

## REVISIÓN DE ECUACIONES DE VELOCIDAD DE CAÍDA TERMINAL DE PARTÍCULAS DE SEDIMENTO

**Pedro A. Basile<sup>1,2</sup>, Gerardo Riccardi<sup>1,2,3</sup> e Ignacio Aguzzi<sup>1</sup>**

<sup>1</sup> Departamento de Hidráulica – Escuela de Ingeniería Civil (FCEIA – UNR)

<sup>2</sup> Centro Universitario Rosario de Investigaciones Hidroambientales (FCEIA – UNR)

<sup>3</sup> Consejo de Investigaciones de la Universidad Nacional de Rosario (CIUNR)

Riobamba 245 bis. (2000) Rosario. Argentina

E-Mail: [pbasile@fceia.unr.edu.ar](mailto:pbasile@fceia.unr.edu.ar)

### RESUMEN

La determinación de la velocidad de caída de una partícula de sedimento es importante en los estudios de transporte de sedimentos en suspensión y en los procesos asociados de erosión-sedimentación del lecho. Se presenta la revisión de siete ecuaciones para evaluar la velocidad de caída de sedimentos naturales. Para comparar la capacidad predictiva de las ecuaciones seleccionadas se recopilaron 53 datos experimentales, obtenidos por diversos autores a través de experimentos realizados con sedimentos naturales. Las ecuaciones que mejor reproducen los datos experimentales son las de Wu y Wang (2006) y Cheng (1997). En efecto, los resultados obtenidos con dichas ecuaciones son ampliamente satisfactorios, observándose para ambas ecuaciones, valores del error relativo promedio del orden del 6% para flujo alrededor de la partícula laminar y transicional, del 2% para turbulento y del 5% para el rango completo laminar-transicional-turbulento.

### ABSTRACT

The determination of the settling velocity of sediment particles is important in studies of suspended sediment transport and associated bed erosion-sedimentation processes. The review of seven equations to estimate the settling velocity of natural sediment particles is presented. To compare the predictive ability of the selected equations, 53 experimental data obtained by different authors through experiments with natural sediment were collected. The equations that best reproduce the experimental data are Wu and Wang (2006) and Cheng (1997). Indeed, the results obtained with these equations are highly satisfactory and for both equations, we observed average relative error of 6% for flow around the particle laminar and transitional, 2% for turbulent and 5% for the full range laminar- transitional-turbulent.

### INTRODUCCIÓN

La determinación de la velocidad de caída de una partícula de sedimento es importante en los estudios de transporte de sedimentos en suspensión y en la deposición de sedimentos (Van Rijn, 1984; Wu et al., 2003), en la evaluación del movimiento incipiente de sedimentos incoherentes (Yang, 1973; Simões, 2014) y en el diseño de reservorios de sedimentación en ambientes urbanos (Krishnappan y Marsalek, 2002).

La velocidad de caída terminal de una partícula individual depende, entre otros factores, del diámetro de la partícula, del factor de forma, de la densidad del sedimento, de la viscosidad del fluido, de la concentración de sedimentos en la corriente hídrica y de la turbulencia del flujo (McNown y Malaika, 1950; Albertson, 1952; Schultz et al., 1954; Richardson y Zaki, 1954; Van Rijn, 1984; Heiliger et al., 2013).

La presencia de una gran cantidad de partículas en la columna de agua disminuye la velocidad de caída de una partícula individual. La influencia de la concentración sobre la velocidad de caída fue analizada mediante experimentos sistemáticos realizados por Richardson y Zaki (1954) y se desarrollaron coeficientes de corrección para aplicarlos a la velocidad de caída de una partícula individual.

Por otra parte, las colisiones de las partículas de sedimento fino con características cohesivas (limos/arcillas) en suspensión conducen a la floculación, es decir, a la agregación de partículas que forman un floc. La floculación es función de la concentración del sedimento en suspensión, salinidad, contenido de material orgánico, actividad biológica, mineralogía de las partículas y de los procesos físicos tales como el movimiento Browniano, la sedimentación diferencial y la turbulencia. La floculación browniana debido a la difusión de partículas sólo es significativa para partículas menores de 1  $\mu\text{m}$  (0.001 mm). La sedimentación diferencial se produce cuando las partículas con diferentes velocidades de caída chocan entre sí. Las tensiones de corte locales en el seno del fluido propician los contactos de partículas por diferencias en la velocidad del fluido. Es necesario señalar que, estos sedimentos finos generalmente se transportan como carga de lavado sin interactuar mayormente con el lecho y pueden depositarse solamente en zonas donde la velocidad media de flujo es muy baja, menor que 0.15 m/s. El proceso de floculación no es importante para partículas mayores a las de limo grueso.

Existen básicamente dos tipos de métodos de predicción para la velocidad de caída, tanto de partículas esféricas como no esféricas. Uno se basa en la solución analítica de Stokes, la cual es aplicable sólo para partículas esféricas con número de Reynolds,  $Re = w_s d / \nu \leq 1$ , donde  $w_s$  es la velocidad de caída de la partícula;  $d$  el diámetro de la partícula y  $\nu$  la viscosidad cinemática. El otro incluye datos tabulados y diagramas con familias de curvas construidas con datos experimentales, como por ejemplo, Schiller y Naumann (1933) y US Inter-Agency Committee (1957). Estos últimos son adecuados para una amplia gama de números de Reynolds y factores de forma, pero presentan ciertas limitaciones para su uso en la práctica (Cheng, 1997). Por tal motivo, se han desarrollado diferentes ecuaciones para calcular explícitamente la velocidad de caída.

En el presente trabajo se realiza la evaluación de siete ecuaciones, utilizadas frecuentemente en estudios de hidráulica fluvial, para calcular la velocidad de caída de sedimentos naturales principalmente incoherentes. A tales efectos se recopilieron datos experimentales provenientes de diversos autores, los cuales sirvieron para comparar la capacidad predictiva de las diferentes ecuaciones seleccionadas.

## ECUACIONES PARA ESTIMAR VELOCIDAD DE CAÍDA DE SEDIMENTOS

### Ecuaciones para partículas perfectamente esféricas

La velocidad de caída terminal en agua quieta queda definida a través de la ecuación que equilibra la fuerza hacia abajo debido al peso sumergido de la partícula  $F_g$ , con la fuerza de resistencia  $F_D$ , opuesta a la anterior, las cuales se expresan como:

$$F_g = \frac{\pi d^3}{6} g(\rho_s - \rho) \quad , \quad F_D = C_D \frac{\pi d^2}{4} \rho \frac{w_s^2}{2} \quad (1a) \text{ y } (1b)$$

donde  $g$  es la aceleración de la gravedad,  $\rho_s$  es la densidad del sedimento,  $\rho$  es la densidad del agua,  $C_D$  es el coeficiente de resistencia. Igualando (1a) y (1b) y explicitando  $w_s$  se obtiene:

$$w_s = \left[ \frac{4(s-1)gd}{3 C_D} \right]^{1/2} \quad (2)$$

Donde  $s=\rho_s/\rho$  es la gravedad específica del sedimento. El coeficiente  $C_D$  depende del número de Reynolds asociado a la velocidad de caída,  $Re=w_s d/\nu$  y del factor de forma de Corey,  $SF=c/(ab)^{0.5}$ ; donde a, b y c son las dimensiones triaxiales, es decir, a (mayor), b (intermedia) y c (menor). Para una esfera perfecta  $SF=1$ , para arenas naturales  $SF\approx 0.7$ .

Las ecuaciones de Navier-Stokes pueden ser resueltas considerando flujo laminar alrededor de una esfera y despreciando los términos de inercia (bajos Re). La solución da la siguiente expresión para la fuerza de resistencia viscosa:

$$F = 3\pi d \mu w_s \quad (3)$$

donde  $\mu$  es la viscosidad dinámica. Igualando (1b) y (3) se obtiene:

$$C_D = \frac{24\nu}{w_s d} = \frac{24}{Re} \quad (4)$$

La expresión del coeficiente de resistencia dada por (4) es válida para flujo laminar ( $Re\leq 1$ ) de partículas esféricas con d aproximadamente menor que 100  $\mu\text{m}$  ( $d\leq 0.1$  mm). Reemplazando (4) en (2) se obtiene la ley de Stokes:

$$w_s = \frac{1}{18} \frac{(s-1)gd^2}{\nu} \quad (5)$$

Para flujo alrededor de la partícula de tipo turbulento, es decir, para valores del número de Reynolds alrededor de  $10^3\sim 10^5$ , el coeficiente de resistencia para partículas esféricas tiene un valor promedio igual aproximadamente a  $C_D=0.4$ .

Para la zona de transición (laminar-turbulento), y partículas esféricas, no se puede especificar una ecuación exacta para  $C_D$ , pero una buena aproximación es dada por Huisman (1973), la cual incluye parte de la región laminar y turbulenta ( $0.5 < Re < 10^4$ ):

$$C_D = \frac{24}{Re} + \frac{3}{\sqrt{Re}} + 0.34 \quad (7)$$

### Ecuaciones para partículas de sedimentos naturales

En el caso de partículas de sedimentos naturales, el coeficiente de resistencia para bajos valores de Re, es decir, flujo laminar entorno a la partícula ( $Re\leq 1$ ), adoptados por varios investigadores es igual a:  $C_D=32/Re$  (Sha, 1956, Raudkivi, 1990; Zhu y Cheng, 1993),  $C_D=34/Re$  (Zhang, 1989),  $C_D=24/Re$  (Van Rijn, 1984).

Para flujo turbulento completamente desarrollado,  $C_D$  varía entre 1 y 1.2, por ejemplo,  $C_D=1.2$  (Zhang, 1989; Raudkivi, 1990),  $C_D=1.1$  (Van Rijn, 1984) y  $C_D=1.025$  (Sha, 1956). Es decir, el

mismo es aproximadamente 2.5 a 3 veces superior al correspondiente a partículas perfectamente esféricas.

Para la zona de transición (laminar-turbulento), Zanke (1977) propuso la siguiente ecuación para estimar el coeficiente de resistencia  $C_D$  de sedimentos naturales:

$$C_D = \frac{4}{3} \left( \frac{20}{Re} + 1 \right) \quad (8)$$

Distintas ecuaciones han sido propuestas para estimar la velocidad de caída de partículas de sedimentos naturales. En el presente trabajo se seleccionaron siete ecuaciones, las cuales incluyen las tres condiciones de flujo entorno a la partícula de diámetro  $d$ , es decir, laminar, transicional y turbulento. Las ecuaciones seleccionadas son:

i) Sadat-Helbar et al. (2009):

$$w_s = \begin{cases} 0.033 \frac{v}{d} D_*^{2.899}, & D_* \leq 10 \\ 0.510 \frac{v}{d} D_*^{1.659}, & D_* > 10 \end{cases} \quad (9)$$

donde  $D_*$  es el diámetro adimensional, expresado mediante:

$$D_* = d \left[ \frac{(s-1)g}{v^2} \right]^{1/3} \quad (10)$$

ii) Wu y Wang (2006) desarrollaron una ecuación que incorpora explícitamente el efecto del factor de forma  $SF$ . La misma se expresa como:

$$w_s = \frac{M v}{N d} \left[ \sqrt{\frac{1}{4} + \left( \frac{4N}{3M^2} D_*^3 \right)^{1/n}} - \frac{1}{2} \right]^n \quad (11)$$

donde los coeficientes  $M$ ,  $N$  y  $n$  dependen del factor de forma  $SF$ :

$$M = 53.5 e^{-0.65 SF}, \quad N = 5.65 e^{-2.5 SF}, \quad n = 0.7 + 0.9 SF \quad (12a,b y c)$$

iii) Ferguson y Church (2004) propusieron la siguiente ecuación:

$$w_s = \frac{(s-1)g d^2}{C_1 v + \sqrt{0.75 C_2 (s-1)g d^3}} \quad (13)$$

donde los coeficientes  $C_1$  y  $C_2$ , adoptan los valores:  $C_1=18$  y  $C_2=1$ .

iv) Cheng (1997) propuso una fórmula, sencilla y práctica, la cual se expresa como:

$$w_s = \frac{v}{d} \left[ \left( 25 + 1.2 D_*^2 \right)^{1/2} - 5 \right]^{3/2} \quad (14)$$

v) Julien (1995) desarrolló una ecuación que se expresa mediante:

$$w_s = 8 \frac{v}{d} \left[ \left( 1 + 0.222 \frac{D_*^3}{16} \right)^{1/2} - 1 \right] \quad (15)$$

vi) Zhang (1989) propuso la siguiente ecuación:

$$w_s = \sqrt{\left( 13.95 \frac{v}{d} \right)^2 + 1.09 (s-1) g d} - 13.95 \frac{v}{d} \quad (16)$$

vii) Van Rijn (1984) estimó la velocidad de caída terminal utilizando la expresión de Stokes (laminar), la ecuación de Zanke (1977) (transicional) y adoptó  $C_D=1.1$  para condiciones de flujo turbulento alrededor de la partícula, de esta manera, la velocidad de caída se expresa como:

$$w_s = \begin{cases} \frac{1}{18} \frac{(s-1)gd^2}{\nu}, & d \leq 0.1 \text{ mm} \\ 10 \frac{v}{d} \left[ \left( 1 + 0.01 D_*^3 \right)^{1/2} - 1 \right], & 0.1 \text{ mm} < d \leq 1 \text{ mm} \\ 1.1 [(s-1)gd]^{1/2}, & d > 1 \text{ mm} \end{cases} \quad (17)$$

## IMPLEMENTACIÓN DE LAS ECUACIONES Y COMPARACIÓN CON DATOS EXPERIMENTALES

### Presentación de los datos experimentales utilizados

Para comparar la capacidad predictiva de las ecuaciones seleccionadas se recopilaron 53 datos experimentales, obtenidos por diversos autores a través de experimentos con sedimentos naturales. Los datos utilizados se corresponden con los obtenidos por Sarkisyan (1958), Arkhangel'skii (1935) y Zegzhda (1934), los cuales son reportados por Cheng (1997) y con los datos de Raudkivi (1990). En la Tabla 1 se muestran los rangos de variación que presentan las principales variables, para el conjunto de datos utilizados en el presente estudio.

**Tabla 1.-** Resumen de datos utilizados.

$N_e$	$d$ (mm)	$T$ (°C)	$\rho_s$ (kg/m <sup>3</sup> )	$w_s$ obs. (cm/s)
15	$0.001 \leq d \leq 0.1$	15. - 20	2651 - 2655	0.000057 - 0.663
24	$0.1 < d \leq 1$	8.2 - 20	2651 - 2655	0.775 - 12.17
14	$1 < d \leq 10$	10. - 20	2651 - 2655	15 - 44.54
53	$0.001 \leq d \leq 10$	8.2 - 20	2651 - 2655	0.000057 - 44.54

### Procedimiento de cálculo y criterio de comparación

Para implementar las ecuaciones, la densidad del agua,  $\rho$  en ( $\text{kg}/\text{m}^3$ ) y la viscosidad cinemática  $\nu$  en ( $\text{m}^2/\text{s}$ ), ambas función de la temperatura  $T$  en ( $^{\circ}\text{C}$ ), se estimaron respectivamente con las siguientes ecuaciones (Basile, 2007):

$$\rho = (1.549 \times 10^{-5})T^3 - (6.154 \times 10^{-3})T^2 + (3.068 \times 10^{-2})T + 999.917 \quad (18)$$

$$\nu = \left\{ -(1.057 \times 10^{-5})T^3 + (1.164 \times 10^{-3})T^2 - (5.816 \times 10^{-2})T + 1.787 \right\} \times 10^{-6} \quad (19)$$

Se valoraron los parámetros y coeficientes intervinientes en las diferentes ecuaciones y se calcularon las velocidades de caída. El factor de forma SF, que interviene en la ecuación de Wu y Wang (2006), se adoptó igual a 0.67. El valor de dicho factor es menor que uno para sedimentos naturales y, en particular, para arenas el mismo es aproximadamente igual a 0.7.

Sucesivamente, para cada experimento se determinó la relación entre la velocidad calculada y la observada, para el  $k$ -ésimo experimento tenemos:

$$r_k = \frac{w_s(\text{calculada})}{w_s(\text{observada})} \Big|_k \quad (20)$$

y posteriormente se calcularon los errores relativos promedio (ERP) para los tres rangos de diámetros, de acuerdo a la división entre el flujo de tipo laminar, transicional o turbulento alrededor de la partícula de sedimento y, además, considerando el rango completo de variación de  $d$ . Para un número  $N_e$  de experimentos tenemos:

$$ERP = \left( \frac{1}{N_e} \right) \sum_{k=1}^{N_e} |r_k - 1| \quad (21)$$

Asimismo, para efectuar la comparación de las distintas ecuaciones, se consideró también el desvío de  $r_k$  del valor óptimo  $r_k=1$  (ajuste perfecto). El valor del desvío medio, para un número de datos experimentales igual a  $N_e$ , es definido como la media geométrica de los valores  $r_k$ :

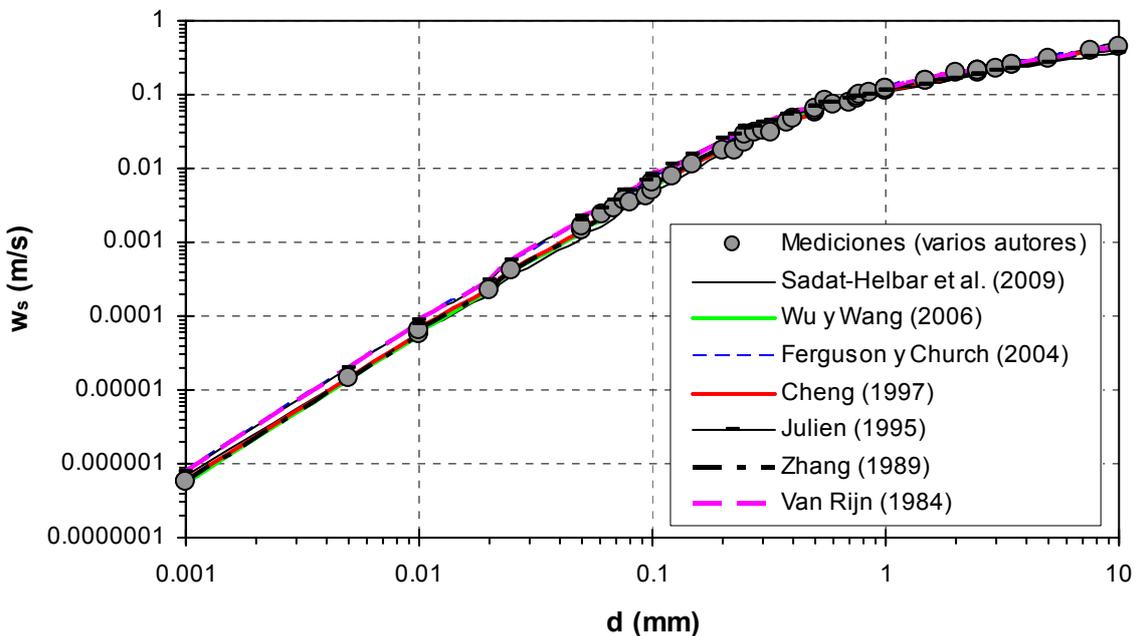
$$R_m = \left[ \prod_{k=1}^{N_e} r_{*k} \right]^{1/N_e} \quad (22)$$

donde  $r_{*k}=r_k$  si  $r_k>1$  y  $r_{*k}=1/r_k$  si  $r_k<1$ , esto evita la compensación mutua entre el producto de valores mayores y menores que 1. El desvío geométrico medio  $R_m$  establece que, para todos los valores de velocidad de caída observados en un número de experimentos  $N_e$ , la velocidad de caída calculada difiere, en términos medios, en un valor comprendido entre  $R_m$  y  $1/R_m$ .

### EVALUACIÓN DE RESULTADOS

Los resultados de la implementación de las ecuaciones se muestran en la Figura 1, donde se presentan las velocidades observadas y las calculadas con cada ecuación en función del

diámetro del sedimento. Asimismo, en la Figura 2 se presentan las velocidades de caída calculadas y las observadas, conjuntamente con la línea de ajuste perfecto. Mientras que, en la Figura 3 se presenta, para cada ecuación, los valores de  $r_k$ , para el rango completo de diámetros.

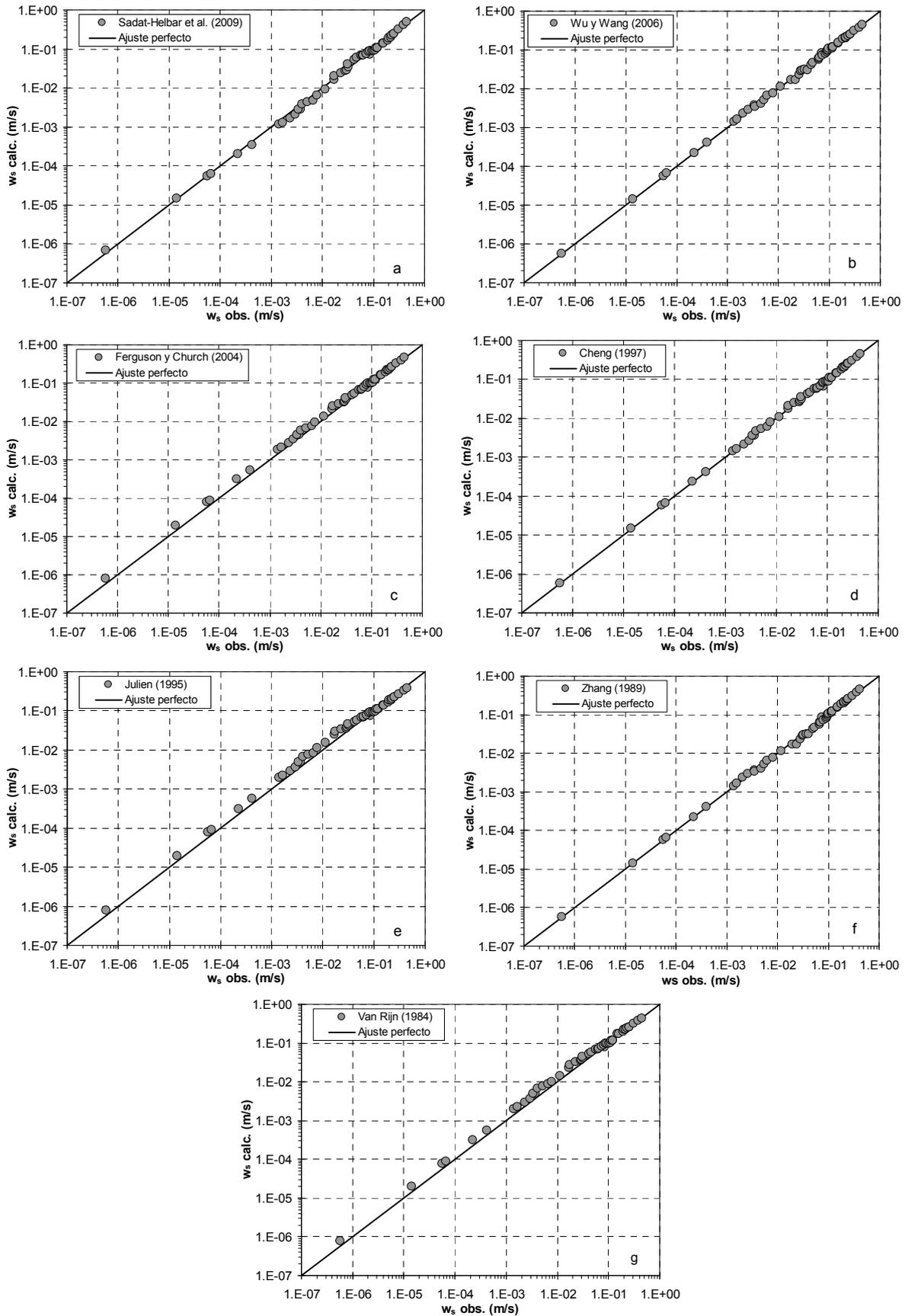


**Figura 1.-** Velocidades de caída observadas y calculadas con las diferentes ecuaciones en función del diámetro  $d$ .

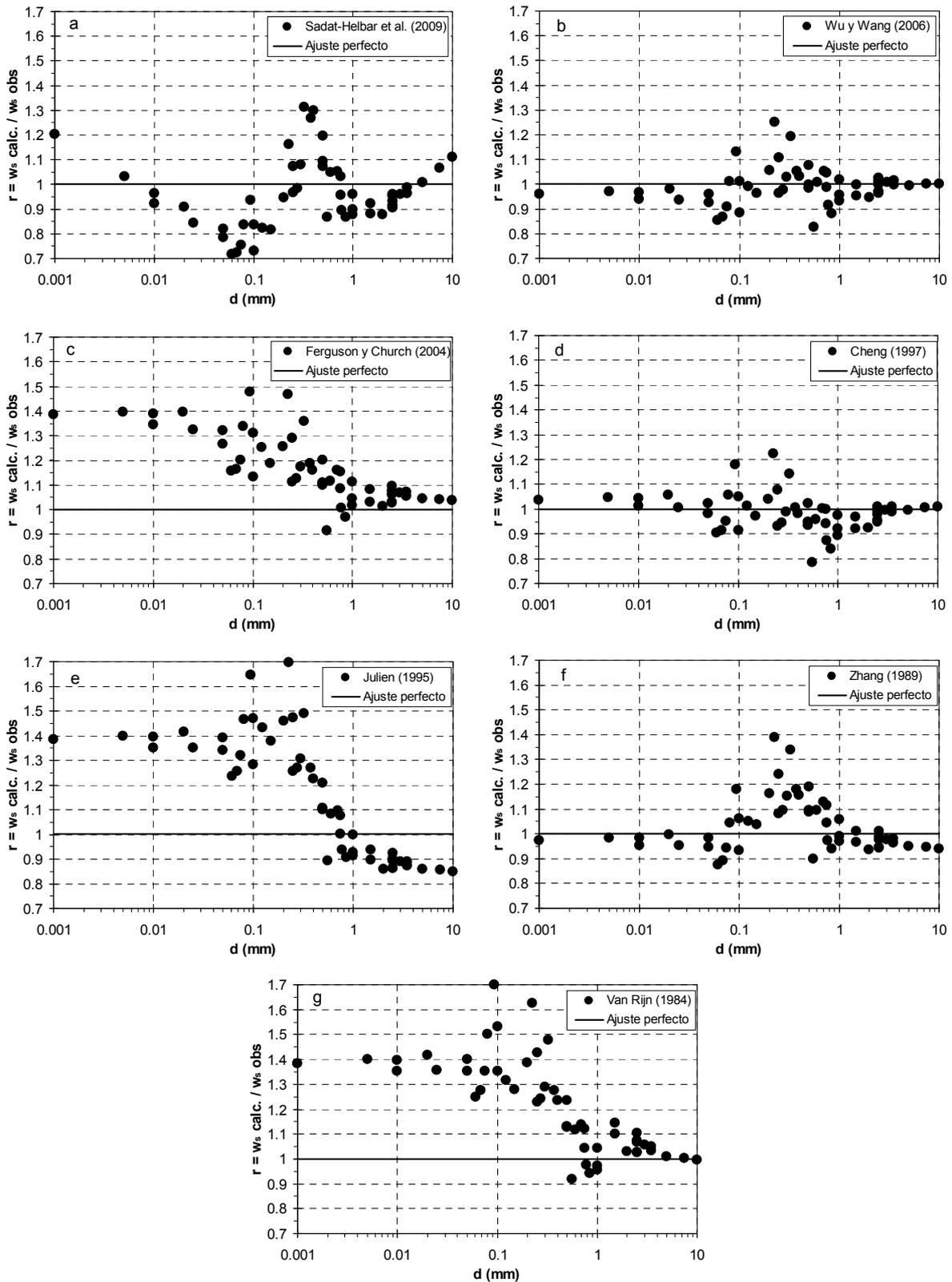
En la Tabla 2 se presenta la distribución del número de valores de  $r_k$  en intervalos de clase (frecuencia absoluta), el desvío geométrico medio  $R_m$ , el porcentaje de valores de  $r_k$  (frecuencia relativa) para el intervalo de clase central  $0.9 \leq r_k \leq 1.1$  y el error relativo promedio, considerando la distinta segmentación de diámetros de acuerdo al flujo laminar, transicional y turbulento entorno a la partícula y para el rango completo ( $0.001 \leq d \leq 10$  mm), para cada ecuación.

La ecuación de Stokes, adoptada por Van Rijn (1984) para  $d \leq 0.1$  mm, sobrestima sistemáticamente la velocidad de caída para ese rango de partículas. En efecto, en la Figura 2 se observa que en ese rango (velocidades menores que aproximadamente  $7 \times 10^{-3}$  m/s)  $w_{s \text{ calc.}} > w_{s \text{ obs.}}$  y, además, en la Figura 3 y en la Tabla 2 se observa que  $r_k > 1.3$  para la mayoría de los valores de ese rango, el valor del desvío geométrico medio es  $R_m = 1.398$  y no se observa ningún valor de  $r_k$  en el intervalo 0.9–1.1. El error relativo promedio es 40.2 %. Este comportamiento es debido sustancialmente a que la ecuación de Stokes es para partículas esféricas, las cuales poseen un coeficiente de resistencia menor que el correspondiente a los sedimentos naturales, que han sido utilizados en los experimentos. Efectivamente, para dicha ecuación el coeficiente de resistencia es dado por la expresión  $C_D = 24/Re$ , mientras que, para sedimentos naturales los diversos autores reportan coeficientes de resistencia entre 1.3 y 1.4 veces mayores que éste último, es decir,  $C_D = 32/Re$  a  $34/Re$ .

El mismo comportamiento descrito anteriormente, para ese rango de partículas, se observa en las Figuras 2 y 3 para las ecuaciones de Ferguson y Church (2004) y Julien (1995). En la Tabla 2, dichas ecuaciones presentan valores del desvío geométrico medio  $R_m$  iguales a 1.303 y 1.378 respectivamente.



**Figura 2.-** Comparación entre  $w_s$  calculadas y observadas para cada ecuación: a) Sadat-Helbar et al. (2009), b) Wu y Wang (2006), c) Ferguson y Church (2004), d) Cheng (1997), e) Julien (1995), f) Zhang (1989) y g) Van Rijn (1984).



**Figura 3.-** Valores de  $r$  en función de  $d$  para cada una de las ecuaciones: a) Sadat-Helbar et al. (2009), b) Ferguson y Church (2004), c) Cheng (1997), d) Julien (1995), e) Zhang (1989) y d) Van Rijn (1984).

Las ecuaciones de Ferguson y Church (2004), Julien (1995) y la de Zanke (1997), adoptada por Van Rijn (1984), muestran también un comportamiento similar en el rango transicional ( $0.1 \text{ mm} < d \leq 1 \text{ mm}$ ), observándose en las tres una mayor tendencia a sobrestimar (mayoría de valores  $r_k > 1$ ), con valores de  $R_m$  iguales a 1.154, 1.212 y 1.198 respectivamente, asociados a errores relativos promedios de 15.8 %, 22.3 % y 20.7 % respectivamente (ver Tabla 2 y Figura 3). La ecuación de Sadat-Helbar et al. (2009) muestra un comportamiento más errático que las restantes, con una tendencia a subestimar, aunque no sistemáticamente.

**Tabla 2.-** Distribución del número de valores de  $r_k$  en intervalos de clase, valor de  $R_m$ , porcentaje de valores de  $r_k$  para  $0.9 \leq r_k \leq 1.1$  y ERP, considerando cada rango de diámetros y el rango completo, para cada ecuación.

Ec. y rango de d d (mm)	N <sub>e</sub>	Distribución de valores de $r_k$ (frecuencia absoluta)							R <sub>m</sub> (-)	% $r_k$ 0.9 - 1.1	ERP (%)
		0.7- 0.8	0.8- 0.9	0.9 - 1	1 - 1.1	1.1 - 1.2	1.2. - 1.3	> 1.3			
<b>Sadat-Helbar et al.</b>											
0.001 ≤ d ≤ 0.1	15	5	4	4	1			1	1.199	33	16.4
0.1 < d ≤ 1	24		7	5	7	2		2	1.122	50	11.8
1 < d ≤ 10	14		2	9	2	1			1.070	79	6.6
0.001 ≤ d ≤ 10	53	5	13	18	10	3		3	1.129	53	11.7
<b>Wu y Wang</b>											
0.001 ≤ d ≤ 0.1	15		3	9	2	1			1.071	73	6.6
0.1 < d ≤ 1	24		2	10	9	2		1	1.065	79	6.4
1 < d ≤ 10	14			8	6				1.018	100	1.7
0.001 ≤ d ≤ 10	53		5	27	17	3		1	1.054	83	5.2
<b>Ferguson y Church</b>											
0.001 ≤ d ≤ 0.1	15					3		2	1.303	0	30.7
0.1 < d ≤ 1	24			2	5	12		3	1.154	29	15.8
1 < d ≤ 10	14				14			2	1.053	100	5.3
0.001 ≤ d ≤ 10	53			2	19	15		5	1.166	45	17.2
<b>Cheng</b>											
0.001 ≤ d ≤ 0.1	15			5	9	1			1.057	93	5.6
0.1 < d ≤ 1	24	1	3	12	6	1		1	1.072	75	6.8
1 < d ≤ 10	14			10	4				1.026	100	2.5
0.001 ≤ d ≤ 10	53	1	3	27	19	2		1	1.056	87	5.3
<b>Julien</b>											
0.001 ≤ d ≤ 0.1	15							3	1.378	0	38.1
0.1 < d ≤ 1	24		1	5	5	1		5	1.212	42	22.3
1 < d ≤ 10	14		11	3					1.134	21	11.8
0.001 ≤ d ≤ 10	53		12	8	5	1		8	1.235	25	24.0
<b>Zhang</b>											
0.001 ≤ d ≤ 0.1	15		2	10	2	1			1.060	80	5.8
0.1 < d ≤ 1	24			5	9	7		1	1.119	58	12.2
1 < d ≤ 10	14			12	2				1.038	100	3.6
0.001 ≤ d ≤ 10	53		2	27	13	8		1	1.080	75	8.1
<b>Van Rijn</b>											
0.001 ≤ d ≤ 0.1	15							2	1.398	0	40.2
0.1 < d ≤ 1	24			5	2	5		7	1.198	29	20.7
1 < d ≤ 10	14			1	11	2			1.054	86	5.2
0.001 ≤ d ≤ 10	53			6	13	7		9	1.209	36	22.1

Por otra parte, la ecuación de Julien (1995) tiende a subestimar sistemáticamente ( $r_k < 1$ ) para condiciones de flujo turbulento entorno a la partícula ( $1 \text{ mm} < d \leq 10 \text{ mm}$ ) y, comparada con las demás ecuaciones, es la que presenta el mayor valor de  $R_m$  (1.134) y consecuentemente, el mayor error relativo promedio (11.8%), con solo 21% de valores de  $r_k$  en el rango 0.9-1.1 y todos menores que 1. Además, para dicha condición de flujo, las ecuaciones de Ferguson y

Church (2004) y Van Rijn (1984) reproducen aceptablemente los valores medidos, presentando valores similares de  $R_m$ , (1.053 y 1.054 respectivamente) y errores relativos promedio del orden del 5 %. Mientras que, la ecuación de Sadat Helbar et al. (2009) presenta valores de  $R_m=1.070$  y  $ERP=6.6\%$  (ver Tabla 2).

Las ecuaciones que mejor reproducen los datos experimentales son las de Wu y Wang (2006) y Cheng (1997), seguidas por la ecuación de Zhang (1989). En efecto, tal como se observa en la Tabla 2, en comparación con las restantes fórmulas, dichas ecuaciones muestran los valores más bajos de  $R_m$  y ERP para los tres rangos de diámetros (condiciones de flujo entorno a la partícula, laminar, transicional y turbulento) y obviamente también para el rango completo. En particular, las ecuaciones de Wu y Wang (2006), Cheng (1997) y Zhang (1989) presentan valores de  $R_m$ , para el rango completo ( $0.001 \leq d \leq 10$ ), iguales a 1.054, 1.056 y 1.080 respectivamente. Las dos primeras ecuaciones estiman en modo muy similar, presentando valores del error relativo promedio para laminar y transicional del orden del 6%, para turbulento del 2% y para el rango completo del 5%.

Es dable destacar que, para estas tres ecuaciones, el 100% de los valores de  $r_k$  están dentro del intervalo 0.9-1.1 para condiciones de flujo turbulento. La ecuación de Wu y Wang (2006) es la que presenta los valores más bajos de  $R_m=1.018$  y  $ERP=1.7\%$  para tal condición de flujo. Por otra parte, la ecuación de Cheng (1997) presenta los valores más bajos de  $R_m=1.057$  y  $ERP=5.6\%$  para flujo laminar entorno a la partícula, con el 93% de los valores de  $r_k$  dentro del intervalo 0.9-1.1. Es necesario señalar que, ésta última ecuación también reproduce satisfactoriamente los datos experimentales tabulados del US Inter-Agency Committee (1957) (Cheng, 1997).

## CONCLUSIONES

Se realizó la revisión de siete ecuaciones utilizadas para evaluar la velocidad de caída de sedimentos naturales. Las ecuaciones seleccionadas fueron implementadas y los resultados se compararon con datos experimentales.

Las ecuaciones que mejor reproducen los datos observados en los experimentos; para condiciones de flujo entorno a la partícula laminar, transicional y turbulento; son las de Wu y Wang (2006) y Cheng (1997), seguidas por la ecuación de Zhang (1989).

Para condiciones de flujo laminar y transicional, las ecuaciones de Van Rijn (1984), Ferguson y Church (2004) y Julien (1995) muestran un comportamiento similar, con tendencia a sobrestimar.

Para condiciones de flujo turbulento entorno a la partícula, las ecuaciones de Ferguson y Church (2004) y Van Rijn (1984) reproducen aceptablemente los valores observados, mientras que, la ecuación de Julien (1995) tiende a subestimar sistemáticamente.

La ecuación de Sadat-Helbar et al. (2009) muestra un comportamiento más errático que las restantes, con una tendencia a subestimar para el rango completo, aunque no sistemáticamente.

**Agradecimiento.** Los autores desean expresar su agradecimiento a la Universidad Nacional de Rosario (UNR) por el apoyo brindado en el marco de los PID 19-I368 y 19-I358.

## LISTA DE SÍMBOLOS

a:	longitud mayor, dimensión triaxial de la partícula de sedimento
b:	longitud intermedia, dimensión triaxial de la partícula de sedimento
c:	longitud menor, dimensión triaxial de la partícula de sedimento
$C_D$ :	coeficiente de resistencia de la partícula
$D^*$ :	diámetro adimensional de la partícula
d:	diámetro de la partícula
ERP:	error relativo promedio entre velocidades de caída calculadas y observadas
$F_D$ :	fuerza de resistencia hidrodinámica
$F_g$ :	fuerza hacia abajo debido al peso sumergido de la partícula
g:	aceleración de la gravedad
M:	coeficiente que depende de SF en la ecuación de Wu y Wang (2006)
N:	coeficiente que depende de SF en la ecuación de Wu y Wang (2006)
n:	coeficiente que depende de SF en la ecuación de Wu y Wang (2006)
$N_e$ :	número de experimentos
Re:	número de Reynolds asociado a la velocidad de caída de la partícula de diámetro d
$r_k$ :	relación entre velocidad de caída calculada y observada en el k-ésimo experimento
$R_m$ :	desvío geométrico medio entre velocidades de caída calculadas y observadas
s:	gravedad específica del sedimento ( $s=\rho_s/\rho$ )
SF:	factor de forma de la partícula de sedimento
T:	temperatura del agua
$w_s$ :	velocidad de caída de la partícula de sedimento
$\mu$ :	viscosidad dinámica
v:	viscosidad cinemática
$\rho$ :	densidad del agua
$\rho_s$ :	densidad del sedimento

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Albertson, M.L.** (1952). "Effect of shape on the fall velocity of gravel particles". *Proc. 5th Hydraulic Conference*, Iowa, EE.UU.
- Basile, P.A.** (2007). *Mecánica de los Fluidos Avanzada*. Departamento de Hidráulica y CURIHAM, FCEIA, Universidad Nacional de Rosario, Argentina.
- Cheng, N.S.** (1997). "Simplified settling velocity formula for sediment particle". *Journal of Hydraulic Engineering*, 123 (2), 149-152.
- Ferguson, R.I. y Church, M.** (2004). "A simple universal equation for grain settling velocity". *Journal of Sedimentary Geology*, 74, 933-937.
- Heiliger, C.; Kaye, N.B. y Testik, F.Y.** (2013). "A computational study of the role of particle size standard deviation on the collision frequency in differential settling". *International Journal of Sediment Research*, 28 (1), 34-45.

- Huisman, L.** (1973). *Sedimentation and Flotation*. Department of Civil Engineering, Delft University of Technology, Delft.
- Julien, Y.P.** (1995). *Erosion and Sedimentation*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Krishnappan, B.G. y Marsalek J.** (2002). "Transport characteristics of fine sediments from an on-stream stormwater detention pond". *Urban Water*, 4(1), 3–11.
- McNown, J.S. y Malaika, J.** (1950). "Effects of particle shape on settling velocity at low Reynolds number". *Transactions American Geophysical Union (AGU)*, Vol. 31.
- Raudkivi, A.J.** (1990). *Loose boundary hydraulics*, 3rd Ed., Pergamon Press, Inc., Tarrytown, N.Y., U.S.A.
- Richardson, J.F. y Zaki, W.** (1954). "Sedimentation and Fluidisation". *Trans. Inst. Chem. Engineering*, 32, 35-53.
- Sadat-Helbar, S.M.; Amiri-Tokaldany, E.; Darby, S. y Shafaie, A.** (2009). "Fall velocity of sediment particles". *Proc. Int. Conference on Water Resources, Hydraulics & Hydrology*, 39-45.
- Schiller, L. y Naumann, A.** (1933). "Über die grundlegenden Berechnungen bei der Schwefkraftaubereitung." *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure*, 77(12), 318-320.
- Schultz, E.F.; Wilde, R.H. y Albertson, M.L.** (1954). *Influence of shape on the fall velocity of sedimentary particles*. MRD Series N° 3, Colorado State University.
- Sha, Y.Q.** (1956). "Basic principles of sediment transport." *Journal of Sediment Res.*, Beijing, China, 1(2), 1-54.
- Simões, F.J.M.** (2014). "Shear velocity criterion for incipient motion of sediment". *Water Science and Engineering*, 7 (2), 183-193.
- U.S. Inter-Agency Committee** (1957). *Some fundamentals of particle size analysis. A study of methods used in measurement and analysis of sediment loads in streams*. Rep. No. 12, Subcommittee on Sedimentation, U.S. Inter-Agency Committee on Water Resources. St. Anthony Falls Hydr. Lab., Minneapolis.
- Van Rijn, L.C.** (1984). "Sediment Transport, Part II: Suspended Load Transport". *Journal of Hydraulic Engineering*, 110 (11), 1613-1641.
- Wu, B.; Molinas, A. y Shu, A.** (2003). "Fractional transport of sediment mixtures". *International Journal of Sediment Research*, 18(3), 232-247.
- Wu, W. y Wang, Sam S.Y.** (2006). "Formulas for sediment porosity and settling velocity". *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, 132 (8), 858-862.

**Yang, C.T.** (1973). "Incipient Motion and Sediment Transport". *Journal of the Hydraulics Division*, ASCE, 99 (HY10), 1679-1704.

**Zanke, U.** (1977). *Berechnung der Sinkgeschwindigkeiten von Sedimenten*. Mitt. Des Franzius-Instituts für Wasserbau, Technical Univ., Hannover, Alemania.

**Zhang, R.J.** (1989). *Sediment dynamics in rivers*. Water Resources Press. Beijing. China.

**Zhu, L.J. y Cheng, N.S.** (1993). *Settlement of sediment particles*. Research Report. Department of River and Harbor Engrg., Nanjing Hydr. Res. Inst., Nanjing, China.