

## **UN MODELO MATEMÁTICO MORFOLÓGICO UNIDIMENSIONAL PARA RÍOS ALUVIALES**

**Pedro A. Basile**

Centro Universitario Rosario de Investigaciones Hidroambientales – FCEIA – UNR  
Riobamba 245 bis – (2000) Rosario – Argentina

### **RESUMEN**

En el presente trabajo se desarrolla un modelo matemático unidimensional apropiado para el estudio de la evolución morfológica, debida a eventos naturales o acciones antrópicas, de ríos aluviales caracterizados por flujos subcríticos y lechos de sedimentos relativamente uniformes. Una particularidad importante del modelo la constituye el planteo de condiciones de desequilibrio del transporte de sedimentos en suspensión mediante la introducción en el balance sólido de una ecuación de reacción lineal de primer orden. El modelo es calibrado en base a datos experimentales referidos a los cambios morfológicos que se observan en una trinchera dragada transversalmente a la dirección de la corriente hídrica. Asimismo, se lo compara con distintos modelos matemáticos morfológicos y se analiza el efecto de la “longitud de adaptación” del transporte en suspensión en la simulación numérica de los cambios morfológicos que experimenta la trinchera.

### **INTRODUCCIÓN**

La utilización de modelos matemáticos para el estudio de los cambios morfológicos en ríos aluviales, inducidos por eventos naturales o acciones antrópicas, se ha ido incrementando en el tiempo a partir del trabajo de M. De Vries (1959, 1965, 1969).

Los modelos morfológicos se basan en las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento para la fase líquida y en la ecuación de continuidad de sedimentos para la fase sólida. Diferentes simplificaciones pueden ser introducidas en las ecuaciones que gobiernan el proceso físico, sea en función de las características hidro-morfo-sedimentológicas del sistema como así también en base al grado de resolución espacio-temporal que requiere el problema en estudio (G. Di Silvio, 1992, M. De Vries, 1993).

El presente modelo permite simular numéricamente los cambios morfológicos en ríos aluviales caracterizados por regímenes de flujo subcrítico y por lechos de sedimentos relativamente uniformes. El modelo puede ser aplicado indistintamente planteando condiciones de equilibrio o desequilibrio del transporte de sedimentos en suspensión en base a la escala espacial de interés para la simulación numérica.

Situaciones de desequilibrio del transporte en suspensión pueden ser observadas en la naturaleza en diferentes circunstancias, como por ejemplo, en el caso de un río sujeto a una excesiva alimentación sólida de sedimentos relativamente finos; en el ingreso de sedimentos a un embalse o en una trinchera dragada en el fondo del río, con el objetivo generalmente de alojar un conducto (G. Di Silvio, 1988; Kerssens, P.J.M, 1983). En este último caso puede ser de interés práctico calcular el sobreancho necesario de la trinchera a los efectos de asegurar que, durante el período de ejecución de la obra, el conducto en cuestión no resulte completamente sepultado de sedimentos.

En el presente modelo propuesto el sistema de ecuaciones que gobiernan la dinámica del flujo bifásico es resuelto en forma cuasi-acoplada mediante aproximaciones en diferencias finitas utilizando un esquema de predicción-corrección.

En los párrafos siguientes se exponen las ecuaciones que constituyen la base teórica del modelo y se describe brevemente el método empleado para la integración de las mismas. Posteriormente, se presentan la calibración del modelo con mediciones experimentales referidas a los cambios morfológicos de una trinchera transversal al flujo y la comparación con diferentes tipos de modelos morfológicos (R. Galappati y C.B. Vreugdenhill, 1985). Finalmente se presenta un análisis concerniente la influencia de la "longitud de adaptación" del transporte en suspensión (hipótesis de condiciones de equilibrio versus desequilibrio) en la respuesta morfológica de la trinchera.

## MODELO MATEMÁTICO MORFOLÓGICO - 1D

### Ecuaciones gobernantes

Las ecuaciones del modelo matemático morfológico unidimensional que gobiernan la dinámica del flujo bifásico son:

- **Fase líquida:**

Para flujos subcríticos, con valores de  $F < 0.8$ , las celeridades asociadas a la fase líquida son varios órdenes de magnitud mayores que la celeridad asociada a una perturbación de la cota del fondo (M. De Vries, 1969, 1993), esta diferencia en las escalas temporales de los dos procesos permite desacoplar eventualmente las dos fases.

Además, si se estudian los cambios temporales del lecho, es posible asumir que las celeridades de la fase líquida tienden a infinito si se las comparan con la celeridad de una perturbación del fondo. Por lo tanto, la corriente hídrica se puede considerar en régimen cuasi-permanente (M. de Vries, 1993):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{2g\Omega^2} \right) + \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial z_b}{\partial x} + \frac{Q|Q|}{C^2\Omega^2 R} = 0 \quad (1)$$

$$Q = Q(t) \quad (2)$$

El caudal líquido  $Q$  es constante para cada  $x$  pero puede todavía variar en el tiempo. Por lo tanto las ecuaciones (1) y (2) representan el perfil longitudinal de la corriente hídrica presente al tiempo  $t$ .

El coeficiente de Chezy,  $C$ , puede ser considerado constante o variable en función de la resistencia de grano y de forma. En este último caso se aplica el predictor de L.C. Van Rijn (1984c):

$$\frac{C}{\sqrt{g}} = \frac{u}{u_*} = 5.75 \log \left( \frac{h}{k_s} \right) + 6.2 \quad (3)$$

donde  $k_s$  es función del diámetro  $d_{90}$  y de la altura de la duna  $\Delta$ :

$$k_s = f(d_{90}, \Delta) \quad (4)$$

- **Fase sólida:**

La ecuación de continuidad de sedimentos en suspensión considera el almacenamiento en la corriente hídrica y además plantea que el transporte en suspensión no se adapta instantáneamente a las condiciones hidrodinámicas locales mediante la introducción de una ecuación de reacción lineal de primer orden:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{S_s}{u} \right) + \frac{\partial S_s}{\partial x} + B\phi_s = 0 \quad (5)$$

$$B\phi_s = \frac{1}{\lambda_*} (S_s - S_{sc}) \quad (6)$$

donde  $\lambda_*$  es la longitud de adaptación, la cuál puede ser definida (G. Di Silvio, 1988; A. Armanini y G. Di Silvio, 1989) en base a la siguiente ecuación:

$$\lambda_* = \frac{hu}{w_s} \left\{ \frac{a}{h} + \left( 1 - \frac{a}{h} \right) \exp \left[ -1.5 \left( \frac{a}{h} \right)^{-1/6} \left( w_s / u_* \right) \right] \right\} \quad (7)$$

donde  $a=0.5\Delta$ , si  $\Delta$  no es calculada se adopta  $a=3d_{90}$  (con  $a_{\text{mín}}=0.03h$ ). El diámetro representativo del transporte en suspensión y la correspondiente velocidad de caída se calculan mediante el método descrito en L.C. Van Rijn (1984b).

Planteando adaptación instantánea del transporte de fondo a las condiciones hidrodinámicas locales ( $S_b=S_{bc}$ ) y despreciando el almacenamiento, la ecuación de continuidad para los sedimentos transportados por el fondo es:

$$\frac{\partial S_b}{\partial x} + B\phi_b = 0 \quad (8)$$

Los cambios temporales de la cota del fondo se expresan a través de la sumatoria de las tasas de sedimentación/erosión:

$$(1-p) \frac{\partial z_b}{\partial t} = \phi_b + \phi_s \quad (9)$$

Las capacidades de transporte de fondo y en suspensión se calculan en función de las ecuaciones simplificadas de L.C. Van Rijn (1984a,b,c):

$$S_{bc} = \alpha_b Q \left[ \frac{u - u_{cr}}{\sqrt{(s-1)g d_{50}}} \right]^{2.4} \left( \frac{d_{50}}{h} \right)^{1.2} \quad (10)$$

$$S_{sc} = \alpha_s Q \left[ \frac{u - u_{cr}}{\sqrt{(s-1)g d_{50}}} \right]^{2.4} \left( \frac{d_{50}}{h} \right) D_*^{-0.6} \quad (11)$$

donde los coeficientes  $\alpha_b$  y  $\alpha_s$  asumen valores iguales a 0.005 y 0.012 respectivamente, la velocidad media crítica  $u_{cr}$  se obtiene a través de la curva de Shields (1936) y el diámetro adimensional  $D_*$  es definido como:

$$D_* = d_{50} \left[ \frac{(s-1)g}{v^2} \right]^{1/3} \quad (12)$$

### Esquema de integración numérica

Las ecuaciones correspondientes a la fase líquida son resueltas mediante un esquema Cauchy-Euler de predicción-corrección (P.A. Basile, 1994; P.A. Basile y G. Di Silvio, 1994). Asimismo, las ecuaciones que describen la continuidad de la fase sólida se resuelven a través de un esquema de predicción-corrección. Para la predicción se utiliza un esquema FTBS (Forward Time Backward Space) mientras para la corrección se emplea el esquema de Preissmann (J.A. Cunge, 1980). Por ejemplo, las derivadas parciales del transporte de fondo y en suspensión se discretizan de la siguiente manera:

- **Predicción:**

$$\frac{\partial(S_s/u)}{\partial t} = \frac{(S_s/u)_j^\xi - (S_s/u)_j^n}{\Delta t} \quad (14)$$

$$\frac{\partial S_s}{\partial x} = \frac{S_{sj}^n - S_{sj-1}^n}{\Delta x} \quad (15)$$

$$\frac{\partial S_b}{\partial x} = \frac{S_{bj}^n - S_{bj-1}^n}{\Delta x} \quad (16)$$

- **Corrección:**

$$\frac{\partial(S_s/u)}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t} \left\{ \psi \left[ \left( \frac{S_s}{u} \right)_j^{n+1} - \left( \frac{S_s}{u} \right)_j^n \right] + (1-\psi) \left[ \left( \frac{S_s}{u} \right)_{j-1}^\xi - \left( \frac{S_s}{u} \right)_{j-1}^n \right] \right\} \quad (17)$$

$$\frac{\partial S_s}{\partial x} = \frac{1}{\Delta x} \left[ \theta (S_{sj}^{n+1} - S_{sj-1}^\xi) + (1-\theta) (S_{sj}^n - S_{sj-1}^n) \right] \quad (18)$$

$$\frac{\partial S_b}{\partial x} = \frac{1}{\Delta x} \left[ \theta (S_{bj}^{\xi} - S_{bj-1}^{\xi}) + (1-\theta)(S_{bj}^n - S_{bj-1}^n) \right] \quad (19)$$

### **Condiciones iniciales y al contorno**

Las condiciones iniciales necesarias están representadas por las características geométricas de las secciones transversales, la topografía, las características sedimentológicas del material del fondo y las capacidades de transporte de sedimentos, a lo largo del río. Las condiciones al contorno son, considerando flujo subcrítico, la cota de fondo en el contorno entrante o el ingreso de sedimentos (en este caso la cota de fondo se deriva en función de los mismos), la relación (h,Q) o (Y,Q) en el contorno saliente y el caudal líquido en el contorno entrante (para cada t el mismo se considera constante para todo x).

### **Condición de estabilidad y ajuste del paso de integración temporal**

En el modelo matemático el paso de integración temporal  $\Delta t$  se ajusta dinámicamente durante la simulación numérica de la evolución morfológica en función de la condición de estabilidad de Courant-Friedrichs-Lewy, (CFL):

$$\Delta t = \sigma \frac{\Delta x}{c_m} \quad (20)$$

donde  $c_m$  es la celeridad máxima asociada a la fase sólida:

$$c_m = \max \{c_s, c_z\} \quad (21)$$

con  $c_s = u$  para el sedimento en suspensión y  $c_z$  es la celeridad correspondiente a una perturbación de la cota del fondo:

$$c_z = \frac{\delta u (u - u_{cr})^{1.4}}{h(1 - F^2)} (3.4 u - u_{cr}) \quad (22)$$

donde  $\delta = f(d_{50}, h)$ . Es importante notar en la ecuación (22) que, para flujos subcríticos, la celeridad  $c_z$  es siempre positiva, es decir, la información se transmite desde aguas arriba hacia aguas abajo. La condición al contorno para la cota del fondo está en total acuerdo con esta particularidad. En efecto, como descrito precedentemente, la misma ha sido especificada en el extremo aguas arriba.

En la ecuación (20) la constante  $\sigma$  adopta valores cercanos a la unidad a los efectos de evitar posibles difusiones numéricas y errores de fase.

## **APLICACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO**

El modelo matemático descrito en los párrafos anteriores ha sido utilizado para simular numéricamente los cambios morfológicos que experimenta una trinchera dragada transversalmente a la dirección principal de la corriente hídrica.

En particular, se emplearon los datos obtenidos mediante la realización de experimentos en el laboratorio de Delft Hydraulics, Holanda (R. Galappati y C.B. Vreugdenhill, 1985).

El presente modelo ha sido además comparado con distintos modelos matemáticos morfológicos uni y bidimensionales. Asimismo se ha analizado la influencia de la “longitud de adaptación” del transporte en suspensión en la respuesta morfológica de la trinchera, comparando las simulaciones efectuadas asumiendo condiciones de equilibrio y condiciones de desequilibrio del transporte en suspensión.

### **Experimentos**

Los experimentos fueron ejecutados en un canal de laboratorio utilizando arena fina con  $d_{50}=0.16$  mm. En el fondo del manto de arena se realizó una trinchera trapezoidal, perpendicular a la dirección del flujo, con base de fondo igual a 3 m, profundidad de 0.15 m y taludes 1V:10H.

En el experimento seleccionado para la simulación numérica, el caudal líquido específico fue mantenido constante e igual a  $q=0.2$  m<sup>2</sup>/s. La velocidad del flujo no perturbado fue de 0.51 m/s y la correspondiente profundidad inicial fue de 0.39 m. Para ulteriores detalles ver (R. Galappati y C.B. Vreugdenhill, 1985; M. De Vries, 1993).

### **Simulación numérica I**

En la simulación numérica el paso de integración espacial adoptado fue  $\Delta x=0.5$  m mientras el paso de integración temporal  $\Delta t$  fue variable en función de la ecuación (20) adoptando  $\sigma=0.95$  y con la celeridad máxima determinada en base a la ecuación (21).

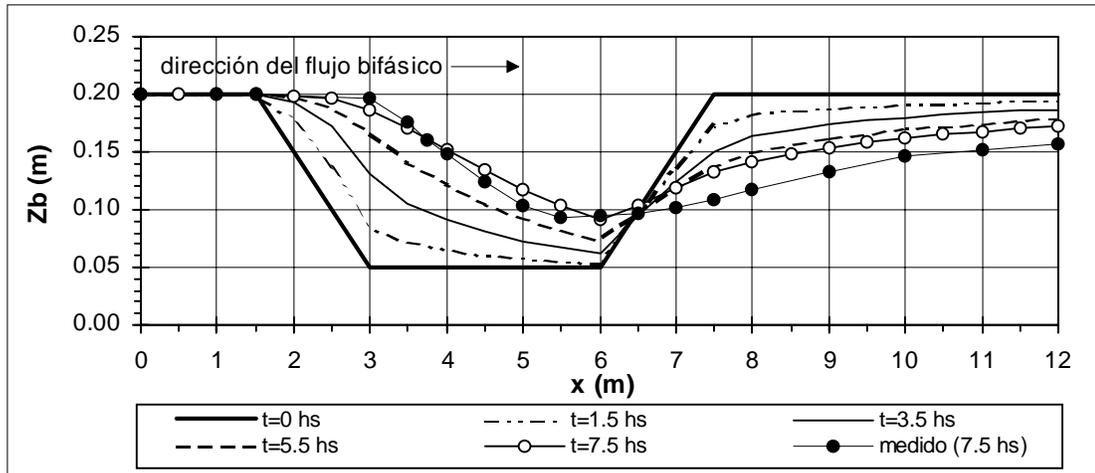
Los coeficientes de peso del esquema numérico  $\theta$  y  $\psi$ , utilizados en la etapa de corrección, fueron iguales a 0.6 y 0.5 respectivamente. La gravedad específica y la porosidad del sedimento se asumieron iguales a  $s=2.65$  y  $p=0.4$  respectivamente. El tiempo total simulado fue de 12 horas.

La calibración del modelo completo (incluyendo condiciones de desequilibrio del transporte en suspensión) se efectuó variando en rangos verosímiles los coeficientes de las ecuaciones de capacidad de transporte de fondo y en suspensión a los efectos de reproducir los cambios morfológicos medidos en el experimento. Los valores que asumieron los mismos fueron iguales a  $\alpha_b=0.0035$  y  $\alpha_s=0.0085$  (obviamente constantes en el espacio y en el tiempo). El coeficiente  $C$  fue considerado constante e igual a  $C=47$  m<sup>1/2</sup>/s.

### **Presentación y análisis de resultados I**

En la Figura 1 se observa la evolución espacio-temporal de la cota del fondo calculada mediante el presente modelo matemático y además se superpone el fondo relevado 7.5 horas después de iniciado el experimento. Se observa que los cambios morfológicos que experimenta la trinchera están gobernados por dos tipos de ondas diferentes. La deformación del talud aguas arriba es inducida por una onda de choque y la del talud aguas abajo por una onda expansiva. Las dos se propagan en la dirección del flujo originando procesos de sedimentación y erosión respectivamente. De acuerdo a los datos medidos, el modelo simula el proceso de sedimentación en forma satisfactoria mientras el proceso de erosión es ligeramente sub-estimado. En términos

generales, a medida que avanza el proceso de sedimentación, la perturbación (trinchera) tiende a desaparecer, propagándose aguas abajo y modificando sus dimensiones originales.

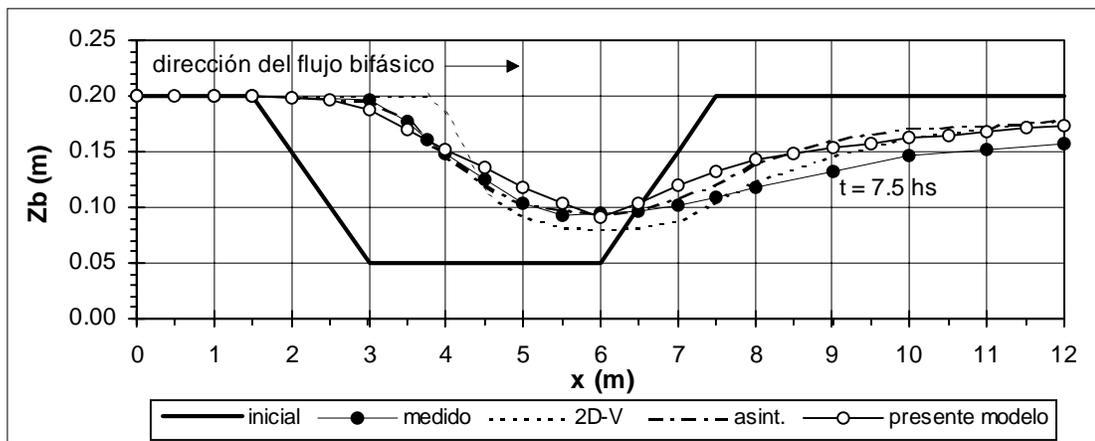


**Figura 1:** evolución espacio-temporal de la cota del fondo calculada mediante el presente modelo matemático y comparación con la medida en  $t=7.5$  horas.

En la Figura 2 se compara el presente modelo con uno bidimensional en la vertical (2D-V) y un modelo matemático con aproximación asintótica (R. Galappati y C.B. Vreugdenhill, 1985). Los resultados corresponden a un tiempo  $t=7.5$  horas.

Los resultados obtenidos con el presente modelo son prácticamente coincidentes, para todo el rango de  $x$ , a aquellos obtenidos con el modelo matemático de aproximación asintótica.

Para  $x > 4.5$  m la simulación del modelo 2D-V no presenta diferencias sustanciales respecto a aquellas efectuadas con los restantes modelos. Este último sobrestima el proceso de sedimentación para el rango de valores de  $x$  aproximadamente igual a  $3 \text{ m} < x < 4.5 \text{ m}$ .



**Figura 2:** comparación de simulaciones numéricas efectuadas con diferentes modelos matemáticos morfológicos ( $t=7.5$  horas).

### **Simulación numérica II: influencia de la longitud de adaptación**

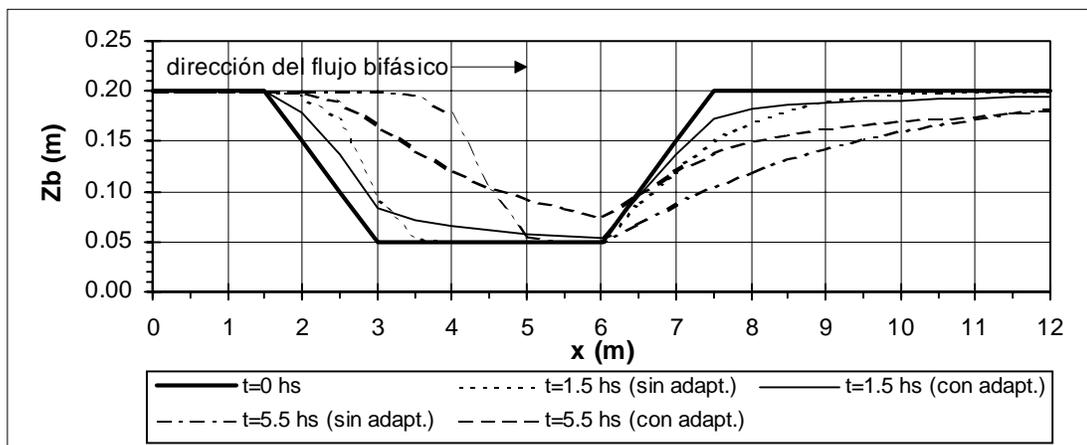
Se realizó una ulterior simulación numérica con el objetivo de analizar el efecto de la longitud de adaptación del transporte de sedimentos en suspensión, en el proceso morfológico que experimenta la trinchera.

La simulación fue efectuada manteniendo los valores de los coeficientes y parámetros del modelo iguales a los utilizados en el proceso de calibración (simulación numérica I), pero sin considerar la longitud de adaptación, es decir planteando que el transporte en suspensión se adapta instantáneamente a las condiciones hidrodinámicas locales.

### **Presentación y análisis de resultados II**

En la Figura 3 se presentan los resultados para dos tiempos diferentes, comparando la deformación de la trinchera cuando no se considera la adaptación y cuando se la tiene en cuenta en el proceso (simulación numérica I). En el primer caso (sin adaptación) se observa que la onda de sedimentos proveniente de aguas arriba presenta un frente neto y avanza sin sufrir sustanciales deformaciones, consecuentemente el proceso de sedimentación no se propaga a lo largo de la base de la trinchera como sucede en el segundo caso (con adaptación) y como ocurre además en la realidad.

Por otra parte, en el primer caso, el proceso erosivo se acentúa considerablemente ya que se mantiene en el tiempo un fuerte gradiente positivo del transporte sólido hasta que la onda de sedimentos proveniente de aguas arriba no alcanza el extremo aguas abajo de la base de la trinchera.



**Figura 3:** efecto de la longitud de adaptación del transporte en suspensión en los cambios morfológicos de la trinchera.

Evidentemente, en esta situación analizada, para obtener una correcta descripción de la respuesta morfológica es necesario plantear que el transporte en suspensión no se adapta instantáneamente a las condiciones hidrodinámicas locales.

Generalmente, este último planteo es necesario siempre y cuando el paso de integración espacial utilizado en la simulación numérica sea menor que la longitud de adaptación del transporte en suspensión.

Es oportuno observar que fenómenos de adaptación, en el tiempo y en el espacio, a las condiciones hidrodinámicas locales se pueden presentar, con diferentes grados de importancia, en diversos subprocesos que ocurren en el sistema hidro-morfológico (G. Di Silvio, 1988). Por ejemplo, el tiempo de adaptación de las dimensiones de las formas de fondo, longitud de adaptación del transporte de fondo y en suspensión, tiempo de adaptación de la composición granulométrica del fondo (en este caso es necesario considerar la continuidad de sedimentos para cada fracción granulométrica presente en el lecho del río), etc.

## CONCLUSIONES

El modelo matemático propuesto resulta apropiado para simular los cambios morfológicos, inducidos por eventos naturales o acciones antrópicas, en ríos aluviales caracterizados por regímenes de flujo subcrítico y lechos de sedimentos relativamente uniformes.

El modelo matemático morfológico unidimensional puede ser aplicado indistintamente asumiendo condiciones de equilibrio o desequilibrio del transporte de sedimentos en suspensión, en función del proceso que debe ser simulado y del correspondiente paso de integración espacial adoptado.

En el experimento simulado resulta de particular importancia considerar condiciones de desequilibrio del transporte en suspensión. La introducción de una ecuación de reacción lineal de primer orden, en el balance de sedimentos en suspensión, permite modelar en términos aceptables este fenómeno.

En efecto, las simulaciones numéricas efectuadas con el presente modelo resultan ser ampliamente satisfactorias. Obteniéndose además, resultados similares a aquellos determinados aplicando diferentes tipos de modelos matemáticos morfológicos, los cuales contemplan esta particularidad de los sedimentos transportados en el seno de la corriente hídrica.

## LISTA DE SÍMBOLOS

**a** : nivel de referencia, (L).

**B** : ancho de la sección transversal, (L).

**C** : coeficiente de Chezy, ( $L^{1/2}/T$ ).

**c<sub>m</sub>** : celeridad máxima fase sólida, (L/T).

**c<sub>s</sub>** : celeridad asociada al transporte en suspensión, (L/T).

**c<sub>z</sub>** : celeridad correspondiente a una perturbación de la cota del fondo, (L/T).

**D\*** : diámetro adimensional ( - ).

**d<sub>50</sub>** : diámetro para el cual el 50% del material presente en el fondo es más fino, (L).

**d<sub>90</sub>** : diámetro para el cual el 90% del material presente en el fondo es más fino, (L).

**F** : número de Froude, ( - ).

**g** : aceleración de la gravedad, ( $L/T^2$ ).

**h** : profundidad de la corriente hídrica, (L).

**k<sub>s</sub>** : rugosidad equivalente, (L).

**p** : porosidad del sedimento, ( - ).

**Q** : caudal líquido, ( $L^3/T$ ).

- R** : radio hidráulico, (L).  
**S<sub>bc</sub>** : capacidad de transporte de fondo, (L<sup>3</sup>/T).  
**S<sub>s</sub>** : transporte en suspensión efectivo, (L<sup>3</sup>/T).  
**S<sub>sc</sub>** : capacidad de transporte en suspensión, (L<sup>3</sup>/T).  
**s** : gravedad específica del sedimento, ( - ).  
**t** : coordenada temporal, (T).  
**u** : velocidad media de la corriente hídrica, (L/T).  
**u\*** : velocidad de corte, (L/T).  
**u<sub>cr</sub>** : velocidad media crítica para el inicio de movimiento de las partículas del fondo (L/T).  
**w<sub>s</sub>** : velocidad de sedimentación de las partículas, (L/T).  
**x** : coordenada espacial, (L).  
**Y** : nivel de la superficie libre, (L).  
**z<sub>b</sub>** : cota del fondo, (L).  
**α<sub>b</sub>** : coeficiente en la ecuación de capacidad de transporte de fondo, ( - ).  
**α<sub>s</sub>** : coeficiente en la ecuación de capacidad de transporte en suspensión, ( - ).  
**Δ** : altura de duna (L).  
**Δt** : paso de integración temporal, (T).  
**Δx** : paso de integración espacial, (L).  
**φ<sub>b</sub>** : tasa de sedimentación/erosión relacionada con el transporte de fondo, (L/T).  
**φ<sub>s</sub>** : tasa de sedimentación/erosión relacionada con el transporte en suspensión, (L/T).  
**λ\*** : longitud de adaptación del sedimento en suspensión, (L).  
**ν** : viscosidad cinemática, (L<sup>2</sup>/T).  
**σ** : número de Courant, ( - ).  
**θ** : coeficiente de peso en el esquema numérico (derivadas espaciales), ( - ).  
**ψ** : coeficiente de peso en el esquema numérico (derivadas temporales), ( - ).  
**Ω** : área de la sección transversal, (L<sup>2</sup>).

## REFERENCIAS

- Armanini, A. y Di Silvio, G. (1989)**; “*On the coexistence of bedload and suspended transport for a uniform grainsize material*”, Sediment Transport Modelling, Proceedings of the International Symposium, S.S.Y. Wang (Ed.), p581-587., Nueva Orleans.
- Basile, P. A. (1994)**; “*Modellazione dei meccanismi d’intercettazione e rilascio dei sedimenti nelle briglie permeabili*”. Tesis Ph.D., Università Degli Studi di Padova, Bibliotecas Nacionales de Roma y Florencia.
- Basile, P. A. y Di Silvio, G. (1994)**; “*Interception and relase of sediments by permeable check-dams*”, IAHR Fluvial Hydraulics Section, International Workshop on Floods and Inundations related to Large Earth Movements, Trento, Italia, (pp. C3.1-C3.17).
- Cunge, J.A.; Holly, F.M. y Verwey, A. (1980)**; “*Practical Aspects of Computational River Hydraulics*”, Pitman Publishing Ltd, Londres.
- De Vries, M. (1959)**; “*Transients in Bed-Load Transport*”, Publicación interna R.3, Delft Hydraulic Laboratory, Holanda.
- De Vries, M. (1965)**; “*Considerations about non-steady bed load transport in open channels*”, Proc. Congreso del IAHR, Leningrado.

**De Vries, M. (1969);** “*Solving river problems by hydraulic and mathematical models*”, Publicación interna N. 76 II, Delft Hydraulic Laboratory, Holanda.

**De Vries, M. (1993);** “*River Engineering*”, Publicación interna F10, Faculty of Civil Engineering, Departement of Hydraulic Engineering, Delft University of Technology, Holanda.

**Di Silvio, G. (1992);** “*Modelling Sediment Transport under Diferent Hydrological and Morphological Circumstances*”, Dynamics of Gravel-Bed Rivers. Edit. P. Billy, R.D. Hey, C.R. Thorne y P. Tacconi. Jhon Wiley & Sons Ltd.

**Di Silvio, G. (1991);** “*Averaging operations in sediment transport modelling: short-step versus long-steps morphological simulations*”, Proc. Int. Symp. On Transport of Suspended Sediments and its Mathematical Modelling, Florencia, Italia.

**Di Silvio, G. (1988);** “*Adaptation processes through the surface of sedimentary systems*”, Euromech 215, Mechanics of Sediment Transport in Fluvial and Marine Environments.

**Galappatti, R. y Vreugdenhill, C.B. (1985);** “*A depth integrated model for suspended sediment transport*”, Journal of Hydraulic Research, Vol. 23, N. 4, p359-377.

**Shields, A. (1936);** “*Application of similitude mechanics and the research on turbulence to bed form movement*” (en Alemán), Mitt. Preuss. Versuchsanstalt fur Wasserbau und Schiffbau, Heft 26, Berlín.

**Van Rijn, L.C. (1984a);** “*Sediment Transport, Part I: Bed Load Transport*”, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol. 110, N. 10, p1431-1456.

**Van Rijn, L.C. (1984b);** “*Sediment Transport, Part II: Suspended Load Transport*”, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol. 110, N. 11, p1613-1641.

**Van Rijn, L.C. (1984c);** “*Sediment Transport, Part I: Bed Forms and Alluvial Roughness*”, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol. 110, N. 12, p1733-1754.