

## **XIX CONGRESO LATINOAMERICANO DE HIDRÁULICA – CÓRDOBA 2000**

### **MODELACIÓN MATEMÁTICA HIDROMORFOLÓGICA EN RÍOS CON LECHOS DE SEDIMENTOS HETEROGÉNEOS**

Pedro Abel Basile  
Centro Universitario Rosario de Investigaciones Hidroambientales.  
FCEIA – UNR. Rosario. Argentina.  
tel/fax: 0341-4808541. E-mail: pbasile@fceia.unr.edu.ar

#### **RESUMEN**

En el presente trabajo se describe e implementa un modelo matemático hidromorfológico para sedimentos heterogéneos apropiado para simular la evolución espacio-temporal del flujo hídrico, del transporte fraccional, de los procesos de erosión/sedimentación del fondo y de los cambios de composición granulométrica de la capa activa. El transporte se asume como una función de parámetros locales (hidrodinámicos y morfo-sedimentológicos), razón por la cual el modelo numérico es válido para intervalos espaciales de discretización mayores que la longitud de adaptación de las partículas más finas transportadas en suspensión. El modelo es aplicado para simular numéricamente los cambios morfológicos y sedimentológicos impermanentes generados por la propagación de ondas de crecidas. En particular, mediante las simulaciones numéricas efectuadas, se estudiaron los cambios de la composición granulométrica del fondo y del transporte asociados a procesos de sedimentación.

#### **ABSTRACT**

A hydromorphological mathematical model for heterogeneous sediments is described and implemented. The model is suitable to simulate time and space evolution of water flow, fractional sediment transport rates, bottom degradation-aggradation processes and mixing layer sediment composition changes. Sediment transport by fractions are computed as a function of local hydrodynamic and sedimentological parameters. Thus, the numerical model is valid for spatial steps greater than the adaptation length of the finer sediment particles transported in suspension. The model was applied to simulate the unsteady morpho-sedimentological changes induced by flood wave propagation in heterogeneous riverbed sediments. Particularly, mixing layer sediment composition variations and sediment transport composition changes associated to aggradation processes were analyzed.

## INTRODUCCIÓN

Un gran número de modelos matemáticos hidromorfológicos no tienen en cuenta la influencia de la no-uniformidad granulométrica del lecho en los procesos de erosión/sedimentación [4], [7]. En general, dichos modelos consideran un diámetro representativo (por ejemplo el  $d_{50}$ ) de la distribución granulométrica de los sedimentos que constituyen el fondo. Diferentes diámetros representativos pueden ser introducidos como dato inicial, el cual se mantiene invariado en el tiempo en cada punto computacional del dominio modelado. Por lo tanto, los modelos hidromorfológicos basados en tal representación no pueden simular cambios espacio-temporales de la composición granulométrica del fondo.

Tales modelos pueden ser aplicados en ríos con lechos de sedimentos cuasi-uniformes, es decir aquellos para los cuales el desvío estándar geométrico  $\sigma_g < 1.4$ , y además con la condición de que la composición granulométrica no cambie significativamente en el tiempo. Estas condiciones son bastante restrictivas y en muchos casos resulta imposible flexibilizarlas, sobre todo cuando tanto el sedimento del fondo como el sedimento en ingreso por los contornos del dominio modelado poseen granulometrías no-uniformes o heterogéneas y además diferentes composiciones entre cada una de ellas.

A partir de la introducción del concepto de capa activa o de mezcla [15] y en base a las sucesivas investigaciones relacionadas con el transporte de sedimentos con granulometrías extendidas [3], [16], [13], los modelos hidromorfológicos para sedimentos uniformes han expandido sus potencialidades, permitiendo simular además los cambios espacio-temporales que experimenta la composición granulométrica de los sedimentos del lecho [17], [2], [7], [5], [9].

En el presente trabajo se describe e implementa un modelo matemático hidromorfológico para sedimentos heterogéneos apropiado para simular dinámicamente el flujo hídrico, el transporte, los procesos de erosión/sedimentación del fondo y los cambios de composición granulométrica de la capa activa. Para la fase líquida se adopta el modelo de onda cinemática, mientras que para la fase sólida se considera la continuidad para cada clase granulométrica presente en el fondo. El cálculo del transporte fraccional se efectúa con la ecuación de Engelund y Hansen [14] modificada, en función de parámetros hidrodinámicos y sedimentológicos locales. Por lo tanto el modelo puede ser aplicado considerando pasos de integración espacial mayores que la longitud de adaptación de las partículas más finas transportadas en suspensión [4]. Mediante la aplicación del modelo se analizaron los cambios de la composición granulométrica del fondo y del transporte asociados a procesos de sedimentación durante la propagación de ondas de crecidas.

## ECUACIONES DEL MODELO MATEMÁTICO HIDROMORFOLÓGICO

### Fase líquida: submodelo hidrodinámico

El submodelo hidrodinámico brinda información sobre la evolución de los parámetros hidrodinámicos de la corriente hídrica y se basa en las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento del flujo impermanente gradualmente variado, despreciando en esta última las contribuciones de los términos inerciales y del gradiente de presión (onda cinemática):

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q_L \quad (1)$$

$$Q = \frac{1}{n_s} AR^{2/3} S_b^{1/2} \quad (2)$$

con  $x$ : coordenada espacial,  $t$ : coordenada temporal,  $A$ : área mojada de la sección transversal,  $Q$ : caudal líquido,  $q_L$ : caudal líquido lateral por unidad de longitud,  $S_b$ : pendiente del fondo,  $R$ : radio hidráulico,  $n_s$ : coeficiente de Manning-Strickler. Este último es definido como:  $n_s = \kappa (d_{90})^{1/6}$ , donde  $d_{90}$  se expresa en m y  $\kappa = 0.038$  para la formulación de Strickler. El coeficiente  $\kappa$  es constante y puede ser objeto de calibración, mientras  $d_{90}$  puede variar durante la evolución de la composición granulométrica del lecho, induciendo de este modo una variación espacio-temporal de  $n_s$ .

### Fase sólida: submodelo de procesos morfo-sedimentológicos

El submodelo morfo-sedimentológico brinda información sobre los cambios morfológicos (cota del fondo) y sedimentológicos (composición granulométrica del fondo) y se basa en la ecuación de continuidad de sedimentos para cada clase granulométrica:

$$(1-p)B \left[ \frac{\partial(f_i \delta)}{\partial t} + f_{ei} \frac{\partial(z_b - \delta)}{\partial t} \right] + \frac{\partial T_i}{\partial x} = T_{Li}^* \quad (3)$$

donde  $z_b$  es la cota del fondo,  $p$  es la porosidad del sedimento,  $B$  es el ancho de la sección transversal,  $T_i$  es el transporte volumétrico de sedimentos asociado a la  $i$ -ésima clase,  $f_i$  es la correspondiente fracción presente en la capa activa o de mezcla de altura  $\delta$ ,  $T_{Li}^*$  es el transporte lateral volumétrico por unidad de longitud correspondiente a la  $i$ -ésima clase y  $f_{ei}$  es una fracción de intercambio evaluada en la interfase a cota  $\zeta_b$ , entre la capa activa y el substrato no perturbado de sedimentos.

La fracción de intercambio  $f_{ei}$  se relaciona con los procesos de erosión/sedimentación. En el caso de erosión se considera que el sedimento del substrato se incorpora a la capa activa. Mientras en el caso de sedimentación se asume que el sedimento es transferido directamente al substrato [15]. Esto conduce a la siguiente relación para  $f_{ei}$ :

$$f_{ei} = \begin{cases} f_i & \Leftrightarrow \frac{\partial S_b}{\partial t} > 0 \text{ (sedimentación)} \\ f_{np\ i} & \Leftrightarrow \frac{\partial S_b}{\partial t} < 0 \text{ (erosión)} \end{cases} \quad (4)$$

donde  $f_{np\ i}$  es la fracción asociada a la clase  $i$ -ésima presente en el substrato. Cabe señalar que la capa activa evidencia una dependencia temporal y espacial en el sentido longitudinal ya que  $f_i$  sufre modificaciones durante el proceso de transporte. Mientras el substrato no puede cambiar directamente en el tiempo ya que en el mismo no se verifica transporte longitudinal.

Los cambios temporales de la cota de fondo  $z_b$  se determinan a partir de la ecuación (3). En efecto, efectuando la sumatoria sobre el número total de clases granulométricas  $N$  en la ecuación (3), se obtiene:

$$(1-p)B \frac{\partial z_b}{\partial t} + \frac{\partial \sum_{i=1}^N T_i}{\partial x} = \sum_{i=1}^N T_{Li}^* \quad (5)$$

Por lo tanto, con la ecuación (5) es posible determinar los cambios temporales de la cota del fondo  $z_b$  y con la ecuación (3) determinar los cambios temporales de la composición granulométrica de la capa activa a través de los gradientes temporales de cada fracción  $f_i$ .

El espesor de la capa activa se adopta igual a  $\delta=2 d_{90}$  [12]. En la ecuación de balance en la capa activa y en la ecuación de la evolución de la cota de fondo, el transporte de sedimentos por fracciones  $T_i$  es evaluado en función de los parámetros hidrodinámicos y sedimentológicos locales. A tal fin se emplea la ecuación modificada de Engelund y Hansen [6]:

$$W_i^* = \alpha_{eh} f_i \left( \frac{u}{u_*} \right)^2 \tau_{*i} \xi_{oi} \quad (6)$$

donde  $W_i^*$  es el transporte adimensional para la clase  $i$ -ésima definido como:

$$W_i^* = \frac{T_i [(s-1)g]}{B u_*^3} \quad (7)$$

con  $s=\rho_s/\rho$ : gravedad específica del sedimento, siendo  $\rho_s$  la densidad del sedimento y  $\rho$  la densidad del agua;  $g$ : aceleración de la gravedad y  $u_*=(\tau_b/\rho)^{0.5}$  es la velocidad de corte, siendo  $\tau_b$  la tensión de corte media sobre el fondo.

En la ecuación (6) el coeficiente  $\alpha_{eh}$  adopta el valor de 0.05, el cual puede ser objeto de calibración,  $u$  es la velocidad media de la corriente hídrica,  $\tau_{*i}$  es la tensión de corte adimensional referida a la partícula de diámetro  $d_i$ :

$$\tau_{*i} = \frac{\tau_b}{g(\rho_s - \rho)d_i} \quad (8)$$

y  $\xi_{oi}$  es el coeficiente de protección/exposición, el cual adopta la siguiente forma de potencia:

$$\xi_{oi} = \left( \frac{d_i}{d_m} \right)^b \quad (9)$$

donde el exponente  $b$  puede ser objeto de calibración y asume valores comprendidos entre 0 y 1. Valores usuales de  $b$  pueden ser: 0.98 [16], 0.87 [1], 0.94 [13], 0.74 [3], 0.85 [11]. El coeficiente de protección/exposición producirá una disminución (aumento) de la tensión de corte adimensional para aquellas partículas que presentan diámetros menores (mayores) que el diámetro medio aritmético de la distribución granulométrica del sedimento que constituye la capa activa  $d_m$ :

$$d_m = \sum_{i=1}^N f_i d_i \quad (10)$$

con  $N$  número total de clases granulométricas adoptadas, el cual es función del desvío standard geométrico  $\sigma_g$  y de la asimetría adimensional  $\beta$  de la distribución granulométrica de los sedimentos del lecho [6]. Para la ecuación de Engelund y Hansen modificada el mismo se determina en base a la siguiente relación funcional:

$$N = 0.19 \sigma_g + 3.88 \beta + 2.13 \quad (11)$$

La ecuación (11) fue derivada específicamente para la fórmula de Engelund y Hansen modificada, analizando una vasta gama de distribuciones granulométricas frecuentemente

encontradas en situaciones prácticas [6]. La misma puede ser empleada en principio para estimar  $N$  cuando se implementen ecuaciones de transporte sin umbral crítico.

## **MODELO NUMÉRICO: RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES GOBERNANTES**

Las ecuaciones diferenciales que constituyen el modelo matemático morfológico son resueltas en forma cuasi-acoplada mediante la implementación de un esquema numérico de predicción-corrección en diferencias finitas. Para la fase de predicción se utiliza un esquema PTRS (progresivo en el tiempo, regresivo en el espacio), mientras que para la fase de corrección se aplica el esquema de Priessmann [10]. El modelo numérico admite la representación del ingreso al curso principal de caudales líquidos y sólidos provenientes de un número máximo de 30 afluentes, permitiendo de este modo simular redes hidrográficas altamente densificadas.

## **CONDICIONES INICIALES Y AL CONTORNO**

Las condiciones iniciales están representadas por las características geométricas de las secciones transversales, las cotas de fondo y la correspondiente composición granulométrica, los caudales líquidos y los caudales sólidos; sea para el curso principal como así también para los tramos inferiores de los eventuales afluentes. Las condiciones al contorno están representadas por el hidrograma y el sedimentograma de entrada en correspondencia del contorno aguas arriba. Asimismo se requieren los hidrogramas en correspondencia con cada uno de los afluentes y los respectivos ingresos laterales de sedimentos, los cuales se determinan aplicando la ecuación de transporte fraccional.

## **APLICACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO**

El modelo fue aplicado para simular numéricamente los cambios morfológicos y sedimentológicos impermanentes generados por la propagación de ondas de crecidas. En particular, mediante las simulaciones numéricas efectuadas, se estudiaron los cambios de la composición granulométrica del fondo asociados a procesos de sedimentación. Para realizar las simulaciones se consideró un tramo esquemático de 10 Km de longitud, de sección rectangular con  $B=30$  m constante y sin afluentes. Se utilizaron cuatro hidrogramas de entrada en el contorno aguas arriba, los mismos se presentan en la Figura 1. En la Figura 2 se presenta el perfil longitudinal inicial del fondo conjuntamente con la correspondiente composición granulométrica inicial  $f_i$  con  $i=1,2,3,4$ . Los diámetros asociados a cada fracción granulométrica son:  $d_1=0.316$  mm,  $d_2=3.16$  mm,  $d_3=31.6$  mm  $d_4=316$  mm. El paso de integración espacial fue de 250 m y el paso de integración temporal fue variable en función de las celeridades de las fases líquida y sólida. La altura de la capa activa se consideró variable temporal y espacialmente con  $\delta=2d_{90}$ . El coeficiente  $\kappa$  en la relación de Manning-Strickler fue constante e igual a 0.038, mientras  $n_s$  se consideró variable temporal y espacialmente en función de los cambios del  $d_{90}$ . Los coeficientes de la fórmula de transporte se adoptaron igual a  $\alpha_{eh}=0.05$  y  $b=0.8$ , ambos constantes.

## **Análisis de resultados**

En la Figura 3 se presenta el volumen total de sedimentos transportados a través de cada sección durante la propagación de los hidrogramas H1, H2, H3 y H4. Se observa que la evolución espacial de los volúmenes presenta un gradiente negativo, lo cual genera consecuentemente procesos de sedimentación, tal como se evidencia en la Figura 4 donde se grafica la diferencia entre la cota del fondo final y la inicial, para cada uno de los hidrogramas transitados. Las pequeñas diferencias de los procesos de sedimentación, correspondientes a los hidrogramas H1, H3 y H4 se deben a la combinación de caudal pico y volumen de esorrentía, los cuales determinan que el transporte generado por el

tránsito de cada hidrograma sean similares. En las Figura 5 (a)-(d) se expone la evolución espacial de la composición de la capa activa, como diferencia entre la composición final (una vez terminada la propagación) y la composición inicial, para cada hidrograma y cada clase granulométrica. Para cada uno de los hidrogramas se observa que, después que los mismos transitaron el tramo, la capa activa evidencia una disminución de las partículas correspondientes a la clase  $i=1$  y un aumento de las restantes. Es decir, la tendencia es a constituir una composición relativamente más gruesa, si bien los cambios son relativamente modestos. La mayor diferencia se corresponde con el hidrograma H1, es decir con el de mayor caudal pico.

En la Figura 6 se presenta el hidrograma H1, la evolución temporal del transporte global  $T$  y del transporte de la clase  $i=1$  ( $d_1=0.316$  mm), en correspondencia con la sección  $x=5$  Km. En la Figura 7 se presenta la correspondiente evolución temporal de la fracción de la clase  $i=1$  en la capa activa, normalizada con la fracción inicial  $f_1(t=0)$ . Se observa que en el transcurso de la propagación dicha fracción muestra una variación de aproximadamente  $\pm 15\%$ . En particular, se nota un aumento de la misma durante la fase de incremento progresivo de caudales, seguido de una disminución después que pasa el caudal pico. La máxima diferencia se alcanza antes del tránsito del caudal pico. En la Figura 8 se muestra la evolución temporal de la fracción de la clase  $i=1$  presente en el transporte, normalizada con la fracción inicial  $f_{T1}(t=0)$ . La evolución es similar a la descrita precedentemente, sin embargo en este caso la variación respecto a la condición inicial es de  $\pm 10\%$ . Para los otros hidrogramas las evoluciones de la composición para la clase  $i=1$  en la capa activa y en el transporte son análogas pero con porcentajes de variación más reducidos.

## CONCLUSIONES

El modelo matemático hidromorfológico desarrollado es apropiado para simular dinámicamente el flujo hídrico, el transporte, los procesos de erosión/sedimentación del fondo y los cambios de la composición granulométrica de la capa activa. El transporte se calcula en función de parámetros hidrodinámicos y morfo-sedimentológicos locales y por lo tanto es válido para intervalos espaciales de discretización mayores que la longitud de adaptación de las partículas más finas transportadas eventualmente en suspensión.

Los cambios morfológicos y sedimentológicos inducidos por los hidrogramas propagados son relativamente modestos. Sin embargo se ha observado como funcionan los cambios, espaciales y temporales, de la composición granulométrica de la capa activa y del transporte, en un proceso general de sedimentación.

Para cada uno de los hidrogramas se observa que, después del tránsito de los mismos a lo largo del tramo de estudio, la capa activa evidencia, con respecto a la condición inicial, una disminución de las partículas más finas y un aumento de las de mayor diámetro. Es decir, muestra la tendencia a constituir una composición final ligeramente más gruesa. Dicha tendencia debe entenderse dentro del contexto de condiciones al contorno para la fase sólida utilizadas en las simulaciones, ya que un aumento sustancial de partículas finas en entrada hubiera revertido tal tendencia. En efecto, esto puede suceder durante eventos extremos, cuando ingresan al río grandes cantidades de sedimentos de composición sustancialmente fina provenientes de deslizamientos y/o flujos de detritos.

Dejando de lado la situación final, si se analiza la evolución temporal de la fracción  $f_1$  presente en la capa activa se observa un aumento de la misma durante la fase de crecimiento del hidrograma (tendencia a composición más fina) seguido de una disminución después que transita el caudal pico (tendencia a composición más gruesa). Tal comportamiento es análogo para la fracción  $f_{T1}$  presente en el transporte.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Andrews, E.D. (1983). *Entrainment of gravel from naturally sorted river-bed material*. Geological Society of America Bulletin, Vol. 94, N. 10, pp. 1225-1231.
- [2] Armanini, A. y Di Silvio, G. (1988). *A one-dimensional Model for the Transport of Sediment Mixture in Non-equilibrium Condition*. Journ. Hydr. Research, IAHR, Vol. 26, N. 3, pp. 275-292.
- [3] Ashworth P.J. y Ferguson, R.I. (1989). *Size-selected entrainment of bed load in gravel bed streams*. Water Resources Research, Vol. 25, N. 4, pp. 627-634.
- [4] Basile, P.A. (1997). *Un modelo matemático morfológico unidimensional para ríos aluviales*. Revista de Estudios Sobre Cuestión Hidroambiental. Eds. CURIHAM-UNR, PHI, UNESCO. Vol. 3, N. 4, pp. 1-13.
- [5] Basile, P.A. (1994). *Modellazione dei meccanismi di intercettazione e rilascio di sedimenti da parte delle briglie permeabili*. Ph.D. Thesis, Università Degli Studi di Padova, Italia.
- [6] Basile, P.A. (2000). *Transporte Sólido en Ríos con Lechos de Sedimentos Heterogéneos*. XVIII Congreso Nacional del Agua, Santiago del Estero. ISBN 987-99083-4-1 (Libro y CD-ROM).
- [7] Basile, P.A. y Di Silvio, G. (1994). *Interception and release of sediments by permeable check-dams*. Proc. IAHR Workshop on Flood and Inundations Related to Large Earth Movements, Section C, pp.C3.1-C3.17, Trento, Italia.
- [8] Basile, P.A. y Riccardi, G.A. (1998). *Desarrollo y aplicación de un modelo morfológico cuasi-2D para simular numéricamente los procesos dinámicos de erosión y sedimentación en ríos aluviales*. Proc. XVII Congreso Nacional del Agua y II Simp. de Recursos Hídricos del Cono Sur. Tomo III, pp. 472-482.
- [9] Basile, P.A.; Peviani, M. y Di Silvio G. (1995). *Sensitivity analysis of boundary conditions*. Proc. II Workshop FRIMAR, Ch. 9. Norwich, Inglaterra.
- [10] Cunge, J.A.; Holly, F.M. y Verwey, A. (1980). *Practical Aspects of Computational River Hydraulics*. Pitman Publishing Limited, Londres.
- [11] Darby, S.E. y Thorne, C.R. (1996). *Numerical simulation of widening and bed deformation of straight sand-bed rivers I: Model development*. Journ. Hydr. Engrg., ASCE, Vol. 122, N. 4, pp.184-193.
- [12] Di Silvio, G. (1994). *Floods and sediment dynamics in mountain rivers*. Coping with Floods, Chapter 16, pp. 375-392, Rossi et al. (eds.), Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.
- [13] Diplas, P. (1987). *Bed load transport in gravel bed streams*. Journ. Hydr. Engrg., ASCE, Vol. 113, N. 3, pp.277-292.
- [14] Engelund, F. y Hansen A. (1967). *A monograph on sediment transport in alluvial streams*. Tech. Univ. Of Denmark.
- [15] Hirano, M. (1971); *River Bed Degradation with Armouring*. Transactions of Japan Society of Civil Enginnering - JSCE, Vol. 3, Part 2, pp.194-195.
- [16] Parker, G., Klingeman, P. y McLean, D. (1982). *Bed load and size distribution in paved gravel-bed streams*. Journal of the Hydraulic Division,ASCE. Vol. 108, N. HY4.
- [17] Ribberink, J.S. (1987). *Mathematical modelling of one-dimensional morphological changes in rivers with non-uniform sediment*. Communications on Hydr. and Geotechnical Engrg. R. 87-2, T.U. Delft, The Netherlands.

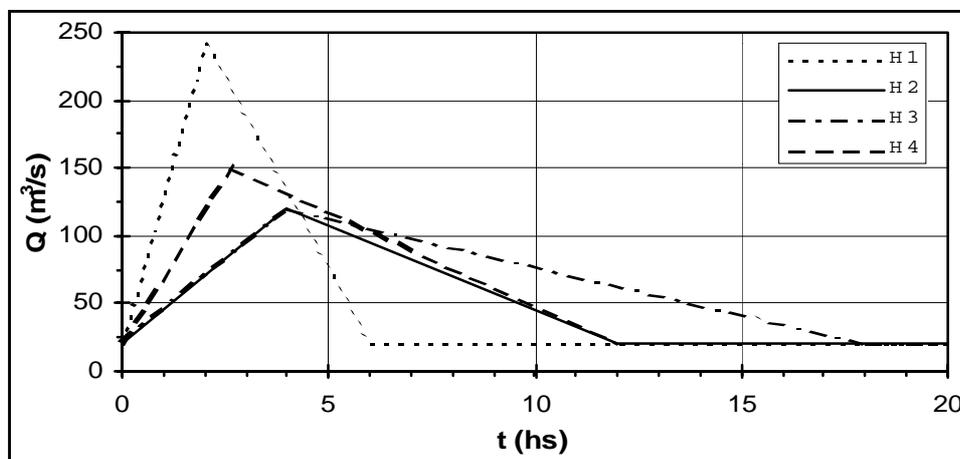


Figura 1: hidrogramas de entrada contorno aguas arriba.

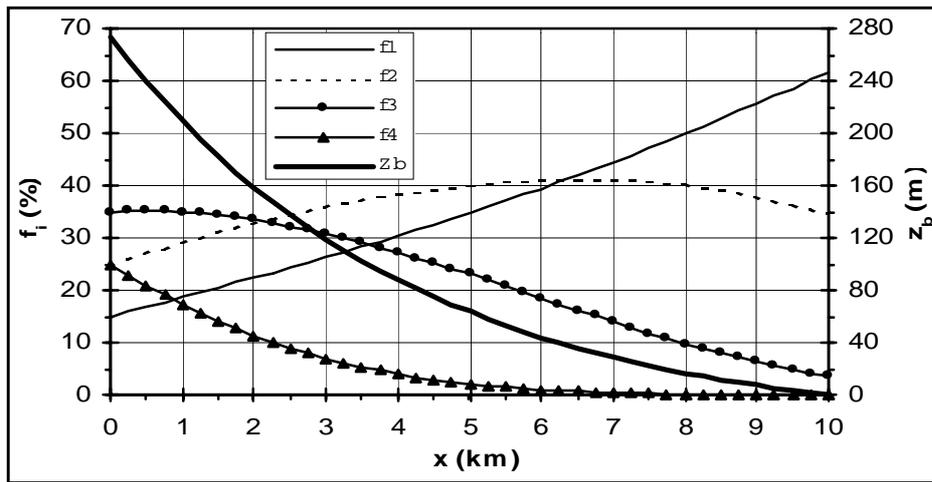


Figura 2: composición granulométrica inicial del fondo y perfil longitudinal inicial.

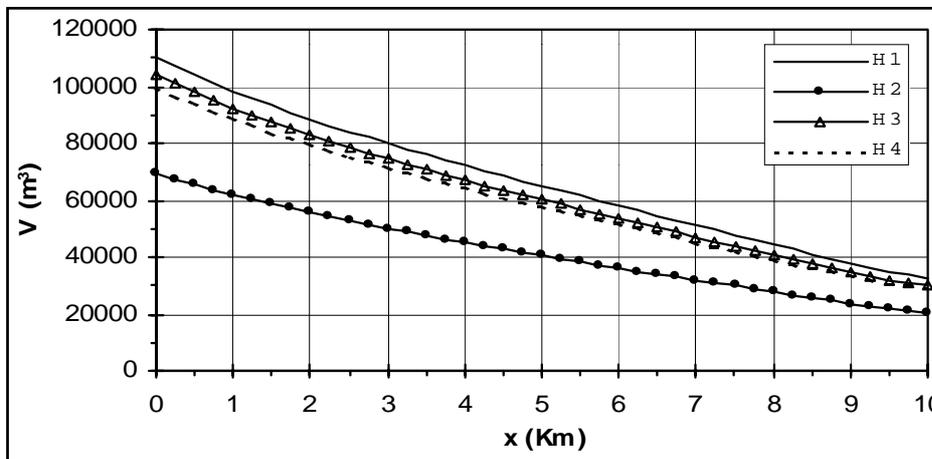


Figura 3: volumen total de sedimentos transportados a lo largo del tramo para cada uno de los hidrogramas propagados.

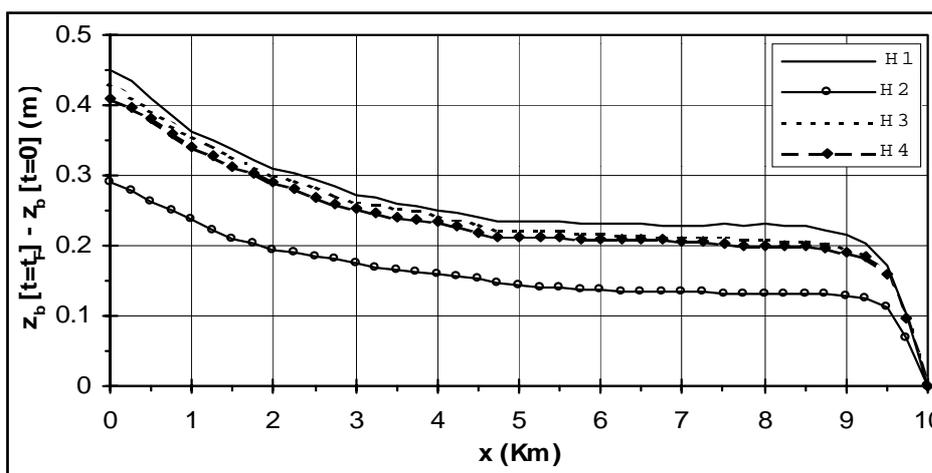
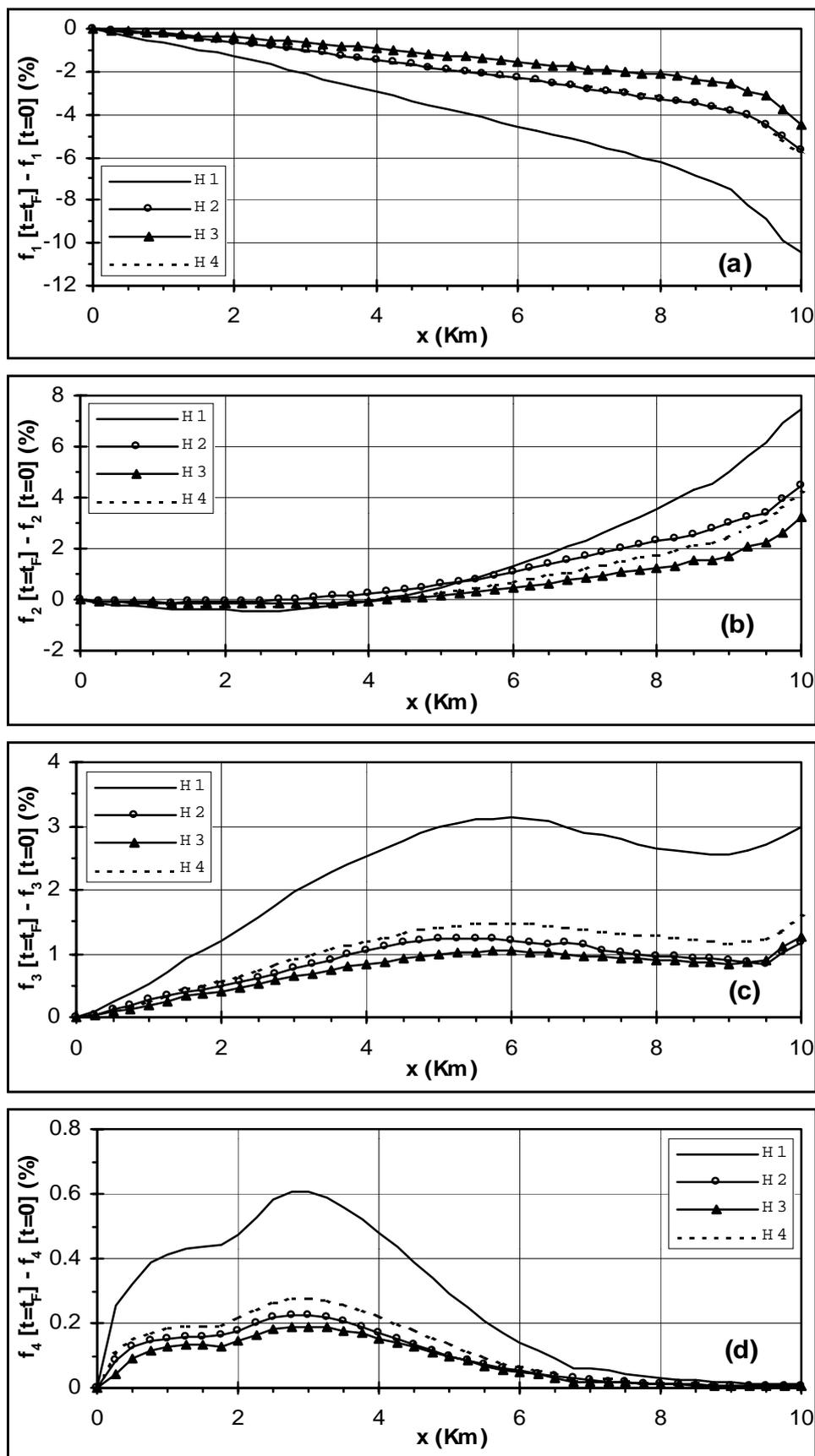
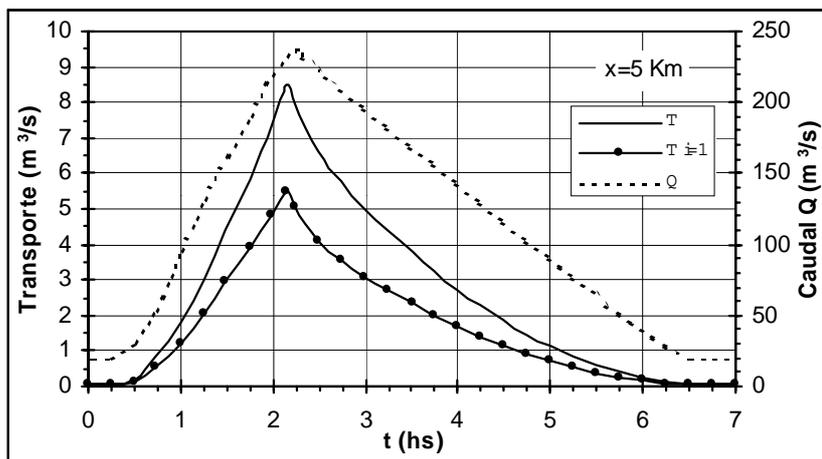


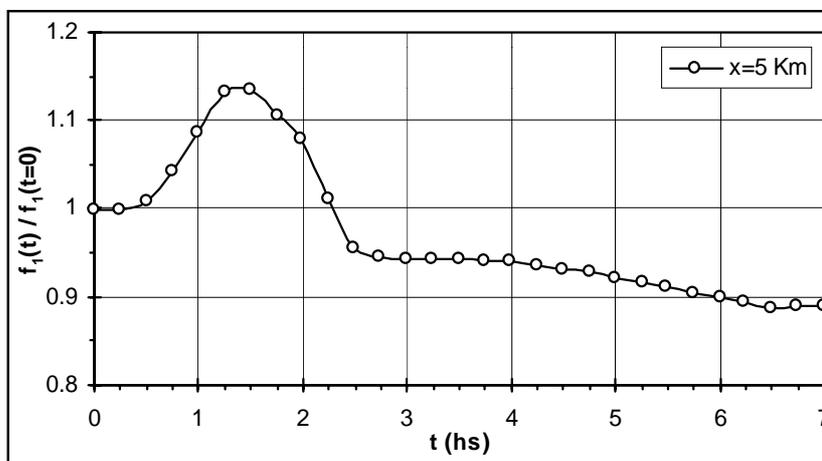
Figura 4: evolución espacial de la diferencia entre la cota de fondo final e inicial para cada uno de los hidrogramas propagados.



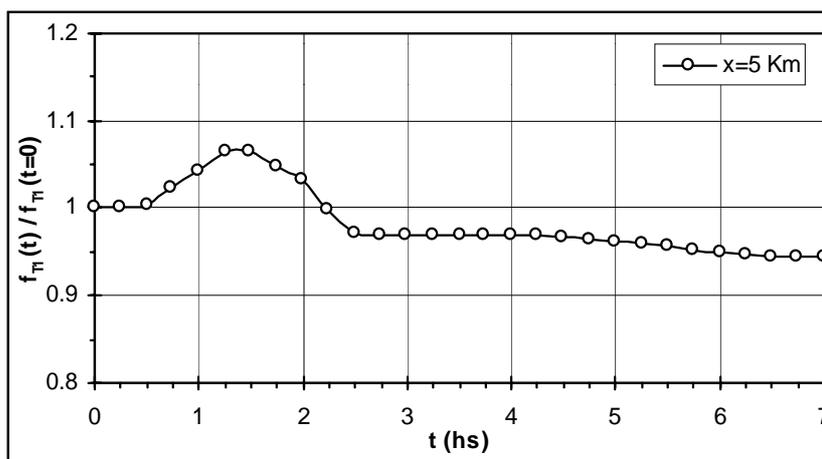
**Figura 5:** evolución espacial de la diferencia entre la fracción  $f_i$  (en la capa activa) final e inicial, para cada hidrograma propagado: (a):  $\Delta f_1$ , (b):  $\Delta f_2$ , (c):  $\Delta f_3$  y (d):  $\Delta f_4$ .



**Figura 6:** hidrograma H1, evolución temporal del transporte de la clase  $i=1$  y del transporte global en correspondencia de la progresiva  $x=5$  Km.



**Figura 7:** evolución temporal de la fracción  $f_1$  presente en la capa activa normalizada con la correspondiente fracción inicial, en correspondencia de la progresiva  $x=5$  Km. Hidrograma H1.



**Figura 8:** evolución temporal de la fracción  $f_{T1}$  presente en el transporte normalizada con la correspondiente fracción inicial, en correspondencia de la progresiva  $x=5$  Km. Hidrograma H1.