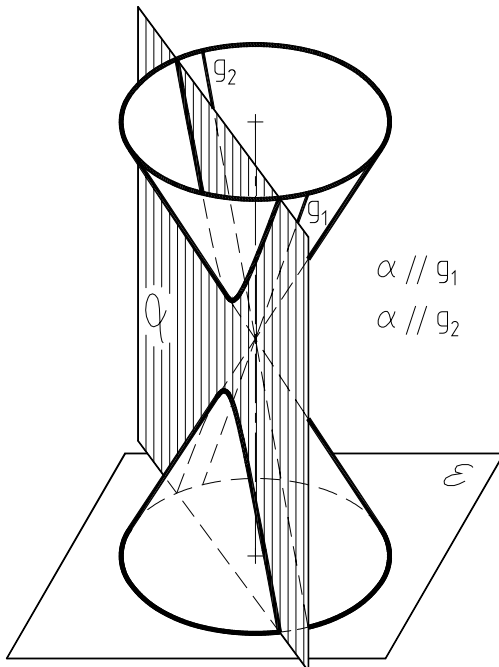
b) Elipse:

Si el plano seccionante es oblicuo al de la directriz e e intersecta a todas las generatrices.
Se observa que el plano secante es oblicuo al eje de la superficie.



c) Parábola:

Cuando el plano secante es paralelo a una generatriz.
Secciona a uno solo de los mantos de la superficie, y determina una curva abierta.

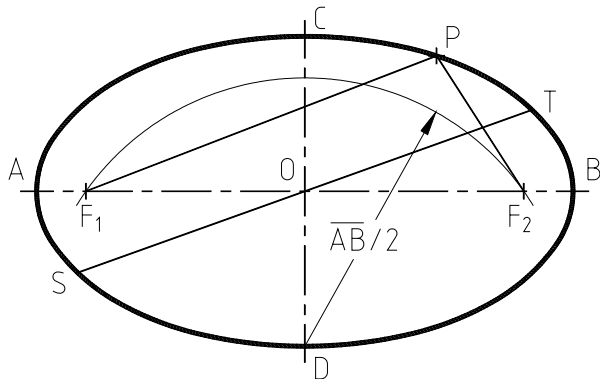


d) Hipérbola:

Si el plano secante es paralelo a dos generatrices.
Secciona a los dos mantos de la superficie cónica, formando una curva abierta constituida por dos ramas (una de cada manto).

3.3. DEFINICION DE LA ELIPSE.

La elipse es una curva plana y cerrada, de segundo grado, simétrica respecto de dos ejes llamados ejes de la elipse: AB eje mayor y CD eje menor, normales entre si, que se intersectan en un punto O centro de la misma. Cualquier punto P de la elipse cumple la siguiente condición: “La suma de las distancias de dicho punto a los focos es constante e igual a la longitud del eje mayor”.



Es decir: $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = cte. = AB$

Sobre el eje mayor y simétricos respecto del centro O se encuentran los puntos fijos F_1 y F_2 llamados focos.

Los segmentos $\overline{PF_1}$ y $\overline{PF_2}$ reciben el nombre de radios vectores de la elipse.

Denominamos diámetro de la elipse a todo segmento de recta \overline{ST} , que pasando por el centro de la misma une dos puntos de la curva.

Está demostrado que una elipse puede obtenerse como resultado de la proyección de una circunferencia sobre un plano de proyección. En efecto, si proyectamos una circunferencia sobre dos planos de proyección perpendiculares entre si, plano Vertical y Horizontal, se puede observar en la Figura A, que la circunferencia en el espacio está perpendicular al plano Horizontal y paralela al plano Vertical, proyectándose en este último, por lo tanto, como circunferencia. En la Figura B, se puede ver que la circunferencia en el espacio se mantiene perpendicular al plano Horizontal, pero con respecto al plano vertical está oblicua y como consecuencia de ello se proyecta como elipse.

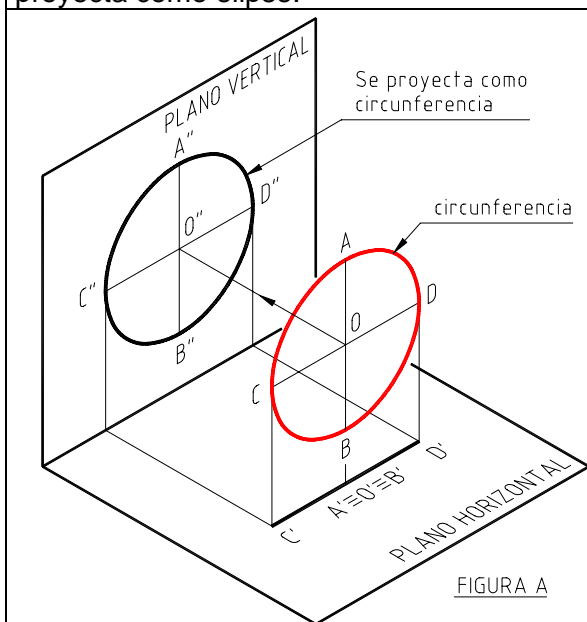


FIGURA A

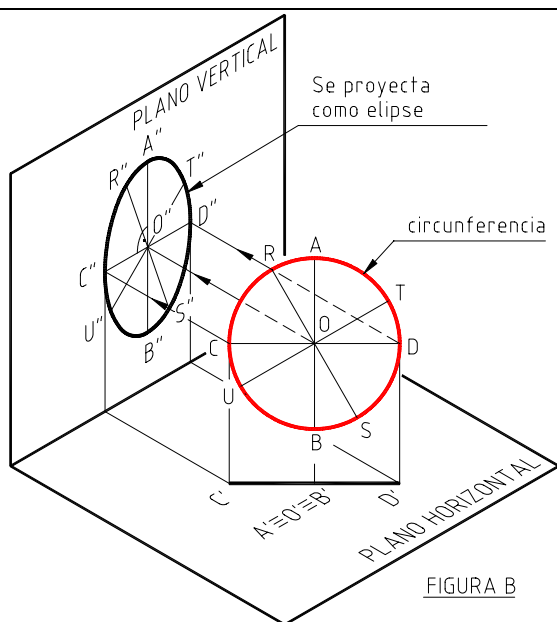


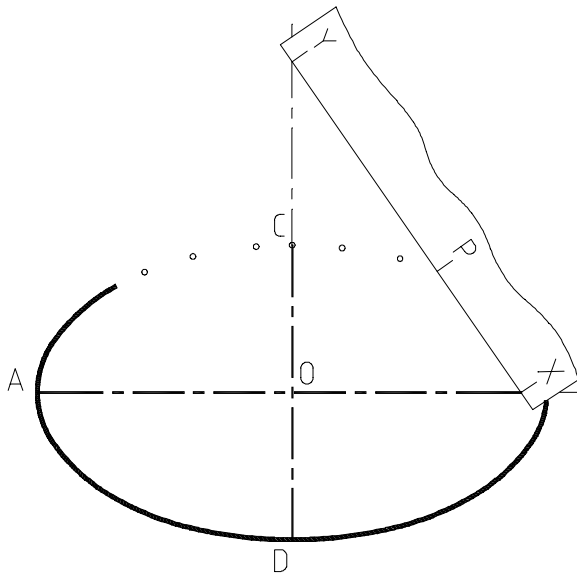
FIGURA B

Se puede decir entonces que a cada diámetro de la circunferencia le corresponde un diámetro de la elipse, y de lo cual se pueden expresar dos importantes conclusiones: “Dos diámetros perpendiculares de la circunferencia (RS y TU –ver Figura B-) que no se proyectan perpendiculares constituyen los llamados **diámetros conjugados** ($R''S''$ y $T''U''$)”. La excepción a esto último se da con el par de diámetros normales AB y CD, donde AB es paralelo al plano vertical. En este caso los diámetros AB y CD se proyectan perpendiculares en el plano vertical por ser AB paralelo a dicho plano, por lo cual podemos enunciar la segunda conclusión: “Dos diámetros perpendiculares de la circunferencia (AB y CD) que se proyectan perpendiculares constituyen los ejes de la elipse ($A''B''$), que es la proyección de un diámetro de la circunferencia en verdadera magnitud, constituye el eje

mayor, y $C'D'$, que es la proyección del otro diámetro de la circunferencia normal a AB que se ha proyectado perpendicular a $A'B'$ y con una magnitud menor, constituye el **eje menor**).

Los métodos constructivos de las curvas en estudio (elipse, parábola e hipérbola), consisten en determinar puntos de la curva en cantidad suficiente, los que luego se unen con pistolete o curvilíneo. Cabe aclarar que se trata de curvas unitangentes, sin puntos angulosos.

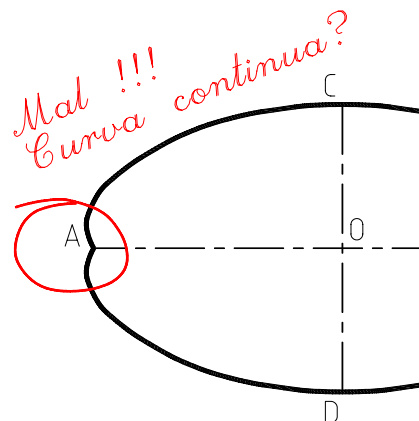
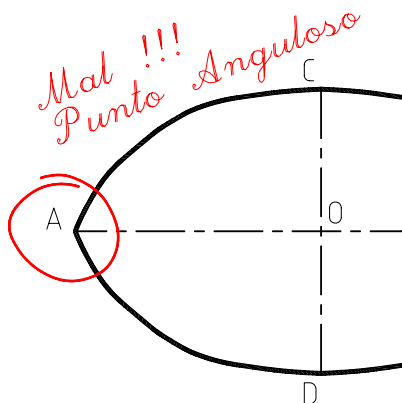
3.3.1. CONSTRUCCION DE UNA ELIPSE POR EL METODO DE LA TIRA DE PAPEL.



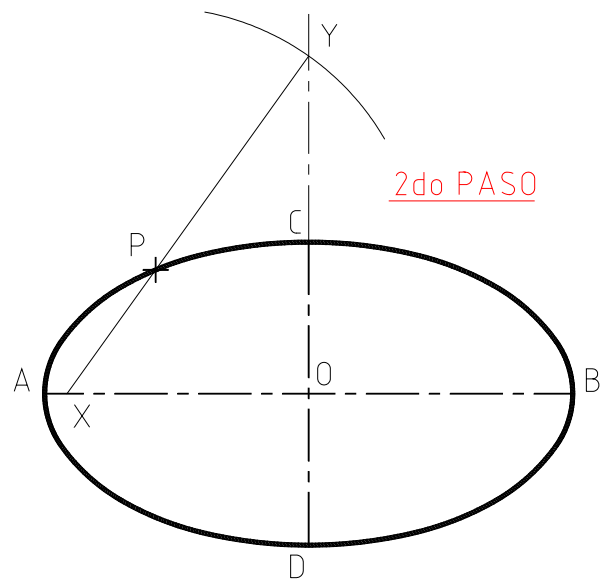
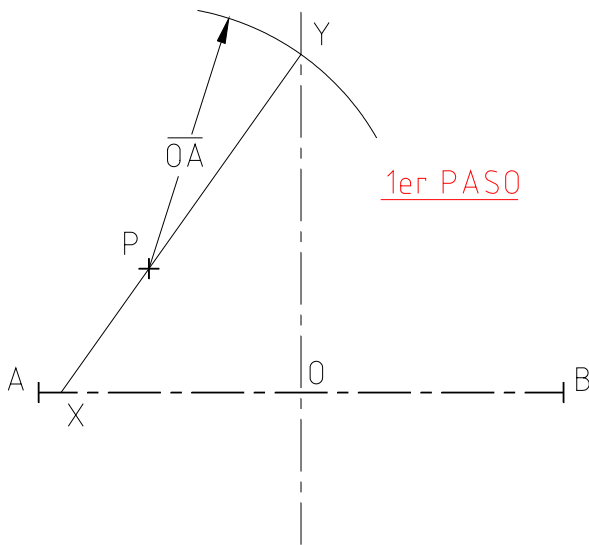
- 1) Dibujar el eje mayor AB y el eje menor CD .
- 2) Sobre el borde recto de una tira de papel se marcan los puntos X , P e Y tales que $XP=OC$, e $YP=OA$.
- 3) Ubicar el punto X en la recta que contiene al eje mayor, y el punto Y en la recta a la que pertenece el eje menor. En esta posición el punto P determina un punto de la elipse.
- 4) Cambiando la posición de la tira de papel, pero teniendo en cuenta que el punto X no puede salirse de la recta que contiene al eje mayor y el punto Y no puede salirse de la recta que contiene al eje menor, se pueden determinar varios puntos de la elipse.

- 5) Para el trazado de la elipse deben tenerse en cuenta las siguientes premisas: a) La elipse debe trazarse utilizando el pistolete o curvilíneo, b) Se debe trazar por cuartos, es decir, tratar de unir de un solo tramo con el curvilíneo desde el punto A hasta el C , luego del C al B , del B al D y del D al A , siempre y cuando pueda encontrar una curva en el curvilíneo que se adapte al cuarto que debe trazar, c) La elipse es una curva continua, es decir que no presenta quiebres o puntos angulosos.

ELIPSES MAL TRAZADAS

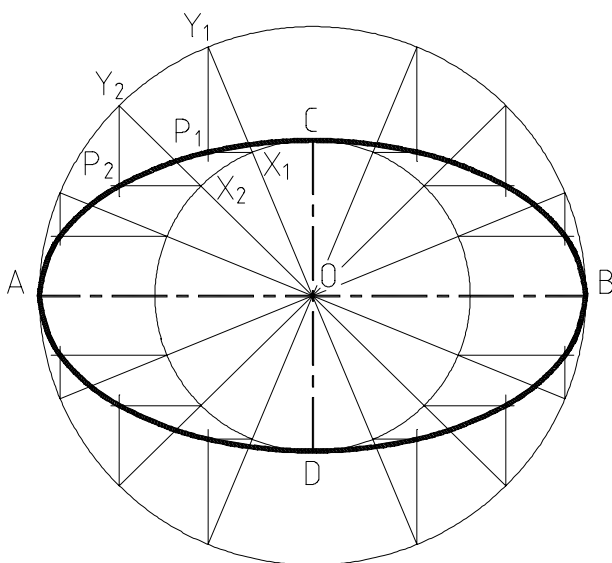


3.3.2. DETERMINACION DEL EJE MENOR DE UNA ELIPSE DADO EL EJE MAYOR Y UN PUNTO DE PASO DE LA CURVA.



- 1) Dibujar el eje mayor AB y el punto de paso P.
- 2) Por el punto O, punto medio de AB, trazar una recta perpendicular a AB, donde se encontrará el eje menor. Con centro en P y radio OA trazar un arco que corte a la recta anterior en el punto Y. Dibujar el segmento que une el punto Y con P e interseca al eje AB en el punto X. (1er PASO)
- 3) La distancia de P a X es igual al semieje menor, es decir $PX=OC$. Ubicado el eje menor CD, determinar una cantidad suficientes de puntos de la elipse y trazar con pistoleta. (2do PASO)

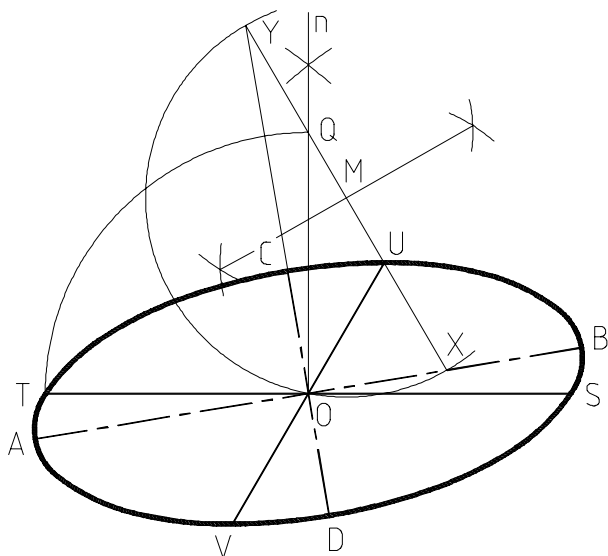
3.3.3. CONSTRUCCION DE UNA ELIPSE POR EL METODO DE LAS CIRCUNFERENCIAS CONCENRICAS.



- 1) Dibujar el eje mayor AB y el eje menor CD.
- 2) Con centro en O, se trazan dos circunferencias de diámetros respectivamente iguales a los ejes dados.
- 3) Dibujar una recta, con cualquier ángulo, que pase por O y localizar los puntos X_1 e Y_1 de intersección con las circunferencias. Por X_1 trazar una recta paralela al eje mayor, por Y_1 una recta paralela al eje menor, las cuales se cortan en P_1 , punto de la elipse.
- 4) Por razones prácticas conviene dividir las circunferencias en un número de partes iguales y repetir el procedimiento, obteniendo otros puntos de la elipse.

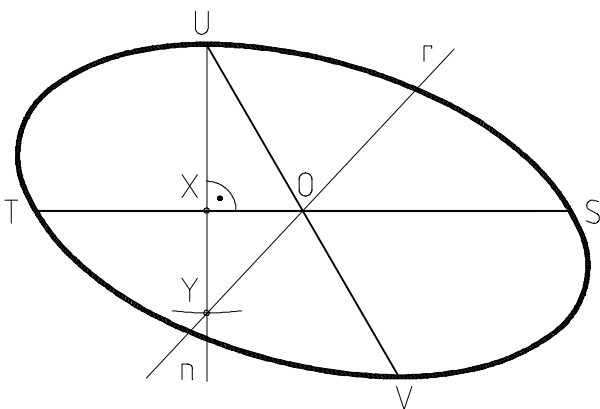
3.3.4. CONSTRUCCION DE LA ELIPSE DADOS DOS DIAMETROS CONJUGADOS.

a) Método de RYTZE: Determinación de los ejes a partir de los diámetros conjugados.



- 1) Dibujar los diámetros conjugados TS y UV.
- 2) Por el punto O trazar la normal n al diámetro TS. Ubicar sobre n el punto Q de modo que $OQ=OT$.
- 3) Se une U con Q, y con centro en el punto medio M y radio MO se dibuja un arco de circunferencia hasta interceptar la recta que contiene al segmento UQ, en los puntos X e Y.
- 4) Mediante rectas unir X con O, e Y con O; son estas las direcciones de los ejes mayor y menor respectivamente. Medida de los ejes: $AB=2.UY$, $CD=2.UX$.
- 5) Por alguno de los procedimientos conocidos se traza la elipse.

b) Construcción de una elipse, dados sus diámetros conjugados, por el método de la tira de papel.



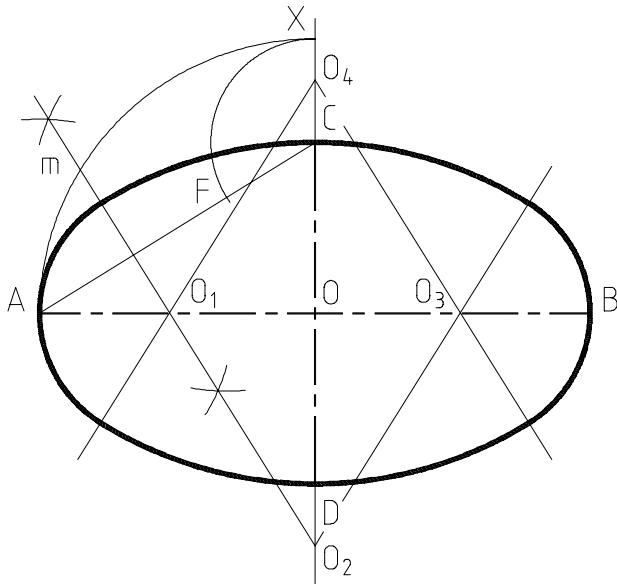
- 1) Dibujar los diámetros conjugados TS y UV.
- 2) Por el extremo U del diámetro UV trazar la normal n al otro diámetro TS obteniendo el punto X.
- 3) Obtener el punto Y sobre la recta n, de manera que $UY=TS/2$. Trazar la recta r que une los puntos Y con O.
- 4) Sobre el borde recto de una tira de papel se mide TX y a continuación XY.
- 5) Desplazando la tira de papel, de tal manera que el punto Y se mantenga sobre r y el punto X sobre TS, el punto U genera puntos de la curva.

3.3.5. DIFERENCIAS ENTRE ELIPSE Y OVALO. CONSTRUCCION DEL OVALO.

La elipse es una curva de curvatura variable, es decir que el radio de curvatura varía punto a punto, por lo que **no puede construirse con compás** empalmando arcos de circunferencia. El óvalo es una figura plana y cerrada, bisimétrica, compuesta por cuatro arcos de circunferencia iguales y simétricos dos a dos, cuya forma es aproximada a la elipse. De esta manera podemos concluir que una curva

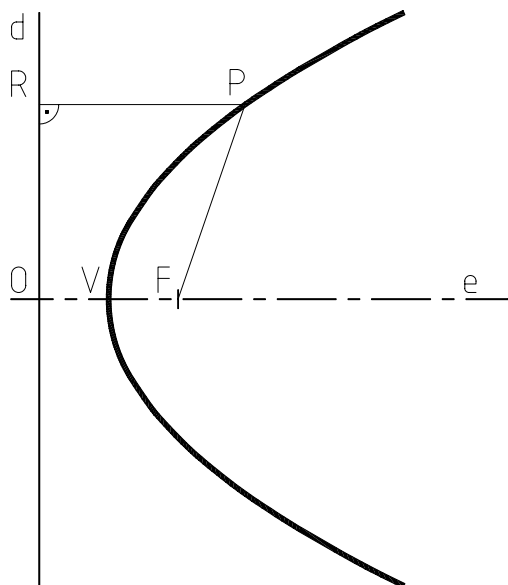
está compuesta por arcos de circunferencia (óvalo), mientras que la otra curva no (elipse), con lo cual, si bien son parecidas en su aspecto, son totalmente diferentes en su concepción y no se debe dibujar una curva por otra.

Construcción de un óvalo dados sus dos ejes.



- 1) Dibujar los ejes AB y CD dados.
- 2) Con centro en O y radio OA, trazar un arco que corte a la recta que contiene al eje menor en el punto X. Dibujar el segmento CA. Con centro en C y radio CX trazar un arco que corte a CA en el punto F.
- 3) Trazar la mediatriz m de AF la cual interseca a los ejes en los puntos O₁ y O₂. Simétrico respecto de O ubicar los puntos O₃ y O₄ respectivamente.
- 4) Trazar la semirrecta de origen en O₂ que pasa por el punto O₃ y las de origen en O₄ que pasan por O₁ y O₃, las cuales definen los puntos de empalme.
- 5) Con centros en O₂ y O₄ dibujar los arcos de circunferencia de radio O₂C o O₄D limitados por las semirrectas. Luego, con centro en O₁ y O₃ dibujar los arcos faltantes componentes del óvalo de radio O₁A o O₃B, los cuales empalmarán con los anteriores.

3.4. DEFINICIÓN DE LA PARÁBOLA.



La parábola es una curva plana, abierta, de una sola rama, simétrica respecto de un eje, llamado eje de la parábola, en el que se ubica el punto fijo F llamado foco. Cualquier punto P de la parábola cumple la siguiente condición: *“la distancia de dicho punto al foco es igual a la distancia del punto a una recta fija d llamada directriz de la parábola.”*

Es decir: $\overline{PF} = \overline{PR}$

La directriz es normal al eje de la parábola.

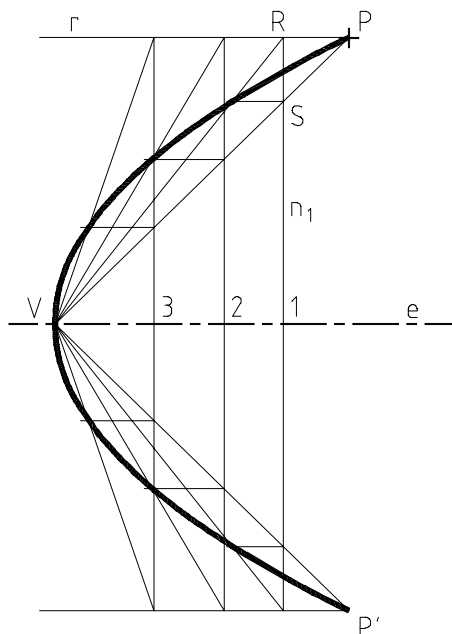
El segmento \overline{PF} recibe el nombre de radio vector de la parábola.

El punto V de intersección de la curva con el eje se denomina vértice, entonces verifica: $\overline{VO} = \overline{VF}$.

Se llama parámetro de la parábola a la medida del segmento \overline{OF}

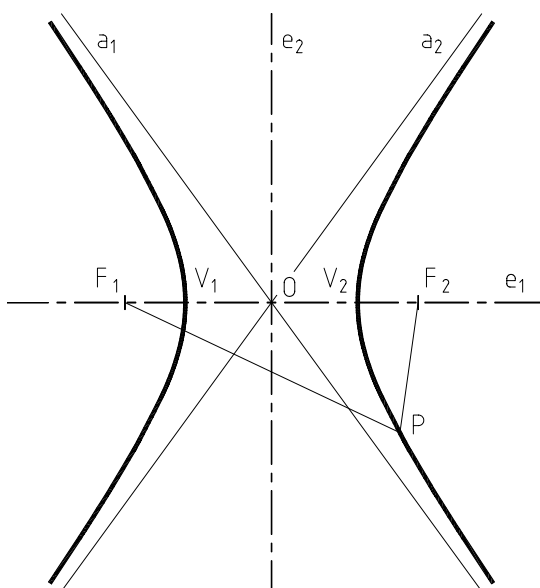
3.4.1. CONSTRUCCIÓN DE UNA PARÁBOLA POR EL MÉTODO DE LAS NORMALES AUXILIARES.

Dados el eje, el vértice y un punto de paso de la curva.



- 1) Trazar el eje e, ubicar el vértice V y el punto de paso P, dados.
- 2) Dibujar una recta r, paralela al eje e y que pase por el punto P. Trazar el segmento \overline{VP} .
- 3) Marcar sobre el eje puntos 1; 2; 3; arbitrariamente elegidos.
- 4) Por el punto 1 trazar la recta n_1 normal al eje, hasta intersectar a la recta r y al segmento \overline{VP} obteniendo los puntos R y S respectivamente.
- 5) Con un segmento de recta unir V y R. Por el punto S trazar una recta paralela al eje e, la cual interseca a \overline{RV} determinando un punto de la parábola.
- 6) Repetir el procedimiento con los puntos 2; 3; ... para determinar suficiente cantidad de puntos de la porción superior de la curva, los cuales deberán estar convenientemente distribuidos.
- 7) Ubicar P' simétrico de P respecto del eje e y reiterar el método explicado. Con el pistolete dibujar la parábola tratando de unir con este la mayor cantidad de puntos de la curva.

3.5. DEFINICIÓN DE LA HIPÉRBOLA.



La hipérbola es una curva plana y abierta, formada por dos ramas que tienen un par de ejes de simetría; e_1 llamado eje principal, que intersecta a la curva en los puntos V_1 y V_2 conocidos como vértices de la hipérbola, y el eje e_2 denominado no transversal, normal al anterior, ambos ejes se intersectan en el punto O, centro de la hipérbola.

Sobre el eje principal e_1 y simétrico del punto O, se encuentran el par de puntos fijos F_1 y F_2 llamados focos.

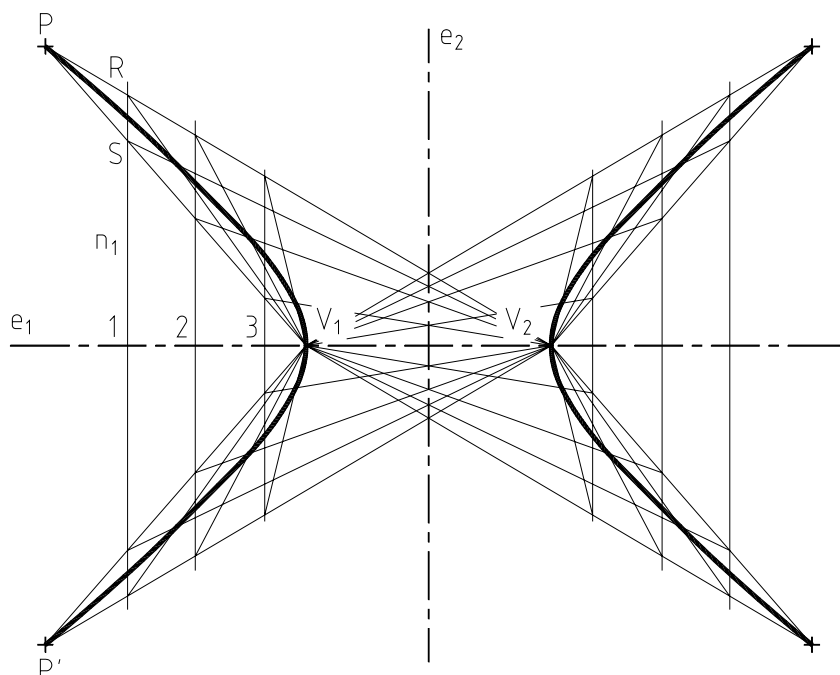
Cualquier punto P de la hipérbola verifica la siguiente condición: *“la diferencia de las distancias de dicho punto a los focos es constante e igual a la distancia entre vértices.”*

Es decir: $\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = \text{Cte.} = \overline{V_1V_2}$

La hipérbola admite un par de rectas a_1 y a_2 dispuestas simétrica y oblicuamente respecto al eje principal, a las cuales la curva se acerca hasta el infinito pero sin llegar a intersectar, las que se denominan asíntotas de la hipérbola.

3.5.1. CONSTRUCCIÓN DE UNA HIPÉRBOLA POR EL MÉTODO DE LAS NORMALES AUXILIARES.

Dados los vértices y un punto de paso de la curva.



- 1) Ubicar el punto de paso P y los vértices V_1 y V_2 dados.
- 2) Dibujar el eje principal e_1 de la hipérbola. Trazar las semirrectas con origen en V_1 y V_2 que pasan por P . Marcar sobre el eje e_1 puntos 1; 2; 3; arbitrariamente elegidos.
- 3) Por el punto 1 trazar la recta n_1 perpendicular al eje e_1 , hasta intersectar a la semirrecta $\overrightarrow{V_2P}$ en el punto R , y a la semirrecta $\overrightarrow{V_1P}$ en el punto S .
- 4) Mediante segmentos de rectas unir R con V_1 , y S con V_2 . Donde estos dos segmentos se cortan determinan un punto de la hipérbola.
- 5) Repetir el procedimiento con los puntos 2; 3; para ubicar un número suficiente de puntos de la curva.
- 6) Ubicar el punto P' simétrico de P respecto del eje e_1 , y reiterar el procedimiento anterior para completar el trazado de una de las ramas de la hipérbola. De igual manera deberá procederse para el trazado de la otra rama de la curva.