

APROXIMACIÓN ESTADÍSTICA PARA ESTIMAR LAMINAS DE LLUVIA APLICADA A BALANCES HIDRICOS MENSUALES SERIADOS.

Erik Zimmermann

CURIHAM. Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura. UNR.
Riobamba 245 bis (2000) Rosario. Telefax: 0341-4808541, erikz@fceia.unr.edu.ar

RESUMEN

El balance hídrico mensual de Thornthwaite y Mather combinado con el método del US-SCS constituye una herramienta sencilla para estimar la infiltración neta, la cual es asimilable a la recarga del acuífero freático. Para aplicar el procedimiento conjunto en forma seriada se conoce una metodología basada en el teorema de Bayes para estimar el número de ocurrencias de lluvia condicionando el pronóstico a la lámina mensual. Conjuntamente se propone en este trabajo una distribución probabilística pseudo-exponencial que permite generar láminas de lluvia conociendo la lámina acumulada mensual. La metodología propuesta fue aplicada en cuatro estaciones de la región meridional de Santa Fe obteniéndose resultados muy satisfactorios al compararse más de 7600 pronósticos de láminas de lluvia con los registros observados. Además, se compararon láminas de escurrimiento estimadas mediante el método del US-SCS utilizando las precipitaciones observadas y las pronosticadas con los algoritmos con muy buenos resultados. Puede afirmarse que las metodologías propuestas permiten la correcta aplicación del balance de Thornthwaite y Mather junto con el método del US-SCS y un buen pronóstico de escurrimientos mensuales y de la infiltración neta. La propuesta es extensible a balances medios anuales.

Palabras Claves: Balances Hídricos Mensuales, Aproximación estadística, Infiltración neta.

ABSTRACT

The Thornthwaite and Mather water budget combined with US-SCS method, is a simple tool to estimate the net infiltration, which is assigned to the aquifer recharge. In order to apply the combined procedures in a long time, a Bayesian approach to estimate the number of rain events was produced conditioning the forecast to the monthly rainfall. In addition to that, a pseudo-exponential distribution was done to generate rainfall depth knowing the monthly rainfall. The proposed methodology was applied in four stations of the southern region of Santa Fe province (Argentina). More than 7600 forecast of rainfall depth were compared with the observed records and the results were very satisfactory. Also, runoff estimated by means of the US-SCS method using the observed rainfall and using rainfalls predicted with the algorithms were compared. Results were satisfactory. The proposed methodologies allow the correct application of the balance of Thornthwaite and Mather together with the US-SCS method and a good forecast of monthly runoff and net infiltration. The proposal is expandable to annual average balances.

Key Words: Water Balance, Statistical Approach, Net Infiltration.

INTRODUCCIÓN

En la mayoría de las situaciones, la información disponible para estimar valores de recarga en acuíferos freáticos es escasa, lo cual impide la aplicación de métodos directos de evaluación (ej. análisis de fluctuaciones de niveles freáticos, balances hídricos localizados, técnicas isotópicas, etc.). Es aquí donde cobran relevancia las metodologías sencillas que insumen información frecuentemente disponible. El método de balance hídrico de Thornthwaite, que requiere datos de temperaturas y precipitaciones medias mensuales, es un ejemplo de ello. El método puede utilizarse para estimar la infiltración neta, la cual se corresponde aproximadamente con el total de la recarga subterránea. La metodología de Thornthwaite y Mather (1957) contempla la estimación de la evapotranspiración mensual y el escurrimiento superficial mensual puede estimarse aplicando el método de la curva número del Servicio de Conservación de Suelos (USDA-SCS, 1986). Existen antecedentes previos de aplicación conjunta de ambos métodos, dando lugar al balance modificado de Thornthwaite-Mather (Scozzafava y Tallini, 2001; Paris et al., 2002).

Cuando el balance hídrico mensual de Thornthwaite se aplica en forma de balances seriados, y considerando que la metodología de la curva número se aplica a eventos aislados y no a láminas de lluvia mensual, se requiere de la siguiente información: (a) el número de eventos lluviosos ocurridos en cada mes y (b) la lámina precipitada en cada uno de ellos.

Zimmermann (2003) presenta una metodología basada en el teorema de Bayes para estimar el número de ocurrencias de eventos lluviosos condicionado a la lámina de lluvia mensual. Aquí se presenta, en forma complementaria, una metodología con base estadística para estimar láminas precipitadas en cada evento, teniendo presente el número de ocurrencias de lluvia en el mes considerado y la lámina acumulada mensual.

BALANCE HÍDRICO MENSUAL SERIADO PARA ESTIMAR LA INFILTRACION NETA

Scozzafava y Tallini (2001) propusieron un cambio al método de Thornthwaite y Mather para determinar la contribución exclusiva de la infiltración neta, resultado que no puede lograrse con el método estándar. Allí, el sobrante de agua se refiere a todo el exceso de agua que no tiene por destino la humedad del suelo, sin distinguir la infiltración neta del escurrimiento superficial. Para diferenciar las dos contribuciones, los autores, propusieron estimar el escurrimiento mensual (Q) con el método de SCS-CN. El valor de Q así estimado se sustrae a la lluvia total (P) y el balance de agua se computa en base a un valor de lluvia ficticia (PF) que es igual a $P - Q$. La PF es la cantidad de agua disponible para la infiltración neta y para la evapotranspiración real. De esta manera, las ecuaciones originales del balance y el cálculo de los excedentes son válidos para estimar la infiltración neta, cuando Q ya se ha sustraído. El planteo del balance analizado por los autores corresponde a condiciones medias para una serie de años.

El método del SCS-CN emplea un parámetro entero (CN) cuya variación tiene en cuenta varios factores, incluyendo el tipo de suelo (espesor, textura, estructura, etc.), uso de la tierra, condición de humedad antecedente y pendiente. En el método se propone una fórmula de base empírica asociada al CN y contrastada con mediciones en parcelas experimentales, que permite cuantificar la máxima capacidad de almacenamiento instantáneo de humedad (S) que tiene el complejo suelo-vegetación durante un evento de precipitación dado. El escurrimiento (Q_n) para el evento considerado se calcula mediante expresiones empíricas que relacionan la capacidad S y la precipitación acumulada durante el mismo (P_n).

Dado que el procedimiento de Thornthwaite utiliza como datos disponibles valores mensuales, para estimar el escurrimiento mensual Q ($Q = \sum Q_n$) es necesario conocer el número de días lluviosos por mes y la lámina de lluvia por cada evento.

APROXIMACIÓN BAYESIANA PARA LA ESTIMACION DEL NUMERO MENSUAL DE OCURRENCIAS DE EVENTOS LLUVIOSOS.

Se supone que se cuenta con valores de precipitación mensual, P , y un número al azar de eventos de lluvia N , en el mes considerado. También se suponen conocidas la probabilidad *a priori* del número de eventos para el mes dado $f(N)$. Al respecto, se podría adoptar una función de distribución de probabilidad para N , ajustada para cada mes de año. Se considera que el pronóstico mejoraría si se utiliza la precipitación mensual P como información adicional para estimar N .

Suponemos conocida la densidad de probabilidad condicional $f(P|N)$ correspondiente al monto de lluvia mensual asociado al número de eventos N . Entonces, según el teorema de Bayes puede determinarse la probabilidad *a posteriori*, $f(N|P)$, de la siguiente manera:

$$f(N | P) = \frac{f(P | N)f(N)}{f(P)} \quad (1)$$

siendo $f(P)$ la probabilidad que la precipitación del mes dado sea P . Según el teorema de probabilidades totales, se tiene que:

$$f(P) = \sum_{j=1}^{N_{\max}} f(P | N_j)f(N_j) \quad (2)$$

donde N_{\max} es un número del máximo de eventos posible durante un mes que se analiza.

Proponiendo una función de distribución de eventos de lluvia del tipo Poisson (Todorovic 1967) con parámetro λ_1 , dado por el número medio de eventos, la función de la distribución de N puede escribirse de la siguiente manera:

$$f(N) = \frac{\lambda_1^N e^{-\lambda_1}}{N!} \quad (3)$$

Todorovic (1967, citado por Antigüedad et al., 1995) propuso una función de distribución acumulada para la precipitación total, P , producida por N tormentas mediante una distribución del tipo Gamma, de la cual puede extractarse por derivación la función de densidad de probabilidad $f(P|N)$, según la siguiente formulación:

$$f(P | N) = \frac{\lambda_2^N e^{-\lambda_2 P} P^{N-1}}{(N-1)!} \quad (4)$$

El significado físico de λ_2 es la inversa de la lámina media de la precipitación producida por una sola tormenta. La misma puede estimarse como:

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_1}{P_m} \quad (5)$$

donde P_m es la lámina media mensual.

Combinando las ecuaciones (1), (2), (3), y (4) la función de distribución de la probabilidad *a posteriori* puede determinarse mediante (Zimmermann, 2003):

$$f(N | P) = \frac{\frac{\lambda_2^N e^{-\lambda_2 P} P^{N-1}}{(N-1)!} \frac{\lambda_1^N e^{-\lambda_1}}{N!}}{\sum_{j=1}^{N_{\max}} \frac{\lambda_2^{N_j} e^{-\lambda_2 P} P^{N_j-1}}{(N_j-1)!} \frac{\lambda_1^{N_j} e^{-\lambda_1}}{N_j!}} \quad (6)$$

siendo N_{\max} un número arbitrario que representa la máxima cantidad de días de lluvia posible.

De manera tal que dada una serie de precipitaciones mensuales P , los valores medios mensuales de la precipitación (P_m) y el número medio de ocurrencias de eventos de lluvia en cada mes (N_m), estimados los parámetros $\lambda_1 = N_m$ y λ_2 según (5) es posible seleccionar un número de ocurrencias más probable para cada mes aplicando (6) para el entorno $N = 1..N_{\max}$

APROXIMACIÓN ESTADÍSTICA PARA ESTIMAR LAMINAS DE LLUVIA.

Estimado el número de ocurrencias mensuales de los eventos de lluvia es necesario determinar la lámina precipitada en cada uno de ellos. Muchos autores sugieren distribuciones exponenciales para representar láminas de lluvia, tiempos entre eventos y duraciones (Eagleson, 1972; Arnaud y Lavabre, 1999). Seoane y Valdés (1994) proponen dos funciones bivariadas para la intensidad y la duración de los eventos usando densidades marginales exponenciales.

En la región meridional de la provincia de Santa Fe, se ha podido demostrar que la distribución exponencial fue una de las más robustas para reproducir el conjunto de los estadísticos muestrales de las láminas de lluvia diaria (Zimmermann et al., 1996; Riccardi y Zimmermann, 2000) según puede apreciarse a manera de ejemplo en la Figura 1. Esto también se verificó para agrupamientos mensuales, estacionales y anuales de las láminas diarias (Riccardi y Zimmermann, 2002).

La distribución exponencial presenta, además, la ventaja de ofrecer simplicidad al ser un modelo de un solo parámetro y con una expresión explícita para la función de distribución de probabilidad inversa.

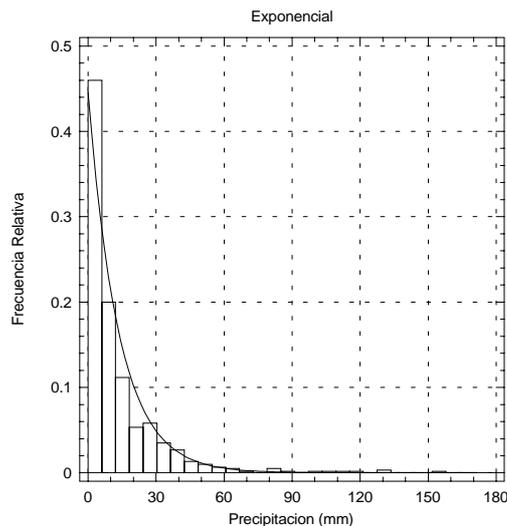


Figura 1. Histograma de frecuencias para láminas de tormentas de 3 hs. de duración registradas en Rosario.

La expresión correspondiente a la función de distribución acumulada exponencial para una lámina de lluvia P_n correspondiente a un evento simple del mes considerado es:

$$F(P_n) = 1 - e^{-\lambda_3 P_n} \quad (7)$$

donde $n = 1..N$. Conocido el valor de frecuencia acumulada puede generarse un valor de lámina de lluvia correspondiente, expresando (7) en función de P_n :

$$P_n = -\frac{1}{\lambda_3} \ln[1 - F(P_n)] \quad (8)$$

Además debe cumplirse que:

$$\sum_{n=1}^N P_n = P \quad (9)$$

Para la definición de $F(P_n)$ puede emplearse las fórmulas empíricas de frecuencias observadas para una muestra (posición de graficación según Chow et al., 1994). Estas formulaciones empíricas pueden ser representadas por una expresión general como la siguiente:

$$F(P_n) = \frac{n - b}{N + 1 - 2b} \quad (10)$$

donde n es el número de orden de la muestra ordenada en forma creciente, N es el número de ocurrencias eventos lluviosos en el mes considerado y b es un parámetro que fluctúa entre 0 y 0,5. Aquí se han adoptado dos formulaciones empíricas extremas para ser chequeadas: la formulación de Weibull y la de Hazen.

Formulación de Weibull

Para el caso de la formulación de Weibull donde $b = 0$, reemplazando (10) en (8) y aplicando en (9) se llega a que:

$$P = -\frac{1}{\lambda_3} \ln\left[\frac{N}{N+1}\right] - \frac{1}{\lambda_3} \ln\left[\frac{N-1}{N+1}\right] - \dots - \frac{1}{\lambda_3} \ln\left[\frac{2}{N+1}\right] - \frac{1}{\lambda_3} \ln\left[\frac{1}{N+1}\right] \quad (11)$$

Resolviendo para el parámetro λ_3 se tiene que:

$$\lambda_3 = -\frac{\sum_{n=1}^N \ln\left(\frac{N+1-n}{N+1}\right)}{P} \quad (12)$$

Rigurosamente hablando, para que la distribución sea estrictamente exponencial, el parámetro λ_3 debería definirse como la inversa de la lámina media del mes considerado. Pero esta definición no es compatible con (9) por ello la distribución puede considerarse como pseudo-exponencial.

Formulación de Hazen

Para el caso de la formulación de Hazen donde $b = 0,5$, reemplazando (10) en (8) y aplicando en (9)

se llega a que:

$$P = -\frac{1}{\lambda_3} \ln\left[\frac{N-0.5}{N}\right] - \frac{1}{\lambda_3} \ln\left[\frac{N-1.5}{N}\right] - \dots - \frac{1}{\lambda_3} \ln\left[\frac{1.5}{N}\right] - \frac{1}{\lambda_3} \ln\left[\frac{0.5}{N}\right] \quad (13)$$

Resolviendo para el parámetro λ_3 se tiene que:

$$\lambda_3 = -\frac{\sum_{n=1}^N \ln\left(\frac{N-n+0.5}{N}\right)}{P} \quad (14)$$

Algoritmo para definir N láminas de eventos de lluvia.

- **Datos disponibles:** La precipitación mensual, P, y el número de eventos lluviosos para el mes considerado, N.
- Calcular el parámetro λ_3 con (12) ó (14)
- Generar N láminas de lluvia aplicando conjuntamente las ecuaciones (8) y (10), donde n varía en el intervalo [1..N] y b se define según la formulación empírica empleada.

APLICACIÓN DEL MODELO A REGISTROS PLUVIOMETRICOS REGIONALES.

La disponibilidad de información pluviométrica en la región de estudio permitió el contraste de la metodología propuesta con los registros de láminas diarias de eventos de lluvia, a lo largo de una serie de años y en diferentes estaciones de medición. Se seleccionaron cuatro estaciones de un conjunto de veinte, las que presentan períodos extensos de registros, buena cobertura geográfica de la región y de buena calidad de la información. Las estaciones seleccionadas y la cantidad de años de registros pluviométricos fueron los siguientes: Bombal, 51 años; Chovet, 51 años; Santa Teresa, 52 años y Empalme, 17 años (Figura 2).

Las precipitaciones registradas en soporte papel (planillas de lluvias diarias) fueron volcados en archivos tipo ASCII, y posteriormente procesados con programas de lectura y clasificación específicamente diseñados para esta tarea. Se clasificaron y ordenaron las precipitaciones diarias para cada mes de la serie de años de registro y cada estación. (Zimmermann 2003). Se estimaron las láminas acumuladas en forma adimensional referidas al total mensual, para cada mes del año, serie de años y estación. Las láminas, que fueron ordenadas, acumuladas y adimensionalizadas, pueden *asimilarse* a frecuencias de distribución acumulada (FDA). Las Figuras 3 y 4 muestran que las mismas pueden aproximarse con distribuciones exponenciales, tanto en verano como en invierno.

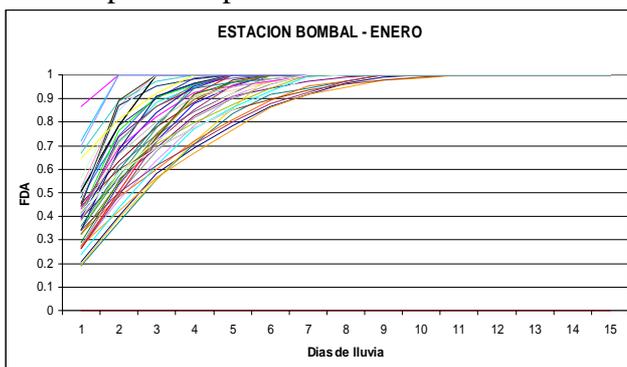


Figura 3. FDA de láminas de lluvia Est. Bombal. Enero.

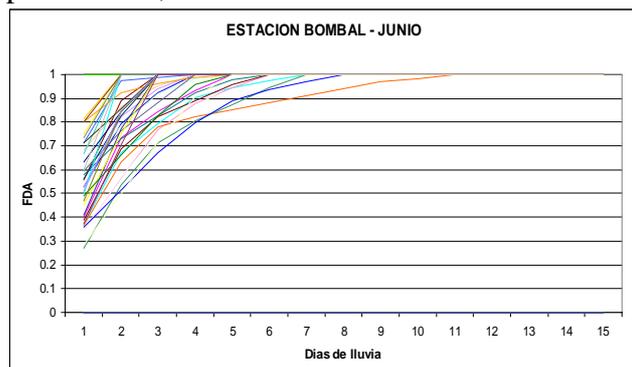


Figura 4. FDA de láminas de lluvia Est. Bombal. Julio.

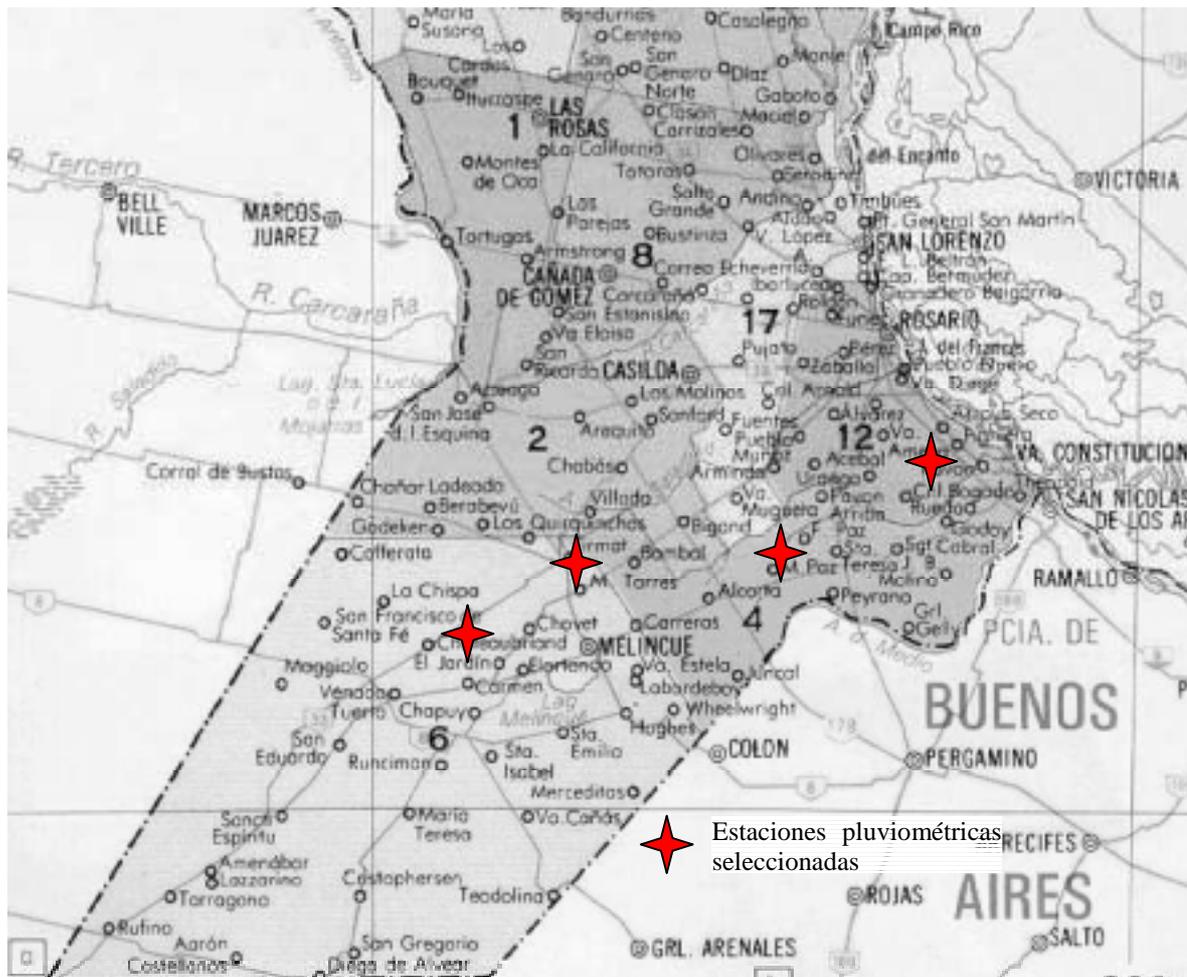


Figura 2. Región de estudio y ubicación de las estaciones pluviométricas

Pronóstico de láminas de lluvia.

Se estimaron láminas de lluvias aplicando el algoritmo propuesto a las series mensuales de precipitación de cada estación y considerando el número de eventos N observado. El procedimiento se aplicó para las dos formulaciones de frecuencias experimentales. Las estimaciones se compararon con las láminas observadas, calculando los coeficientes de determinación (r^2) de las regresiones lineales entre estimaciones y observaciones (Tabla 1). Los resultados obtenidos indicaron que la formulación de Hazen presentó una mejor performance para pronosticar las láminas de lluvia.

Tabla 1. Coeficientes de determinación obtenidos para ambas formulaciones

Estación	Fórmula de Weibull	Fórmula de Hazen
Bombal	0.7948	0.8287
Chovet	0.7852	0.8207
Santa Teresa	0.8227	0.8221
Empalme	0.8355	0.8171

Los ajustes utilizando la formulación de Hazen se grafican en las Figuras 5 a 8. Como se observa, las rectas ajustadas a las estimaciones (líneas de trazo) se aproximan en gran medida a las líneas de coincidencia indicando, de esta forma, que la tendencia media de los pronósticos es muy satisfactoria.

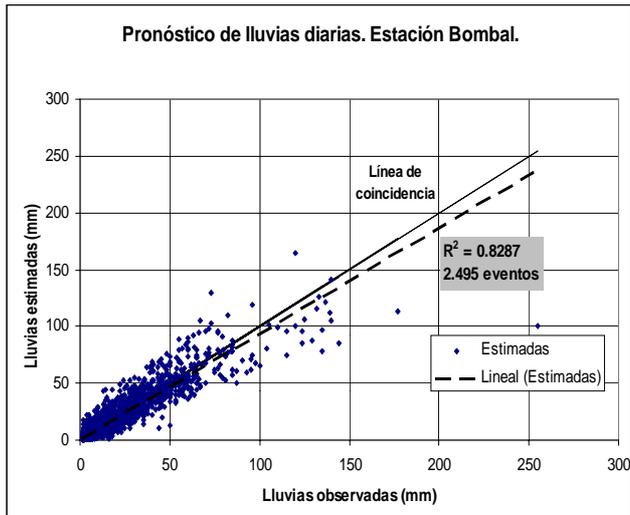


Figura 5. Pronóstico de láminas. Estación Bombal

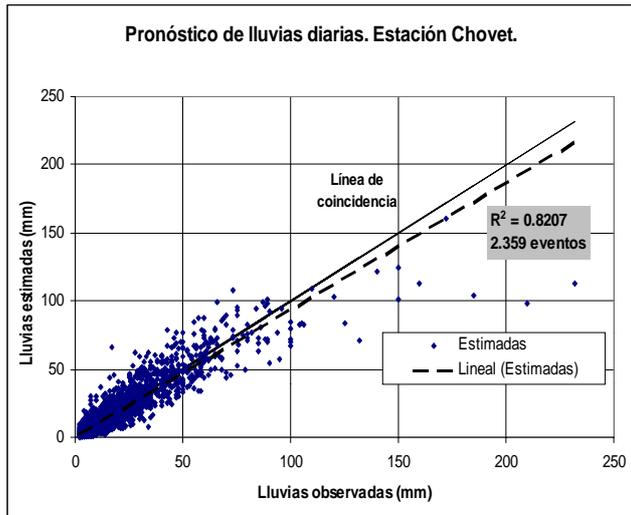


Figura 6. Pronóstico de láminas. Estación Chovet

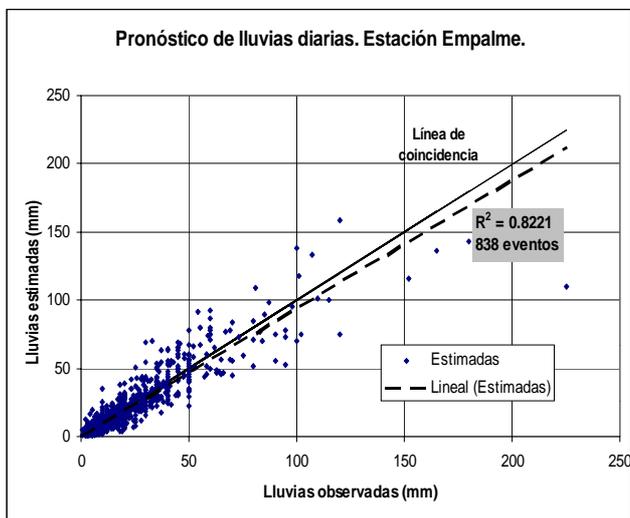


Figura 7. Pronóstico de láminas. Estación Empalme

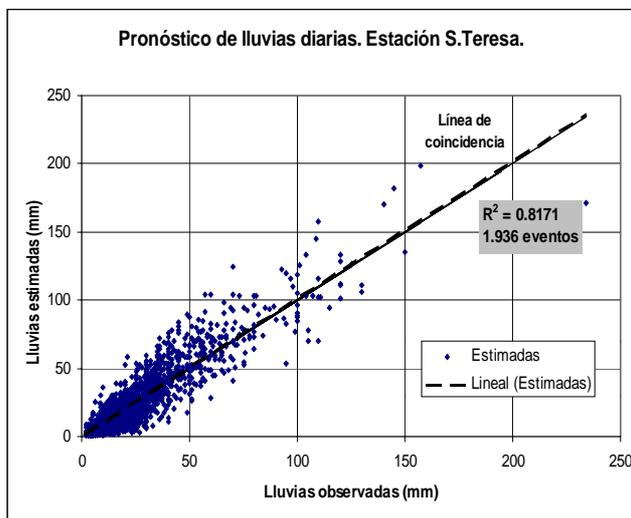


Figura 8. Pronóstico de láminas. Estación S. Teresa

Pronóstico de escurrimientos mensuales.

La utilidad final de la metodología podrá evaluarse cuando se comparen las láminas de escurrimiento mensual estimadas utilizando las precipitaciones observadas y las pronosticadas con los algoritmos para generar número de ocurrencias de lluvia, N, y las láminas de los eventos de precipitación. Para cumplir con este propósito se estimaron escurrimientos por eventos aplicando el método del US-SCS a los registros observados de precipitaciones y a los eventos generados sintéticamente mediante la aplicación conjunta de los algoritmos para estimar N y láminas de lluvia.

Las Figuras 9 a 12 muestran los escurrimientos generados a partir de lluvias observadas (en abscisas) y lluvias generadas sintéticamente (en ordenadas) en cada estación de medición. El valor del parámetro CN considerado fue de 78, representativo de condiciones medias de suelos, cobertura y humedad en la región. La Figura 13 muestra el pronóstico de escurrimientos anuales de las cuatro estaciones a partir de lluvias observadas y estimadas. Puede observarse que la congruencia entre las rectas ajustadas a las estimaciones (líneas de trazo) y las líneas de coincidencia indican que la tendencia media de los pronósticos es satisfactoria.

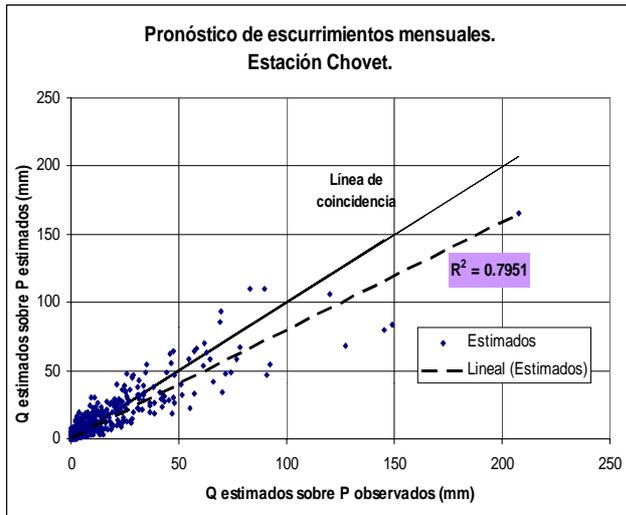


Figura 9. Pronóstico de escurrimientos. Est. Bombal

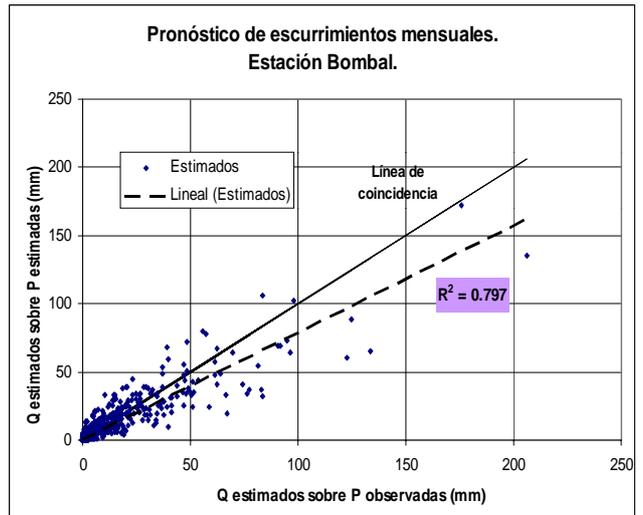


Figura 10. Pronóstico de escurrimientos. Est. Chovet

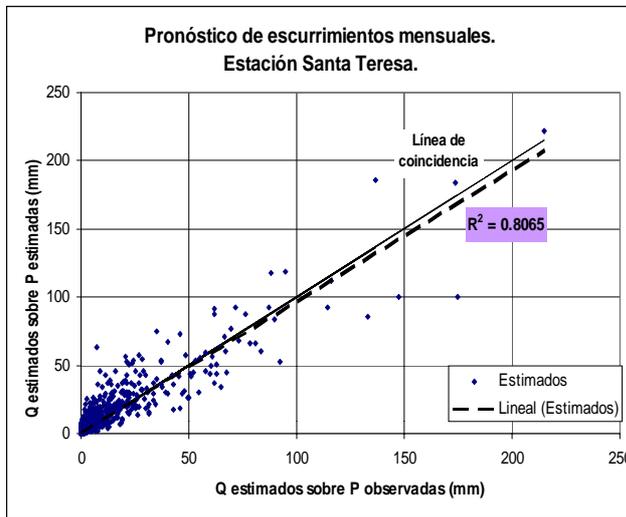


Figura 11. Pronóstico de escurrimientos. Est. S. Teresa

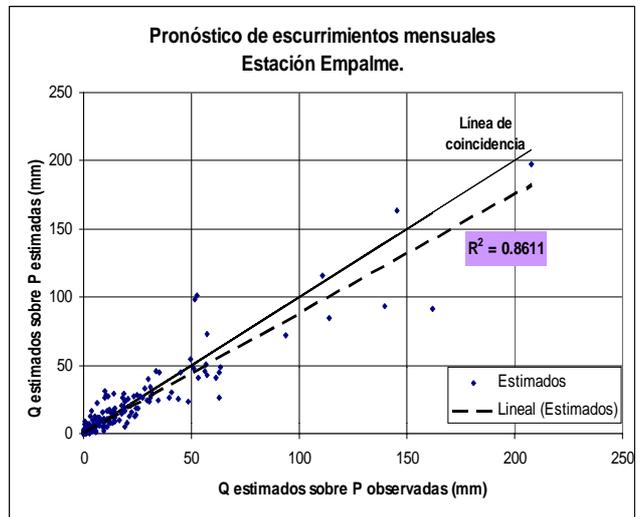


Figura 12. Pronóstico de escurrimientos. Est. Empalme.

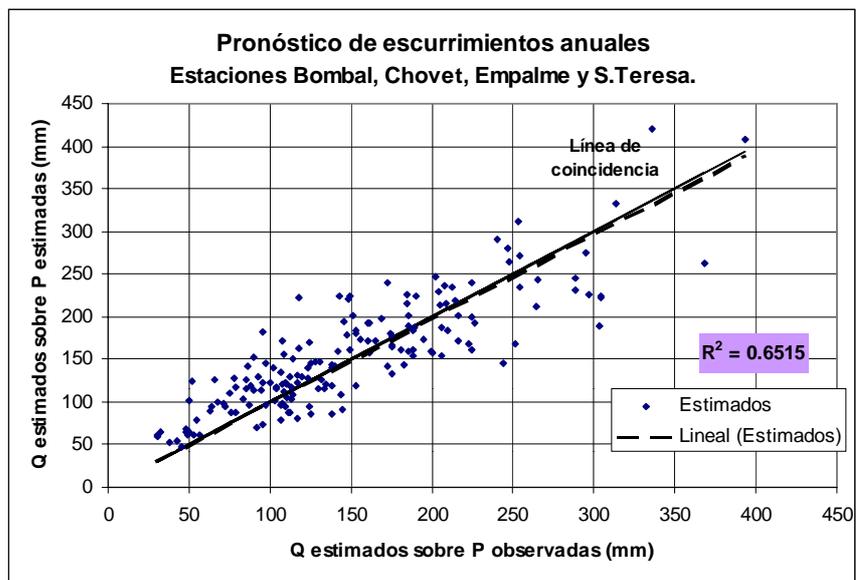


Figura 13. Pronóstico de escurrimientos anuales en las 4 estaciones.

CONCLUSIONES

El balance hídrico mensual de Thornthwaite y Mather, aplicado conjuntamente con el método empírico del US-SCS, permite estimar la infiltración neta, la que puede asimilarse a la recarga que alimentaría un acuífero freático. Para aplicarse el método del US-SCS en forma seriada durante una secuencia de años es necesario conocer el número de ocurrencias de eventos lluviosos, N , en cada mes considerado y las láminas de lluvia para cada evento, información que frecuentemente no está disponible.

Se propuso una metodología basada en el teorema de Bayes para estimar N condicionando el pronóstico a la lámina mensual. Conjuntamente se propone una distribución probabilística pseudo-exponencial que permite generar láminas de lluvia conociendo la lámina acumulada mensual. La metodología propuesta fue aplicada en cuatro estaciones de la región meridional de Santa Fe. Los resultados obtenidos fueron muy satisfactorios al compararse más de 7600 pronósticos de láminas de lluvia con los registros observados. Para evaluar la bondad de las metodologías propuestas se compararon láminas de escurrimiento estimadas mediante el método del US-SCS utilizando las precipitaciones observadas y las pronosticadas con los algoritmos. Los resultados alcanzados en las estaciones pluviométricas de estudio son satisfactorios.

Puede afirmarse que las metodologías propuestas para generar número de ocurrencias y láminas de lluvias permiten: (a) la correcta aplicación del balance de Thornthwaite y Mather junto con el método del US-SCS y (b) un buen pronóstico de escurrimientos mensuales y de la infiltración neta asimilable a la recarga directa del acuífero. La propuesta es extensible a balances medios anuales. La etapa a cumplimentar de aquí en más consistiría en la validación del método contrastándolo con otras metodologías para estimar recarga a los acuíferos freáticos.

REFERENCIAS

- Antigüedad I, García Muñiz J, and Llamas J. (1995) A mathematical model for precipitation in the Basque Country, Spain. *Hydrological Sciences Journal*. **40** (3). 291-301. IAHS Press. Wallingford. UK.
- Arnaud P. and Lavabre J. (1999) Using a stochastic model for generating hourly hyetographs to study extreme rainfalls. *Hydrological Sciences Journal*. **44** (3). 433-445. IAHS Press. Wallingford. UK.
- Chow VT, Maidment D. and Mays L. (1994) Hidrología Aplicada; Edit Mc Graw-Hill Interamericana SA; ISBN 0-07-010810-2; Colombia.
- Eagleson, P. S. (1972) Dynamics of floods frequency. *Water Resources Research*. **8** (4), 878-898.
- Paris M, D'Elia M, Perez M y Tujchneider O (2002) Análisis estocástico de variables hidrometeorológicas para la estimación de recarga de acuíferos. In: XXXII IAH Congress. Mar del Plata. Argentina.
- Riccardi G y Zimmermann E. (2000) Modelo Probabilístico de Tormentas Puntuales Aplicado a Rosario Aero (Santa Fe, Argentina). XVIII Congreso Nacional del Agua. Termas de Río Hondo, Argentina.
- Riccardi G y Zimmermann E. (2002) Un Modelo Estocástico de Composición para la Generación Sintética de Tormentas Puntuales. XIX Congreso Nacional del Agua. Carlos Paz, Argentina.
- Scozzafava M. and Tallini M. (2001) Net Infiltration in the Gran Sasso Massif of central Italy using the Thornthwaite water budget and curve-number method. *Hydrogeology Journal*. **9** (5). 461-475. Springer-Verlag. Germany.
- Seoane R. y Valdés J. (1994) Desarrollo de una Función de Distribución Derivada para la Estimación de Caudales Extremos en Cuencas con Datos Escasos. XVI Congreso Latinoamericano de Hidráulica. IARH. Chile. 193-204.
- Thornthwaite CW, Mather JR (1957) Instructions and tables for computing potential evapotranspiration and the water balance, 5th printing. Vol 10 N° 3, CW Thornthwaite Associates, Laboratory of Climatology, Elmer, NJ, USA.
- Todorovic P. (1967) Applied Probability Course Notes. Fort Collins, Colorado, USA.
- USDA-SCS (1986) National engineering handbook, sect 4, hydrology. US Department of Agriculture-Soil Conservation Service, Washington, DC, USA.
- Zimmermann E, Navarro R. y Silber M., (1996), Un Modelo Probabilístico para la Generación de Tormentas Sintéticas, XVII Congreso Latinoamericano de Hidráulica, IAHR-LAD, Guayaquil, Ecuador.
- Zimmermann E. (2003) Aproximación Bayesiana Para La Estimación De Ocurrencias De Eventos Lluviosos Aplicada A Balances Hidricos Mensuales Seriadados. Cuadernos del CURIHAM. PHI-UNESCO. **8** (2). En prensa.