

## ESQUEMA EXPLÍCITO PARA LA RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE RICHARDS

Erik Daniel Zimmermann

Centro Univesitario de Investigaciones Hidroambientales - FCEIA - UNR

### Resumen

Se presenta un modelo de flujo vertical en la zona no saturada, que incluye procesos de intercambio de vapor y agua con la atmósfera y el acuífero freático, basado en la ecuación de Richards. Se arriba a un esquema numérico, de resolución basado en la técnica de diferencias finitas, discretizando las ecuaciones de continuidad y momentum en función de la humedad volumétrica (ecuación difusiva), resolviéndolas por separado mediante un planteo explícito y centrado en el espacio y el tiempo. El modelo permite formular las incógnitas en términos de humedad volumétrica ó potencial mátrico. Puede resolver condiciones de contorno tales como superficie encharcada, montos prestablecidos de infiltración determinado por otro modelo externo al propuesto, o bien puede utilizarse como un modelo de infiltración, además de redistribución de humedad y percolación al acuífero. También permite estimar tasas de evaporación ó evapotranspiración real como función de la evapotranspiración potencial y del estado de humedad ó potencial mátrico, basado en el modelo de sumidero de Feddes. Como condición de borde inferior se puede establecer las celdas incluídas en la capa acuífera con humedad de saturación o bien la condición de flujo subterráneo impuesta. Como parámetros del suelo se han utilizado las relaciones de Brooks y Corey, sin considerar lazos de histéresis entre procesos de secado y mojadura. Se ha realizado un análisis de estabilidad del esquema numérico, observando el comportamiento de números adimensionales (Courant, Péclét y el parámetro  $\lambda$ ) bajo situaciones críticas de humedad. Se ha verificado la convergencia del esquema, contrastándolo con soluciones conocidas, ya sea analíticas o numéricas. Primeramente se lo contrastó con el modelo de frente húmedo (Green y Ampt), determinando una muy buena correlación entre ambas simulaciones. También se lo ha comparado con otro esquema numérico integrado mediante la técnica de elementos finitos junto a un esquema de diferencias implícito en el tiempo, alcanzándose resultados enteramente equivalentes, con intervalos de discretización temporal del mismo orden. Un tercer ejemplo de comparación fue planteado frente a un esquema numérico euleriano-lagrangiano de transporte tridimensional de solutos y fluído, integrado mediante elementos finitos. Los resultados alcanzados entre este esquema, el propuesto y una solución analítica a partir de la ecuación de Philips, son de gran similaridad. Finalmente se ha contrastado el esquema propuesto frente a un esquema implícito en diferencias finitas y una solución analítica del tipo frente húmedo, para analizar la infiltración de flujos multifase (agua e hidrocarburos). El esquema propuesto predice la posición el frente de avance con muy buena aproximación.

En síntesis, el esquema desarrollado para resolver las ecuaciones del flujo en la zona no saturada ha mostrado una gran versatilidad para adaptarse a diferentes condiciones de contorno y sencillez operativa para la resolución de las ecuaciones, presentando una convergencia satisfactoria a las soluciones analíticas y numéricas producidas por esquemas basados en diversas técnicas de integración en los problemas analizados.

## 1. INTRODUCCION.

El objeto del presente trabajo es la determinación de una metodología apropiada para estimar los montos de percolación y evapotranspiración del perfil de suelo a fin de incorporarla en un modelo de procesos hidrológicos continuo en el tiempo (SHPLAN2). Esto conduce a la determinación de un modelo de distribución de humedad en el perfil del suelo para determinar, además de los montos de percolación hacia el acuífero, la condición precedente de humedad del perfil. Como primera fase de estudio se pretende la operación de un modelo de parámetros concentrados, de balance vertical a nivel de cuenca, y luego en segunda etapa, analizar la distribución espacial de parámetros y procesos hidrológicos confeccionando un modelo distribuido.

En el presente trabajo se propone un esquema numérico para la integración de la ecuación de Richards, realizando análisis de estabilidad y validaciones con resultados teóricos y otros esquemas numéricos.

## 2. PLANTEO DEL MODELO

El modelo está basado en la ecuación de Richards, para estimar la redistribución de humedad en la zona no saturada (ZNS), contemplando la estimación de los montos de agua intercambiados con la atmósfera y el acuífero. El diseño del mismo requiere de la división de los continuos espacio y tiempo en intervalos discretos, con objeto de conseguir aproximaciones representativas manejables en el esquema numérico. En la aproximación por diferencias finitas, se propone una malla unidimensional vertical en la que los nudos son equidistantes.

Existen diferentes versiones de la ecuación de Richards, la que con mayor frecuencia se ha integrado es que la expresa el régimen transitorio en términos del potencial mátrico. Las relaciones de conductividad no saturada y coeficiente de difusión en función de esta variable, presentan menor efecto de histéresis (Hernández y otros, 1994). A los fines del objetivo propuesto para este trabajo, la formulación en términos del potencial, presenta el inconveniente de resolver la ecuación para una variable que no está directamente implicada en el balance de agua. Se consideró conveniente, entonces, la resolución de la ecuación de Richards en términos de la humedad volumétrica  $\theta$ , que permitirá conocer una de las variables del balance de manera directa. La ecuación de movimiento, en el caso de flujo vertical, en términos de la humedad volumétrica y con una analogía a la ley de difusión de Fick, es:

$$q = -D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} - \mu k \quad \mathbf{1}$$

donde  $q$  es la velocidad de Darcy del flujo no saturado,  $\theta$  la humedad volumétrica,  $z$  la coordenada vertical,  $\mu k$  la conductividad no saturada, siendo  $\mu$  un factor adimensional entre 0 y 1,  $D(\theta)$  el coeficiente de difusividad del medio, producto de la conductividad no saturada  $\mu k$  por el gradiente de la curva de contenido de humedad y potencial matricial ( $d\theta/d\Psi$ ). En la ecuación los signos se escogen de modo que  $q$  es positivo cuando el flujo es de dirección  $z$  positiva, además,  $z$  se toma como dirección positiva hacia arriba, un valor negativo de  $q$  denota flujo hacia abajo. La ecuación de continuidad establece para el flujo vertical, que:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = - \frac{\partial q}{\partial z} \quad 2$$

En este trabajo se realiza un planteo explícito en diferencias finitas de las ecuaciones precedentes de acuerdo a las siguientes definiciones:

$$f(z) \approx \frac{f_{j+1/2}^n + f_{j-1/2}^n}{2} \quad \frac{df}{dt} \approx \frac{f_j^{n+2} - f_j^n}{\Delta t} \quad \frac{df}{dz} \approx \frac{f_{j+1/2}^n - f_{j-1/2}^n}{\Delta z}$$

donde  $f$  es una función cualquiera (humedad volumétrica, conductividad no saturada, coeficiente de difusión),  $j=1, m$  el elemento de discretización espacial, con espaciamiento  $\Delta z$ ,  $n$  el nivel de tiempo, con incrementos  $\Delta t$ . Los nodos  $j, j+1, j+2, \dots$  representan los bordes de celdas en los cuales se evalúa los flujos de intercambio y los nodos  $j+1/2, j+3/2, \dots$  representan los centros de celdas en donde se miden las humedades (figura 1). El nodo  $j=1$  corresponde a la superficie y el nodo  $j=m$  al límite del espesor del perfil considerado, en correspondencia con la máxima profundidad. Bajo este esquema de discretización la ecuación de momentum resulta:

$$q_j^n = -D(\theta_j^n) \frac{\theta_{j-1/2}^n - \theta_{j+1/2}^n}{\Delta z} - k(\theta_j^n) \quad \text{y} \quad \theta_j^n = \frac{\theta_{j+1/2}^n + \theta_{j-1/2}^n}{2} \quad 3$$

La ecuación de continuidad resuelta para el término en el nivel  $n+1$ , es:

$$\theta_{j+1/2}^{n+1} = \theta_{j+1/2}^n - \frac{\Delta t}{\Delta z} (q_j^n - q_{j+1}^n) \quad 4$$

La secuencia de cálculo será la siguiente, 1) Partir de una condición inicial de humedades  $\theta_j^0$  en el perfil, 2) resolver la ecuación de momentum (ec.4) para  $j=1..m$ , determinando los flujos de intercambio entre celdas, 3) resolver la ecuación de continuidad (ec.5) determinando las humedades del perfil en el siguiente paso de tiempo y 4) retomar paso 2) hasta tiempo de finalización de la simulación.

Para las condiciones de contorno, se plantea la resolución de las ecuaciones anteriores, con algunas de las incógnitas conocidas.

**La imbibición como condición de borde superior.** En el caso de superficie encharcada puede considerarse la humedad del primer nodo constante en el tiempo e igual a la humedad de saturación:  $\theta_1(t) = \theta_s$ . La condición de lluvia puede contemplarse de varias maneras, mediante el volumen infiltrado para la tormenta considerada determinado por otro modelo externo al propuesto o bien, considerando al esquema de Richards como un modelo de infiltración, además, de redistribución de humedad y percolación al acuífero. En este último caso se debe cumplir con la siguiente condición:

$$q_1^n = \text{MAX} \left( -D(\theta_{1/2}^n) \frac{\theta_s - \theta_{1/2}^n}{\Delta z} - k(\theta_{1/2}^n); i^n \right) \quad 5$$

donde  $i^n$  es la intensidad de lluvia del intervalo  $n$ .

**La desecación como condición de borde superior.** La condición de evapotranspiración puede considerarse de acuerdo a diferentes formulaciones y modelos. En general, los modelos se apoyan en una tasa máxima o potencial de evapotranspiración, corregida con un factor en el

rango 0..1, función del estado de humedad o el potencial matricial. El modelo utilizado en este trabajo para estimar la evapotranspiración real del perfil es el de Feddes y otros (1978), citado por Candela y Varela (1993). En este caso el modelo limita la tasa de evapotranspiración máxima (vinculada a los parámetros atmosféricos) en función del potencial mátrico del suelo. Los autores suponen una distribución homogénea de las raíces en el suelo y asumen que:

$$S(\psi) = \beta(\psi) S_{max} = \frac{\beta T_p}{z_r} \quad 6$$

donde  $T_p$  es la máxima tasa de evapotranspiración,  $S_{max}$  representa la tasa por unidad de profundidad radicular,  $z_r$  la profundidad de raíces,  $S(\Psi)$  la tasa real de  $S_{max}$ ,  $\beta(\Psi)$  una función adimensional del potencial matricial. La misma puede simplificarse a una relación graficada en la figura 2. Los potenciales se grafican en valores absolutos. La función de extracción  $\beta$  es nula por debajo de  $\Psi_1$ , debido a la deficiencia de oxígeno, y por encima de  $\Psi_4$ . Es máxima entre los valores de  $\Psi_2$  y  $\Psi_3$ . Este último potencial depende de la tasa máxima de evapotranspiración (en función de los parámetros atmosféricos). Deeb Páez y Díaz Granados (1988) presentan un familia de curvas que relacionan el parámetro  $\beta$  vs. el potencial matricial, bajo diferentes tasas de evapotranspiración máxima. Reordenando y extractando los valores en forma numérica, en este trabajo se han extraído los valores límites de  $\Psi_3$ , para los cuales comienzan a decrecer las tasas de evapotranspiración, y se ha propuesto una relación empírica que los relaciona con las tasas máximas. La misma, obtenida por regresión no lineal, fue  $103.7 * ETP^{-1.906307}$ , con un coeficiente de regresión de **0.9694**.

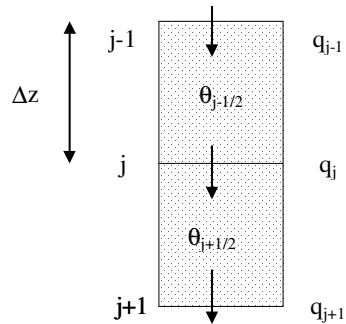


Figura 1. Discretización en celdas verticales

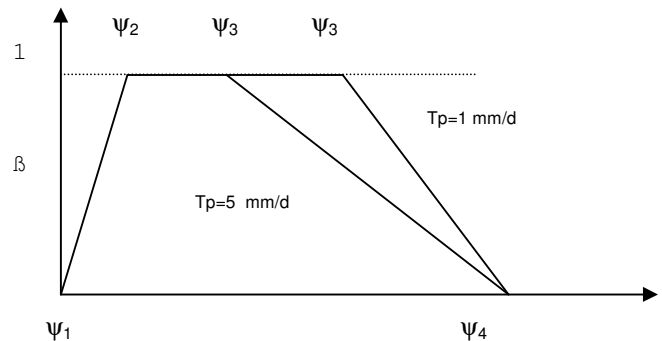


Figura 2. Modelo de Feddes, et al (1978)

**Condición de borde inferior.** Se pueden considerar las celdas incluidas en la capa acuífera con humedad de saturación:  $\theta_m(t) = \theta_s$ . Si el flujo subterráneo es importante magnitud puede considerarse una o un conjunto de celdas sumidero, con flujo igual al subterráneo.

**Parámetros del suelo.** Implica conocer las curvas de conductividad vs. humedad volumétrica  $k(\theta)$ , potencial mátrico vs. humedad  $\psi(\theta)$ , difusividad vs. humedad  $D(\theta)$ . Se puede utilizar expresiones tales como las de Brooks-Corey (1964), Van Genuchten (1980) ó Clapp-Hornberger (1978). La heterogeneidad y la anisotropía son factores que influncian fuertemente a los ensayos de campo, atentando contra la determinación genérica de los parámetros. En el presente trabajo se han adoptado por simplicidad las relaciones de Brooks-Corey. Ante la falta de datos experimentales se han utizado los parámetros recomendados en bibliografía (Chow y otros, 1994; Candela y Varela, 1993; Mijares, 1986; Anguita y otros, 1991):

$$k(\theta) = K_s S_e^4 \quad 7$$

$$|\psi(\theta)| = \frac{0.327}{S_e^{4.57}} \quad 8$$

$$|D(\theta) = k(\theta) \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 1,5 \cdot K_s \cdot S_e^{6,43} \quad 9$$

siendo  $S_e = (\theta - \theta_r) / (\theta_s - \theta_r)$ , la saturación efectiva del suelo y  $K_s$  la conductividad saturada.

### 3. ANALISIS DE ESTABILIDAD

García Villanueva y Arroyo Correa (1994) plantean mediante técnicas de interpolación lineal una discretización en diferencias finitas de la ecuación de Richards, bajo un esquema no lineal. Este esquema es comparado con una discretización linealizada de las ecuaciones analizando convergencia, estabilidad y precisión de ambos esquemas, dando criterios para los intervalos de discretización espacial y temporal. Ellos proponen las siguientes relaciones para garantizar la estabilidad, convergencia y precisión de los esquemas numéricos:

$$\lambda \leq 0.25 \quad C_r \leq 0.5 \quad P \leq 2; \quad 10$$

$$\lambda = \frac{K_s \Delta t}{S_0 \Delta z^2}; \quad C_r = \frac{\alpha K_s \Delta t}{S_0 \Delta z}; \quad P = \frac{C_r}{\lambda} = \alpha \Delta z$$

$$K(\Psi) = K_s e^{\alpha \Psi} \quad 11$$

donde  $P$  se denomina número de Péclet,  $C_r$  número de Courant y  $\lambda$  un parámetro adimensional. Estos parámetros, de la manera en que los autores plantean la relación  $K(\Psi)$  (ec. 11), no pueden determinarse acorde a las expresiones utilizadas en este trabajo (ecs. 7, 8 y 9) porque son funciones del parámetro  $\alpha$ . Con el fin de obtener un valor de  $\alpha$  equivalente se igualaron las expresiones 7 y 11, incorporando la ecuación 8 para transformar humedades en potenciales y resolviendo para el parámetro  $\alpha$ .

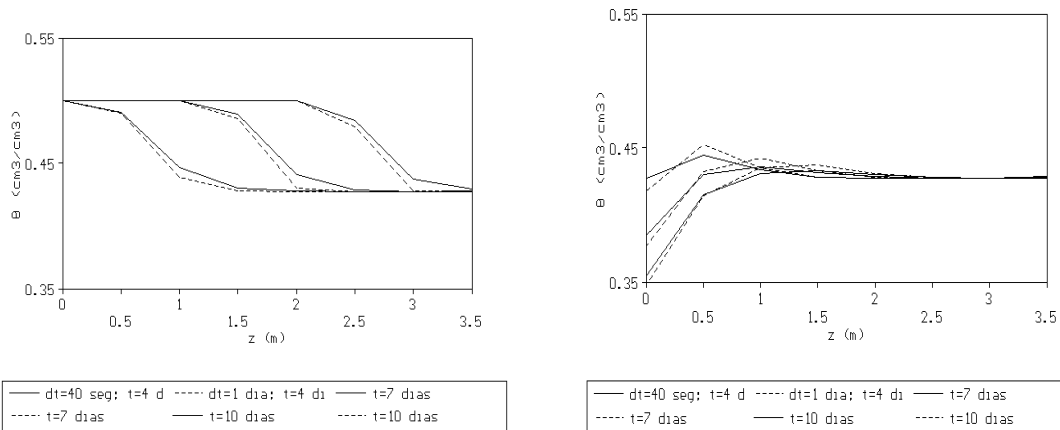


Figura 3. Estabilidad bajo condición encharcada

Figura 4. Estabilidad para condición de evapotranspiración

$$\alpha = \frac{-2.9604 - 2.648 \ln|\psi|}{\psi}$$

12

es decir que hay que considerar una situación de potencial representativo para obtener un valor de  $\alpha$ . La condición crítica de  $C_r$  y  $P$  se da para un valor máximo de  $\alpha$  por lo que la expresión 12 fue derivada respecto de  $\Psi$  y se obtuvo un máximo para  $\Psi = -0.964$  m, que corresponde a un valor de  $\alpha = 5.723$ . Partiendo de que el número de Péclét debe ser inferior a 2, se impone una condición a la discretización espacial:  $\Delta z_{max} < P/\alpha_{max} = 0.349$  m.. En relación al intervalo de cálculo temporal, conociendo el  $\Delta z$  límite, las condiciones las imponen los números  $\lambda$  y  $C_r$ . Aquí se calculó un valor de capacidad específica  $S_0(\Psi) = \partial\theta/\partial\Psi$ , derivando la ecuación 8. En el caso de  $C_r$ ,  $\Delta t < 0.5 \Delta z_{max} / 1.6 e-5 \cong 11000$  seg. La condición más crítica de  $\lambda$  es para humedades cercanas al punto de marchitez ya que  $S_0$  es mayor; resolviendo para  $\Delta t < 0.25 \Delta z_{max}^2 / 2.8 e-5 \cong 1000$  seg. Es decir, que la condición de  $\lambda$  es más exigente. Estos intervalos de discretización se tomaron en forma preliminar, dado que las expresiones 7 y 11 no son compatibles.

Para corroborar los intervalos límites se realizaron corridas con el esquema propuesto para diferentes intervalos de discretización temporal (manteniendo  $\Delta z_{max}$ ), y bajo diferentes condiciones de contorno: superficie encharcada, condición de evapotranspiración y condición de lluvia. La figura 3 muestra las diferencias entre los perfiles de humedad, determinados con pasos de tiempo de 40 seg. y 86400 seg. (1 día), para la situación de superficie del suelo encharcada. Esto es  $\theta_j(t) = \theta_s$ ,  $t=0.. \infty$ . La figura 4 muestra las diferencias entre los perfiles de humedad, determinados con pasos de tiempo de 40 seg. y 86400 seg. (1 día), para la situación de evapotranspiración actuando en la profundidad radicular. La tasa considerada fue de 5 mm/d. La situación de recarga por lluvias bajo máximas intensidades también fue analizada, allí las diferencias halladas para los dos pasos de tiempo son muy pequeñas. Las figuras muestran que a pesar del no cumplimiento de las condiciones de estabilidad para el caso en donde  $\Delta t$  es diario, el esquema no presenta oscilaciones visibles. Sí presenta, en cambio, un pequeño desfase con respecto a la solución numérica determinada con un paso de tiempo de 40 seg. Aparentemente, para los parámetros del suelo adoptados, el esquema se presenta como estable.

## 4. RESULTADOS DE APLICACIÓN

### 4.1 Avance del frente húmedo. Comparativa con Green y Ampt (G&A).

La condición de borde superior encharcado es la que se impone en el modelo de frente húmedo, desarrollado por Green y Ampt (1911). Bajo dicha condición la solución analítica propuesta por los autores señala que el avance del frente está regido por la siguiente ecuación:

$$z(t) = \frac{I}{\Delta\theta} \left[ K_s t + \psi \Delta\theta \ln\left(\frac{\psi + z}{\psi}\right) \right] \quad 13$$

donde  $\psi$  es el potencial matricial del frente húmedo,  $\Delta\theta$  la diferencia entre la humedad de saturación y la inicial,  $K_s$  la conductividad saturada,  $t$  el tiempo y  $z(t)$  la profundidad de avance del frente. Como puede observarse la ecuación es implícita en  $z(t)$  y debe resolverse mediante iteraciones sucesivas. La ecuación 13 se implementó en el programa de cálculo, utilizando los

parámetros característicos de suelo limoso (Chow y otros, 1994), que fueron los siguientes:  $\theta_s = 0,5$ ;  $\psi = 1,2$  m;  $K_s = 1$  mm/h. La condición inicial fue de humedad  $\theta_i = 0,425$ . La figura 5 muestra la comparación entre el esquema (denominado ZNS4) y la solución teórica de G&A. Las líneas de trazo indican los bordes, superior e inferior, del frente calculado mediante el esquema numérico.

## 4.2 Comparación con un esquema de Elementos Finitos

La segunda serie de validaciones se realizó a partir de resultados por Marozzi Righeto (1986). El trabajo presenta como objetivo la evaluación de la recarga en una cuenca experimental, mediante la integración de la ecuación de Richards (expresadas en términos de potencial matricial), integrada por elementos finitos (EF). La integración con el esquema de Galerkin se realiza por cuadratura gaussiana, con cuatro puntos internos por elemento. La integración en el tiempo se realiza mediante un esquema de diferencias implícito, cuyo sistema de ecuaciones es resuelto mediante iteraciones sucesivas. Las relaciones del suelo  $\theta(\psi)$  y  $K(\theta)$  fueron ajustadas a datos de campo y publicadas en el trabajo. Allí se han simulado una serie de situaciones: precipitación bajo intensidades diversas, evapotranspiración y redistribución de humedad en el perfil, superficie en condición de saturación. De los casos planteados se reprodujo este último, para el cual se pudo interpretar claramente cuales fueron las condiciones iniciales del problema. En el ejemplo, los intervalos de discretización temporal y espacial, fueron de 5 seg. y 0,1 cm, respectivamente. Se utilizó para comparar con EF, el esquema ZNS4, resuelto para la humedad volumétrica, primeramente. Luego de algunas pruebas, los intervalos de discretización temporal y espacial para el esquema ZNS4, fueron de 3 seg. y 1 cm, respectivamente. Puede observarse que, dada la elevada permeabilidad del suelo y la correspondiente *rapidez* con que se desplaza el frente de humedad es necesario, a fin de garantizar la estabilidad numérica, operar el esquema con  $\Delta t$  muy inferiores a los analizados en el ítem anterior. La figura 6 presenta la comparación de frentes de humedad calculados mediante ambos esquemas y en diferentes tiempos. Puede observarse en ella que el desfase entre los perfiles de humedad simulados equitemporalmente por ambos esquemas es considerable. La causa que motiva estas diferencias se relaciona con las diferentes ecuaciones que utilizan EF y ZNS4, la correspondencia entre el potencial y la humedad es fuertemente no lineal y resolver las incógnitas para una u otra variable no debería dar el mismo resultado. Para corregir la divergencia, se implementó el esquema de diferencias integrando la ecuación de momentum en términos del potencial  $\psi$ :

$$q_j^n = K(\theta_j^n) \left[ \frac{\psi_{j-1/2}^n - \psi_{j+1/2}^n}{\Delta z} + 1 \right] \quad 14$$

La proposición de esta ecuación de momentum, en lugar de la basada en el coeficiente de difusión, dio lugar al esquema denominado ZNS5. Las simulaciones con este nuevo esquema, se aproximaron notoriamente a los resultados del esquema EF, según se aprecia en la figura 7. En el trabajo original de Marozzi, la respuesta del esquema numérico fue comparada con los métodos de Horton, Kostikov y Green y Ampt, cuyos parámetros fueron calibrados con datos experimentales. Aquí, los métodos de Horton y Kostikov fueron comparados con los esquemas ZNS4 y ZNS5, presentado en la figura 8 la predicción de la capacidad de infiltración en función del tiempo de encharcamiento de la superficie del suelo, para cada uno de ellos. Puede observarse en la figura que a partir de los 200 seg. de simulación prácticamente los desfases entre los métodos son indistinguibles.

### 4.3 Modelo Euleriano-Lagrangiano de flujo en ZNS

El modelo propuesto por Matthey-Cabrera (1994), consiste en un esquema numérico Euleriano-Lagrangiano (EL) para resolver problemas de transporte de masas 3-D en medios no saturados. Previamente se resuelve la ecuación de flujo, para determinar humedades del suelo y campo de velocidades, que constituyen las variables de entrada del problema de transporte. Se emplea en la integración numérica el esquema de Galerkin en conjunto con diferencias finitas en el tiempo.

El problema planteado para la resolución de las ecuaciones de flujo (expresadas en términos de humedad) es el de superficie encharcada:  $\theta = \theta_s$ ,  $t > 0$ ,  $z = 0$ , bajo la condición inicial  $\theta = \theta_i$ ,  $t = 0$ ,  $z > 0$ . Cabrera y Espinosa (1992) resolvieron analíticamente la ecuación de flujo mediante la aproximación de Philips con  $\theta_s = 0,30$  y  $\theta_i = 0,05$ . En el trabajo se publican expresiones exponenciales para la conductividad no saturada  $k(\theta)$  y el coeficiente de difusión  $D(\theta)$ . Para comparar la solución analítica y la dada numéricamente por el método EL se empleó el esquema ZNS4. Los intervalos temporal y espacial adoptados fueron de 2,5 cm y 0,5 seg. La elección del  $\Delta t$  fue testeada para evitar inestabilidades numéricas en el esquema, de todas maneras en la cita bibliográfica no se aclara el paso de tiempo utilizado en los cálculos. La figura 9 muestra la comparación entre las tres soluciones empleadas. Allí puede notarse un pequeño desfase medianamente manifiesto para la profundidad del metro, pero el mismo se encuentra en el orden de magnitud del que presenta el esquema numérico que se está comparando, respecto a la solución analítica.

### 4.4 Esquema de Diferencias Finitas (DF) implícito

El modelo lo han desarrollado Muñoz y Hurtado (1994) a fin de cuantificar la infiltración de hidrocarburos y agua en suelos no saturados. Plantean un esquema de diferencias finitas, implícito, partiendo de la ecuación de momentum expresada en términos del potencial matricial. El flujo es analizado como un fenómeno multifase (agua, hidrocarburo, sólido y aire). Los parámetros del suelo se modelan con la expresión de Brooks y Corey. El esquema de diferencias finitas se compara con una solución analítica basada en la teoría de Green y Ampt. Se dan en la publicación los parámetros del suelo.

Tanto la solución analítica mencionada como la numérica dada por el esquema de DF fueron comparadas con el esquema ZNS4, aunque solamente para la fase acuosa. La figura 10 muestra la evolución de la posición del frente húmedo con el tiempo, tomada en los modelos numéricos como la profundidad para la cual la humedad cae en el intervalo  $0.875 \theta_s \pm 0.01$

## 5. CONCLUSIONES

Se ha planteado un esquema numérico sencillo de resolución basado en la técnica de diferencias finitas, discretizando las ecuaciones de continuidad y momentum en función de la humedad volumétrica (ecuación difusiva), resolviéndolas por separado mediante un planteo centrado y explícito en el espacio y el tiempo. Se ha realizado un análisis de estabilidad del esquema numérico, observando el comportamiento de números adimensionales (Courant, Péclet y el parámetro  $\lambda$ ) bajo diferentes situaciones de humedad. En función de las curvas



características del suelo seleccionadas, se establecieron los valores límites de intervalos de discretización espacial y temporal.

Para verificar la convergencia del esquema se han testeado diferentes casos con soluciones conocidas, ya sea analíticas o numéricas. Se ha comparado el esquema con soluciones analíticas dadas por el modelo de frente húmedo y las ecuaciones de Horton, Philips y Kostiaikov. Se lo ha comparado con esquemas numéricos basados en la técnica de elementos finitos, esquema implícito en diferencias finitas y frente a esquemas expresados en términos de potencial matricial. Las comparaciones fueron realizadas abordando problemas bajo diferentes condiciones de borde.

En todos los casos el esquema propuesto ha demostrando una gran versatilidad para adaptarse a diferentes condiciones de contorno y sencillez operativa para la resolución de las ecuaciones, presentando una convergencia satisfactoria a las soluciones analíticas y numéricas, con intervalos de discretización temporal del mismo orden. Se confirma, entonces, la buena performance del modelo para ser utilizado en la simulación de flujos de humedad en la ZNS.

## 6. BIBLIOGRAFIA

- Anguita F, Aparicio I, Candela L, Zurbano M; 1991; *Curso internacional de Hidrología Subterránea. Hidrogeología, Estado Actual y Prospectiva*; Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería; Universidad Politécnica de Cataluña; Barcelona; España.
- Candela L, Varela M; 1993; *La zona no saturada y la contaminación de las aguas subterráneas. Teoría, medición y modelos*; Editores Candela y Varela; CIMNE, Barcelona, España.
- Chow VT, Maidment D, Mays L; 1994; *Hidrología Aplicada*; Edit Mc Graw-Hill Interamericana SA; ISBN 0-07-010810-2; Colombia.
- Deeb Páez A, Díaz Granados M; 1988; *Balance hídrico en la cuenca media del río Magdalena, modelación de la interacción río, acuífero, suelo, vegetación y atmósfera*; Vol 2; XIII Congreso Latinoamericano de Hidráulica; La Habana; Cuba.
- García Villanueva N, Arroyo Correa V; 1994; *Esquema implícito para la solución de la ecuación de Richards. Consistencia, estabilidad y precisión*; Vol 3, p267; XVI Congreso Latinoamericano de Hidráulica, IAHR; Santiago; Chile.
- Hernández M, Ruiz de Galarreta A, Minghinelli L; 1994; *Reconocimiento de la ZNS y características ambientales del acuífero freático en la cuenca de los arroyos Martín-Carnaval. Pcia de Buenos Aires. Argentina. Metodología*; Vol 1, p55; II Congreso Latinoamericano de Hidrología Subterránea; Santiago; Chile.
- Marozzi Righetto A; 1986; *Modelação matemática da recarga natural puntual de um aquífero freático*; Anal 2, p227; XII Congreso Latinoamericano de Hidráulica; IAHR; San Pablo; Brasil.
- Matthey M, Cabrera G; 1994; *Modelo euleriano-lagrangiano de transporte de masas en flujos de aguas subterráneas no saturados. II. Validación de los modelos de flujo y de transporte*; Vol 3, p351; XII Congreso Latinoamericano de Hidráulica; IAHR; San Pablo; Brasil.
- Mijares A; 1986; *Estimación de propiedades hidráulicas de suelos no saturados con datos incompletos*; Anal 2, p205; XII Congreso Latinoamericano de Hidráulica; IAHR; San Pablo; Brasil.
- Muñoz J, Hurtado J; 1994; *Modelación numérica unidimensional de la infiltración de hidrocarburos en suelos no saturados*; Vol 1, p309; II Congreso Latinoamericano de Hidrología Subterránea; Santiago; Chile.
- Traversoni Domínguez L; 1990; *Una alternativa para la resolución numérica de los problemas de transporte y difusión en medios porosos*; Vol 2; XIV Congreso Latinoamericano de Hidráulica; IAHR; Montevideo; Uruguay.