

LA MODELACION MATEMATICA BIDIMENSIONAL DE FLUJOS A SUPERFICIE LIBRE

por

GERARDO ADRIAN RICCARDI

Investigador Consejo de Investigaciones Universidad Nacional de Rosario
 Centro Universitario Rosario de Investigaciones Hidromecánicas

RESUMEN

Se presenta en este trabajo un abordaje a la modelación matemática bidimensional de flujo a superficie libre y el desarrollo, implementación y explotación de un modelo matemático hidrodinámico para simulación cuasi-bidimensional para regímenes permanentes e impermanentes, tipificado como BIDIM2. El mismo resulta adecuado para su utilización en problemas de hidráulica fluvial, asociados con la propagación de ondas largas.

Primeramente se expone la formulación de las hipótesis fundamentales y las ecuaciones gobernantes, derivadas de las ecuaciones de Navier-Stokes. En el planteo del modelo no se tuvieron en cuenta las fuerzas de Coriolis y la acción del viento. Seguidamente se plantea la formulación del esquema numérico para la resolución de las ecuaciones. El mismo consiste en un método fuertemente implícito resuelto en diferencias finitas en direcciones alternadas. Posteriormente se describe la implementación computacional realizada para utilizarse en máquinas de pequeño porte (PC-AT-286 o superiores) y una síntesis de las aplicaciones realizadas consideradas más relevantes, en las cuales se ensayó al modelo en régimen permanente donde el esquema funciona como una técnica de relajación. Las simulaciones correspondieron a flujo en canales lisos y rugosos; con escalón de fondo, con estrechamiento brusco y canales con constricciones y expansiones.

Los resultados de las pruebas fueron contrastados con resultados calculados y observados por modelos y/o metodologías de calidad reconocida.

Por último se concluye acerca de las ventajas y limitaciones del modelo y la confiabilidad y la precisión de los resultados calculados.

1. INTRODUCCION

La modelación matemática de flujos a superficie libre es habitual en el campo de la Ingeniería Hidráulica y además constituye una poderosa herramienta para resolver distintos problemas en esta disciplina. En los casos en que el movimiento del fluido manifiesta un comportamiento bidireccional (en el plano de escurrimiento), no resulta eficiente trabajar con hipótesis de unidimensionalidad por lo que resulta adecuado la implementación de los llamados modelos matemáticos bidimensionales (o cuasi bidimensionales). Estos modelos simulan modelar con mayor grado de detalle el escurrimiento, tomando como dominio de las variables espaciales intervinientes en el escurrimiento, una superficie plana. En virtud de la creciente disponibilidad de computadores con mayor capacidad de memoria y velocidad de cálculo, se ha tomado cada vez más

2. ECUACIONES GOBERNANTES

2.1 Hipótesis Fundamentales

Las fuerzas actuantes contempladas por el modelo son: la gravedad, la fuerza de inercia debida a la rotación de la tierra (Coriolis) y las fuerzas superficiales debidas a la acción del viento; la resistencia al movimiento proveniente de la fricción contra el fondo y de la generación de la turbulencia por efecto de esa fricción, puede ser expresada usando una ley similar a la del escurrimiento permanente unidimensional (Cherry-Manning).

La forma del fondo del tramo a modelar es arbitraria, pero no debe cambiar con el tiempo y no debe presentar variaciones bruscas, la pendiente de fondo debe ser pequeña. Las condiciones del flujo consideradas son: flujo cuasi-bidimensional; o sea las magnitudes de las componentes de la velocidad en un plano paralelo a la superficie libre son considerables, y la velocidad en la dirección perpendicular ala superficie del escurrimiento es despreciable (frente a la aceleración de la gravedad).

Fue demostrado (1), que las hipótesis de condiciones de flujo resultan al superficie del escurrimiento (típicamente, una longitud de onda) es mucho mayor que la profundidad. Por ello es que se habla de ondas en aguas poco profundas.

2.2 Ecuaciones gobernantes

Las ecuaciones diferenciales que gobiernan el movimiento de un fluido (newtoniano) son las conocidas ecuaciones de Navier-Stokes (en tres dimensiones espaciales). Cuando los flujos son turbulentos, es conveniente filtrar los movimientos en escala turbulenta; este procedimiento conduce a las Ecuaciones de Reynolds. Las ecuaciones para flujo cuasi-bidimensional se obtienen por integración de las ecuaciones de Reynolds sobre la profundidad local h , y utilizando las hipótesis del modelo teórico. Si U , V y W (donde $W = \frac{1}{h} \int_0^h w \, dz$) son las componentes del vector velocidad (media en el sentido de Reynolds), se definen las velocidades medias sobre la profundidad como :

$$u = 1/h \int_{z_0}^{z_0+h} U dz \quad (1)$$

$$v = 1/h \int_{z_0}^{z_0+h} V dz \quad (2)$$

donde z es la coordena da vertical, y z la cora (local) del fondo. Las ecuaciones para flujo cuasi-bidimensional son:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(huv)}{\partial x} - fuv + gh \frac{\partial(h+z_0)}{\partial x} \\ + \frac{\tau_x}{\rho} - \frac{\tau_x}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial(hT_{xx})}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial(hT_{xy})}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(hv)}{\partial t} + \frac{\partial(huv)}{\partial x} + \frac{\partial(hv^2)}{\partial y} - fvu + gh \frac{\partial(h+z_0)}{\partial y} \\ + \frac{\tau_y}{\rho} - \frac{\tau_y}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial(hT_{xy})}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial(hT_{yy})}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

donde t tiempo; x e y : coordenadas espaciales de un plano horizontal; f parámetro geotrófico ($f = 2\omega \sin \lambda$; λ : latitud geográfica); g : aceleración de la gravedad; ρ : densidad del fluido; T_{xx} T_{yy} componentes de la tensión de corte contra el fondo; T_{xy} T_{yx} componentes de la tensión de corte contra la superficie libre (viento) T_{xx} T_{yy} T_{xy} las tensiones efectivas, las que se definen como :

$$T_{xx} = \frac{1}{h} \int_{z_0}^{z_0+h} \left[2\rho v \frac{\partial U}{\partial x} - \rho \overline{u^2} - \rho(U-u)^2 \right] dz \quad (6)$$

$$T_{yy} = \frac{1}{h} \int_{z_0}^{z_0+h} \left[2\rho v \frac{\partial V}{\partial y} - \rho \overline{v^2} - \rho(V-v)^2 \right] dz \quad (7)$$

donde v : viscosidad cinemática; u' , v' : componentes de las fluctuaciones turbulentas de la

$$T_{xx} = \frac{1}{h} \int_{z_0}^{z_0+h} \left[\rho v \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) - \rho \overline{u'v'} - \rho(U-u)(V-v) \right] dz \quad (8)$$

velocidad en las direcciones x e y respectivamente.

Las tensiones de corte contra el fondo pueden expresarse en una manera análoga a las expresiones para movimiento permanente unidimensional:

$$\tau_x = \rho \frac{g}{C^2} u(u^2+v^2)^{1/2} \quad (9)$$

$$\tau_y = \rho \frac{g}{C^2} v(u^2+v^2)^{1/2} \quad (10)$$

donde c : es el coeficiente de Chezy

Si se desea incluir la influencia de las tensiones de corte contra la superficie libre, o sea las debidas a la acción del viento, deben ser suministrados como datos de entrada del modelo.

2.3 Tensiones efectivas

Las ecuaciones (6) a (8) muestran que existen tres contribuciones cualitativamente distintas, a las tensiones efectivas: tensiones viscosas; tensiones turbulentas y tensiones convectivas. Las primeras pueden despreciarse para altos números de Reynolds frente a las turbulentas. Existen una gran de variedad de modelos de turbulencia, desarrollados para la turbulencia tridimensional. Algunos de estos modelos han dado notables resultados para la simulación cuasi-bidimensional. Un modelo simple propuesto por Méndez (1) fue incorporado al modelo. El mismo consiste en expresar a las tensiones turbulentas como :

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{z_0}^{z_0+h} (-\overline{u^2}) dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_0}^{z_0+h} (-\overline{u'v'}) dz = h v_i \left(\frac{\partial u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y^2} \right) \quad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{z_0}^{z_0+h} (-\overline{u'v'}) dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_0}^{z_0+h} (-\overline{v^2}) dz = h v_i \left(\frac{2\partial v}{\partial x^2} + \frac{2\partial v}{\partial y^2} \right) \quad (12)$$

v_i es la viscosidad cinemática de torbellino, la cual se considera constante y conocida.

La tercera contribución a las tensiones efectivas, como se mencionara, son las tensiones convectivas, que resultan de la integración sobre la profundidad de los términos convectivos tridimensionales. Puede demostrarse que las mismas son relevantes en general, cuando el radio de curvatura de las líneas de corriente es comparable a la profundidad.

2.4 Condiciones iniciales y de contorno

Las ecuaciones (3) a (5) son de primer orden en el tiempo, por lo que es necesario especificar como condiciones iniciales las distribuciones de h , u y v .

Una de las características del sistema de ecuaciones (3) a (5) es que sus soluciones, aún con condiciones iniciales continuas, pueden volverse discontinuas (2). En este caso las soluciones

se denominan débiles o generalizadas. Físicamente esto significa que se genera una variación brusca de las variables de flujo h , u y v sobre una distancia demasiado corta como para ser resuelta por la teoría para aguas poco profundas.

La especificación de las condiciones de contorno está ligada al proceso de propagación de la información. La teoría de las curvas características para las ecuaciones (3)-(5) muestran que la información se propaga a lo largo de la superficie y el eje del como característico. Estos conos permiten definir el dominio de dependencia del valor de la solución en un punto y el dominio de influencia de ese punto. El método de las características demuestra que deben especificarse las siguientes condiciones de contorno, en función del tipo de contorno y del tipo de régimen de flujo normal al contorno (1); (3); (7):

CONTORNO	FLUJO	N° Condiciones
ENTRANTE	SUBCRITICO	2
ENTRANTE	SUPERCRITICO	3
RIGIDO	SUBCRITICO	1
SALENTE	SUBCRITICO	1
SALENTE	SUPERCRITICO	0

En flujo subcrítico, en general se especifican u y v en el contorno entrante y h en el contorno saliente. Sobre el contorno rígido se considera que la componente normal al contorno de la velocidad sea nula. Esta consideración implica una condición de libre deslizamiento sobre el contorno, compatible con la ausencia de tensiones de corte. El significado físico de esta condición significa despreciar el espesor de la capa límite.

En el caso de producirse zonas de recirculación en el flujo modelado, donde las tensiones efectivas sean de importancia, es conveniente cambiar localmente el carácter de las ecuaciones, por ejemplo introduciendo un modelo de turbulencia como el planteado en las ecuaciones (1.11) y (1.12). En este caso el sistema se vuelve elíptico, y es necesario especificar ambas componentes de la velocidad en los contornos.

3. CARACTERIZACION DE LAS ONDAS Y ESTRUCTURAS DE LAS ONDAS

El análisis general del fenómeno de propagación e ondas bidimensionales en aguas poco profundas es muy complejo e insoluble, por lo cual para determinar soluciones de carácter analítico es necesario introducir simplificaciones. La solución del sistema de ecuaciones gobernantes de plantas sobre un flujo de base uniforme:

$$h = h_0 + h_1 \quad ; \quad u = u_0 + u_1 \quad ; \quad v = v + v_1 \quad (13)$$

donde debe cumplirse que las perturbaciones sean mucho menores que los valores de base:

$$|h_1| \ll |h_0| \quad ; \quad |u_1| \ll \left(u_0^2 + v_0^2 \right)^{1/2}$$

Introduciendo estas ecuaciones en las gobernantes se llega a constituir el punto de partida para el análisis del fenómeno ondulatorio en flujos cuasi-bidimensionales.

Para la solución al problema lineal se consideraran ondas planas, caracterizadas por su frecuencia y la orientación de su dirección de propagación. las soluciones arrojan tres tipos distintos de ondas a saber:

W A: *Onda de Avance* W R: *Onda de Retroceso* W E: *Onda Estacionaria*

Las estructuras de las ondas determinadas a partir del análisis lineal se pueden clasificar en dos grupos de acuerdo a su dirección de propagación:

3.1 Caso $\theta = 0$ - Onda que se propaga paralelamente al flujo

Onda Estacionaria: Cuando se analiza la onda estacionaria resulta que la única onda existente es v , es decir, una oscilación transversal al flujo (Figura 1a). Para cada partícula, la perturbación en la velocidad es la misma a lo largo de toda su extensión.

Onda de Avance y de Retroceso: El análisis de las soluciones indican que no existe oscilación transversal. Estas ondas están compuestas por oscilaciones longitudinales de velocidad, las cuales producen oscilaciones en la altura (Figura 1b). Estas ondas están afectadas por todos los mecanismos dinámicos: inercia, gradiente de presiones, fricción y peso efectivo. Es interesante observar que la onda estacionaria está completamente desacoplada de las de avance y retroceso. Por esta razón en un análisis unidimensional aparecen sólo las dos últimas (avance y retroceso), ya que no se consideran las oscilaciones transversales de la velocidad.

3.2 Caso $2\theta = \pi/2$ - Onda que se propaga perpendicularmente al flujo

Onda Estacionaria: Al igual que en el caso anterior la partícula del fluido está afectada por una perturbación uniforme de velocidad transversal a la dirección de la propagación de la onda, y esto no produce una perturbación de la altura de la partícula de fluido. Asimismo es claro que la fricción contrarresta la inercia provocando la atenuación de la oscilación (el peso de la partícula está balanceado por la fuerza de fricción principal). La esquematización de esta onda se presenta en la Figura 1c.

Onda de Avance y Retroceso: Se demuestra que estas ondas están compuestas por los tres tipos de oscilaciones (Figura 1d). La oscilación longitudinal v_1 produce una perturbación h_1 en la altura de la partícula, la cual a su vez provoca una oscilación transversal u_1 . En este complejo movimiento intervienen todos los mecanismos dinámicos.

4. RESOLUCION NUMERICA DE LAS ECUACIONES

4.1 Formulación del esquema numérico

En problemas fluviales el flujo está dominado generalmente por el equilibrio entre el peso efectivo y la fricción contra el fondo, resultando pequeña la contribución de la inercia, especialmente cuando el N de Froude es bajo. A consecuencia de esto no es crítica la

etización de los términos convectivos, siempre que no se produzcan inestabilidades. El método de Colias ($f = 0$) fueron despreciadas. Las ecuaciones gobernantes se discretizaron de modo a un método fuertemente implícito de direcciones alternadas. La Figura 2 muestra la malla de discretización adoptada. Puede observarse que las variables dependientes h, u, v se centran en los distintos de la malla; lo cual resulta conveniente para la aplicación de las condiciones de

$$\frac{h_{i,j}^{n+1/2} - h_{i,j}^n}{\Delta t/2} + \left[u \frac{\partial h}{\partial x} \right]_{i,j}^{n+1/2} + \left[v \frac{\partial h}{\partial y} \right]_{i,j}^{n+1/2} + \dots = 0 \quad (14)$$

$$\frac{u_{i+1/2,j}^{n+1/2} - u_{i+1/2,j}^n}{\Delta t/2} + \left[u \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{i+1/2,j}^{n+1/2} + \left[v \frac{\partial u}{\partial y} \right]_{i+1/2,j}^{n+1/2} + \dots = 0 \quad (15)$$

$$\frac{v_{i,j+1/2}^{n+1/2} - v_{i,j+1/2}^n}{\Delta t/2} + \left[u \frac{\partial v}{\partial x} \right]_{i,j+1/2}^{n+1/2} + \left[v \frac{\partial v}{\partial y} \right]_{i,j+1/2}^{n+1/2} + \dots = 0 \quad (16)$$

El suprándice indica el paso temporal de cálculo. Al linealizar el sistema de

CIADERNOS del CURHAM, no.2, 1er. Semestre, 1996

ecuaciones (14) a (16) las ecuaciones resultantes aparecen acopladas entre sí por las variables: $h_{i,j}^{n+1/2}, u_{i+1/2,j}^{n+1/2}, v_{i,j+1/2}^{n+1/2}$ y desacopladas por las variables: $v^{n+1/2}$.

4.2 Condiciones iniciales y de contorno

Las condiciones iniciales necesarias para el esquema numérico son los valores de las variables: $h_{i,j}, v_{i,j}$ y $u_{i,j}$ en toda la malla de discretización para $t = 0$. Los contornos deben ser representados por líneas que coincidan con la malla de discretización, por lo que puede ser eventualmente quebrada, por lo tanto los contornos resultantes son localmente paralelos a los ejes x e y . La implementación rigurosa de las condiciones de contorno es una tarea compleja. En el esquema aquí descrito sólo se contemplan las condiciones de contorno para régimen subcrítico. En la Figura 3 se presentan las tres condiciones de contorno con que opera el esquema.

5. IMPLEMENTACION COMPUTACIONAL. PROGRAMA BIDIM2

El esquema numérico planteado en el punto 3 fue implementado computacionalmente en la serie de programas BIDIM del Departamento de Hidráulica e Ing. Sanitaria de la Universidad Nacional de Rosario. El programa estaba tipificado como BIDIM2 (el número indica la etapa de evolución del programa). Este sistema es apto para la simulación numérica de flujos cuasi-hidromecánicos en régimen subcrítico, permite la simulación de regímenes fluviales y lacustres. La topografía del fondo del curso puede ser arbitraria, lo mismo que la geometría de los contornos laterales tipo costa. Los contornos de entrada y salida pueden ser también ser arbitrarios pero es preferible que sean paralelos a uno de los ejes coordenados.

Las condiciones de contorno representables en las fronteras son: borde rígido, flujo entrante o flujo saliente. En el caso de borde con fluido entrante o saliente y en régimen impermanente se debe especificar la variación de h, u o v en función del tiempo en forma tabulada.

El código computacional fue construido originalmente en lenguaje T-Pascal 6.0 y en máquinas del tipo PC-AT-286. Logicamente que el modelo puede ser operado en máquinas superiores, siendo su rendimiento más elevado en el caso de equipos de generación tipo Pentium.

6. APLICACIONES DEL MODELO Y ANALISIS DE RESULTADOS

Se realizaron diversas pruebas con el objeto de: Interpretar los resultados calculados por el modelo ante variaciones de los distintos parámetros que caracterizan el flujo (rugosidad, viscosidad, velocidad entrante, pendiente longitudinal, sección transversal, etc.) y de cálculo ($\Delta x, \Delta y, \Delta t$); avanzar en la confiabilidad y exactitud del sistema de modelación y determinar los límites e utilización del programa BIDIM tanto desde el punto de vista del esquema matemático como del soporte computacional.

A continuación se exponen una síntesis de un grupo de pruebas realizadas. Los casos de aplicación aquí expuestos correspondieron a ejemplos tomados de distintas bibliografías (1), (8), (9) a contracciones-expansiones de flujo en cursos de aguas naturales de la región. Se contrastaron sus resultados del modelo aquí descrito con los resultados calculados con modelos de calidad comprobada y reconocida y con resultados calculados mediante metodologías de también probada validez. El flujo en todos los casos fue de tipo permanente, donde desde el punto de vista matemático el esquema de resolución funciona como una técnica de relajación.

En primer lugar se simuló el escurrimiento en un canal horizontal de sección rectangular, uniforme y fondo rugoso. Los resultados se compararon con los obtenidos mediante un cálculo bidimensional realizado con el modelo DHIS7 (8). Las características geométricas del canal, dimensiones del flujo y los parámetros de discretización del tramo fueron: Longitud $L = 600$ m, ancho $An = 300$ m; Velocidad de entrada $0,76$ m/s; altura pelo de agua en sección aguas abajo $1,00$ m; coeficiente de rugosidad de Manning $\eta = 0,030$; viscosidad cinemática $\nu_1 = 0$ m²/s; caudal específico $q = 1$ m³/s; $\Delta x = \Delta y = 30$ m; pendiente longitudinal $i = 0$ %. No se computó la participación de ningún tipo de desviación parásita de la velocidad. La comparación de las alturas del pelo de agua logrados con el modelo bidimensional y unidimensional resultó satisfactoria, coincidiendo de los valores calculados a lo largo de la sección transversal (perfil constante). Puede decirse que los contornos rígidos laterales, al ser paralelos al movimiento del flujo no produce localización. Los caudales entrante y saliente al cabo de la convergencia fueron: $Q_{ent} = 300$ m³/s y $Q_{sal} = 298$ m³/seg, resultando el error porcentual de $0,66$ %, que se consideró aceptable. El último Δt que permitió una rápida convergencia fue de 100 seg. y la misma se logró con siete pasos de tiempo. La relación tiempo real de máquina/tiempo de simulación es de 8 %. La relación real de máquina/T simulación indica un rendimiento del modelo para efectuar una prueba.

Un segundo grupo de ensayos consistió en la simulación de escurrimiento en un canal de características similares al anterior pero alineado a 45° respecto de la grilla de cálculo. Se computó a manera influyente que ejerce el contorno del canal al ser representado por una traza quebrada de acuerdo a Menéndez (1) se provoca la aparición de la llamada "capa de pared". En la experiencia presentada en (1) esta capa tuvo un espesor de cinco celdas. En la prueba aquí expuesta se llegó al mismo resultado. El perfil transversal del módulo de velocidades resultó del tipo parabólico, recordándose valores de velocidad en el eje del canal superiores a los calculados con el canal alineado recto. El mayor Δt con el cual no se observaron inestabilidades fue de $\Delta t = 20$ seg y la convergencia se logró después de 70 pasos de tiempo. La relación $T_{máq}/T_{sim}$ fue de $0,64$ en AT-286 y $0,10$ en máquinas tipo Pentium. Obsérvese que en este caso el computador AT-286 significa una monitora limitación debido a su baja velocidad de cálculo.

Otro grupo de pruebas consistió en la modelación de flujo en un canal con cambio en la geometría de fondo. El objeto fue probar la respuesta del modelo ante un caso de escurrimiento en un canal rectangular, horizontal y sin rozamiento y con un escalón de fondo. Las características de la prueba fueron $L = 2790$ m; $An = 900$ m; velocidad aguas arriba $= 3,09$ m/s; altura de pelo de agua aguas abajo $= 12,00$ m; $q = 73,20$ m²/s; $\eta = 0,0$; $\nu_1 = 0,0$; $\Delta x = \Delta y = 90$ m. Los valores calculados de alturas difieren en menos de 1 % respecto de los que resultan de aplicar el teorema de Bernoulli de energía, error que se considera admisible. No se verificaron ningún tipo de perturbaciones numéricas. La mejor convergencia se logró con $\Delta t = 20$ seg, realizada con el modelo HDROBID por Menéndez (1) logrando resultados totalmente semejantes.

Otras pruebas correspondieron al caso del flujo escurriendo a través de una brecha situada

en el centro de la sección transversal de un canal horizontal sin rozamiento. Se realizaron ensayos con viscosidad cinemática nula $\nu_1 = 0$ y con viscosidad elevada $\nu_1 = 300$ m²/seg. En la Figura 4 se presenta el dominio de cálculo. Las características comunes de las pruebas fueron: agua aguas abajo $= 12,00$ m; $\eta = 0,0$; $i = 0$ %; $Q = 50,000$ m³/seg.; $\Delta x = \Delta y = 90$ m. En la prueba con viscosidad $\nu_1 = 0$ se observó que el flujo a partir de la brecha se difunde débilmente por efectos inerciales, se computa una leve recirculación a ambos lados del chorro principal. De ser posible, se evita mediante una adecuada discretización espacial que las zonas de circunciones alcancen las zonas de frontera, puesto que las condiciones de borde impuestas a los diferentes casos de modelación no incluyen el reflujó. Caudno se dá este fenómeno debe evaluarse la magnitud del error introducido.

Aplicando el teorema de Bernoulli (conservación de energía mecánica) la diferencia de alturas en de $1,70$ m y aplicando la clásica fórmula de caudal escurriendo por un vertedero sin rozamiento (9) la diferencia de alturas es de $2,25$ m, esta última fórmula contempla el fenómeno de pérdida de energía localizada. De acuerdo a lo anterior podemos arribar a la conclusión de que la pérdida de energía mecánica adicional que se computa en la presente prueba se debe a la difusión turbulenta. Este fenómeno se acentúa en la cercanía de la brecha. Las altas velocidades contribuyen a acrecentar los procesos de difusión y contradiusión. Esta prueba logró converger y estabilizarse para un $\Delta t = 20$ seg. se logró en recientos cincuenta pasos de tiempo y la relación $T_{máq}/T_{sim}$ fue de $1,3$ en AT-286 y $0,2$ en Pentium. En la prueba con viscosidad cinemática elevada $\nu_1 = 300$ m²/seg (mayor difusión turbulenta) pudo apreciarse una mayor difusión del flujo a partir de la brecha que en el caso anterior. Asimismo se computó una mayor recirculación. A causa de la introducción de la difusión turbulenta también se computó una mayor desviación de las costas de pelo de agua que en el caso anterior. En la Figura 5 se presenta la salida visual que genera el modelo mientras opera, que no trata del campo de velocidades. En la Figura 6 se presentan las líneas de igual velocidad de (líneas equipotenciales). En las Figs. 7 y 8 se presentan los perfiles transversales de los módulos de velocidades y el perfil longitudinal del pelo de agua. En la Figura 9 se grafica la superficie libre del fluido de la escala distorsionada). El Δt que arrojó mejores resultados fue de 20 seg y convergió en 200 pasos. En este caso se convergió más rápidamente debido a los mayores procesos difusivos. Las tendencias de los resultados en esta prueba son totalmente semejantes a las obtenidas por Menéndez (1) al utilizar el modelo HDROBID.

En otras pruebas se simuló escurrimiento modelando particularidades de cursos de agua de la región. Fueron modelado el movimiento de flujo en un canal con sucesivas expansiones y contracciones y en un canal de tipo real con una construcción excéntrica (puente). Los resultados se compararon con los que arroja la metodología propuesta por Ven Te Chow (9) para este tipo de problemas. Se probaron dos valores de discretizaciones espaciales para evaluar la posible mejora de la precisión de los resultados al introducir el doble de puntos de cálculo.

El factor que mejor evalúa los resultados calculados por el modelo es la comparación de las alturas computadas. Se observó que los valores calculados por el modelo difirieron como máximo en un $0,77$ % de los calculados por una metodología de calidad reconocida como la de Ven Te Chow (9). Lógicamente que la configuración puntual en la construcción no se reproduce, puesto que esto no es posible hacerlo con un modelo de escurrimiento general, pero a los efectos de la evaluación de los cambios de configuración macroscópica del flujo el modelo arrojó resultados de confiabilidad y precisión satisfactorios.

8. CONCLUSIONES

Se ha desarrollado un modelo matemático cuasi-bidimensional de flujo a superficie libre

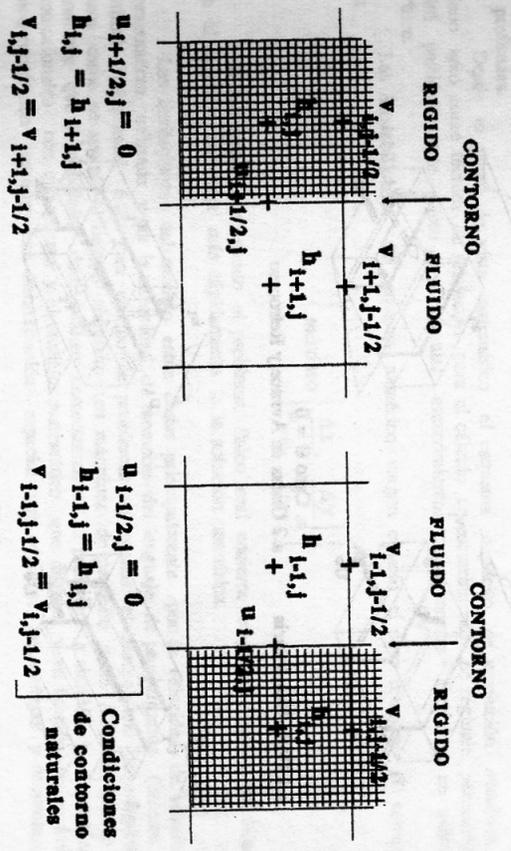


Figura 3a. Contorno Rígido : costa, borde de canal, presa, etc

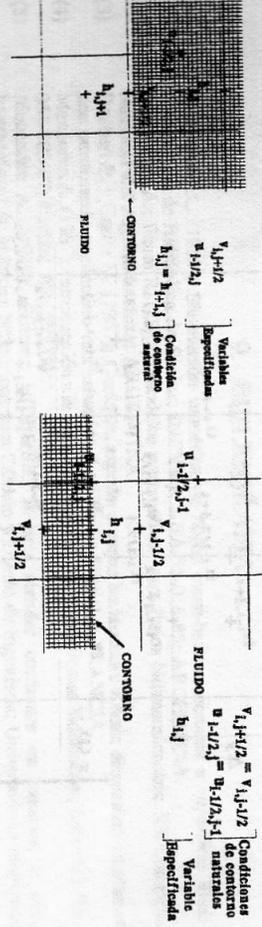


Figura 3b. Contorno Entrante

Figura 3c. Contorno Saliente

Figura 3. Condiciones de Borde.

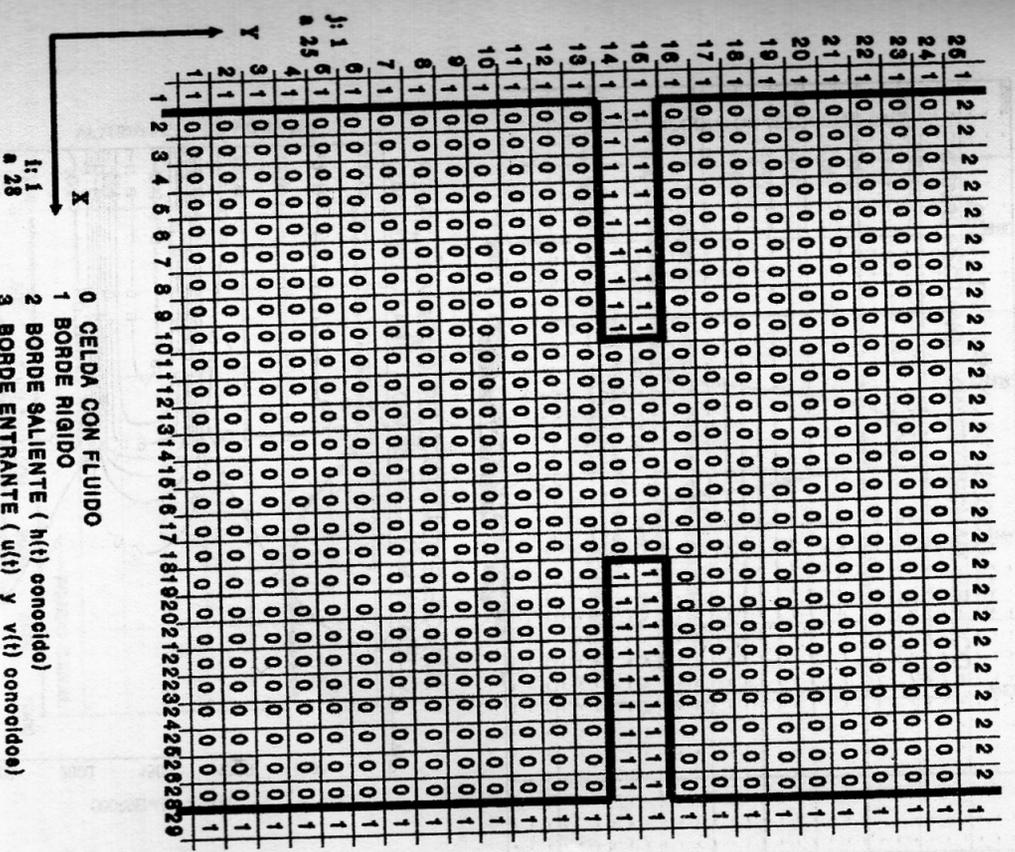


Figura 4. Dominio de Cálculo

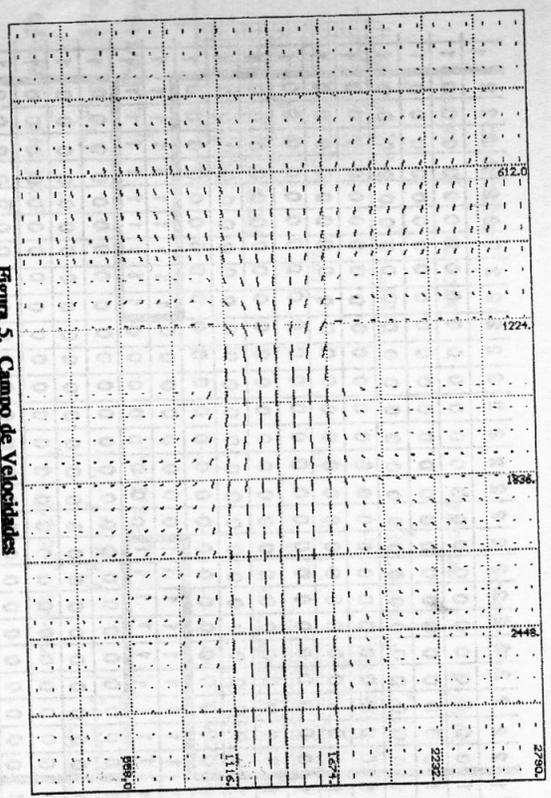


Figura 5. Campo de Velocidades

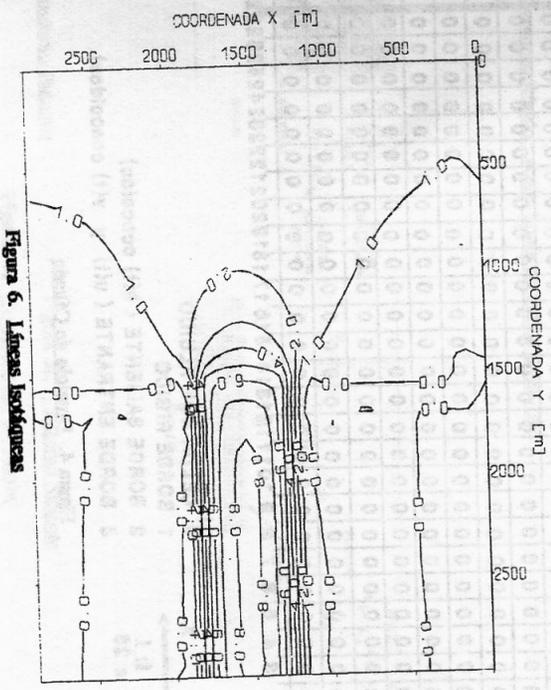


Figura 6. Líneas Isotopicas

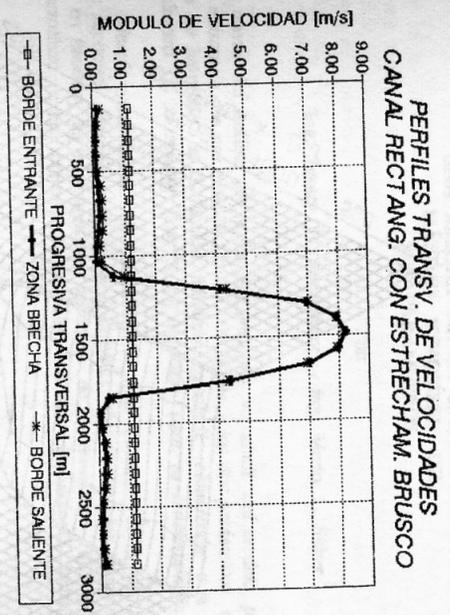


Figura 7. Perfiles Transversales de Velocidades

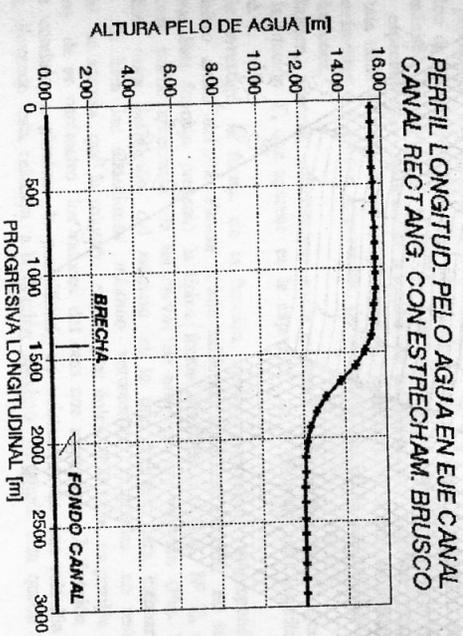


Figura 8. Perfil Longitudinal de Peto de Agua

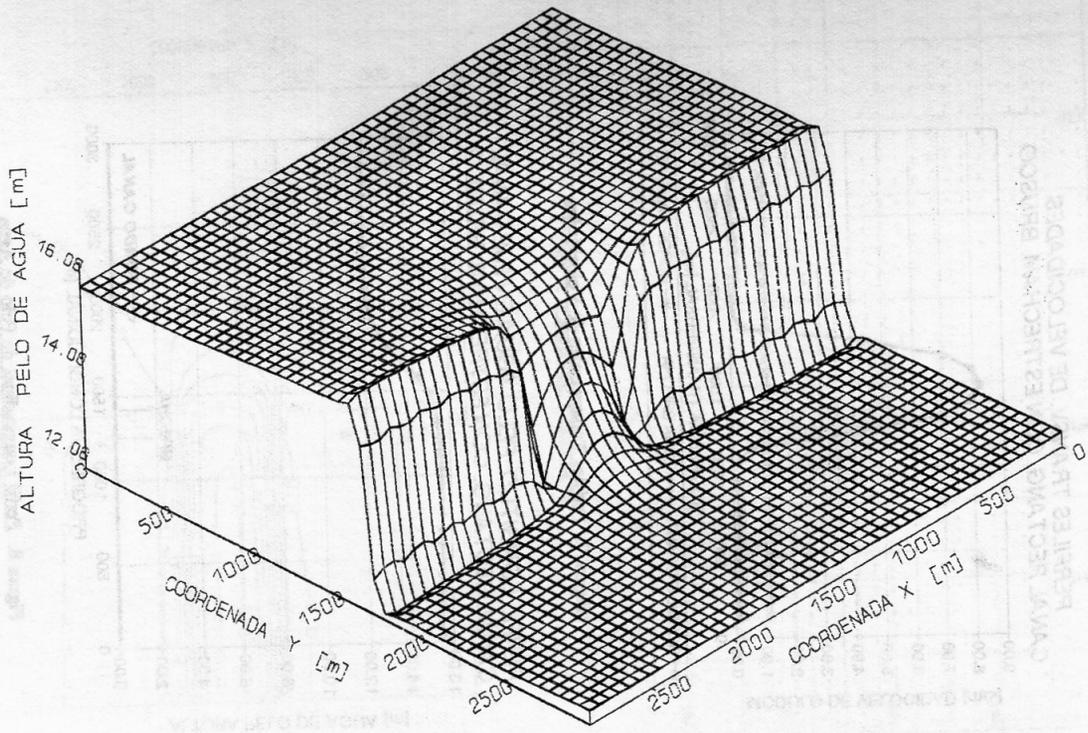


Figura 9. Vista de Superficie de Agua (a escala distorsionada)

LA DISTRIBUCIÓN BETA:
UNA MEJORA EN LA ESTIMACIÓN
MÁXIMO VEROSÍMIL DE
SUS PARÁMETROS

Por:

Ing. Susana B. Vainelberg - Ing. Mario L. Silber 1

Resumen: A través del análisis de la función máximo verosímil del modelo probabilístico Beta, se descubrió la existencia de una relación lineal que liga a los dos parámetros de forma de la misma. Esta relación se introdujo en la función máximo verosímil, obteniendo a la misma en función de un solo parámetro γ , al mismo tiempo, su solución (que es indeterminada en el caso de dos parámetros). Se propone, además, una estimación probabilística de las cotas de la distribución, que hasta el momento se suponían como el máximo y el mínimo observados; las ecuaciones correspondientes se expresan en función de las longitudes y asimetría de las muestras. Se muestra una aplicación de todo lo desarrollado a una muestra de caudales mínimos instantáneos anuales del Río Paraná en Corrientes.

1 - INTRODUCCIÓN.

El estudio de los modelos probabilísticos y la estimación de sus parámetros son uno de los grandes problemas con que se enfrentan los hidrólogos al analizar variables aleatorias.

Uno de los modelos que más dificultades presenta en la estimación de los parámetros por el método máximo verosímil, es el BETA. Los métodos de resolución propuestos en gran parte de la literatura especializada plantean la solución de las ecuaciones máximo verosímiles a través del empleo de una tabla de valores de los parámetros. Esto se debe a que las ecuaciones son funciones de ambos parámetros, y quedan expresadas de forma tal que no es posible explicitarlas, admitiendo infinitas soluciones.

Existen, además, dificultades en la evaluación de la función Ψ , derivada del logaritmo natural de la función Γ , que aparece en la expresión de la derivada del logaritmo de la función de verosímilitud.

Se investigó la forma de la función máximo verosímil correspondiente a la variable Caudal mínimo anual del Río Paraná, aún sabiendo que esta variable no se distribuye según el modelo Beta. Esta función presentó la típica forma acompañada (Fig. Nº 1), con un máximo bien definido como puede apreciarse en las curvas de nivel de esta función (Fig. Nº 2).

Esta clara definición del máximo es lo que interesa para estimar los valores de los parámetros. Si bien las ecuaciones máximo verosímiles originales no resuelven el problema, fácilmente se aprecia que la solución existe y es única. Más aún, es posible ver que para valores determinados de un parámetro los valores del otro que maximizan la función se ubican sobre una recta. Esto condujo a plantear la posibilidad de existencia de una relación lineal entre ambos parámetros; llevando esta relación a la función máximo verosímil ésta queda expresada en función