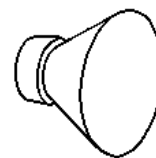




Laboratorio de Acústica y Electroacústica – Escuela de Ingeniería Electrónica
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario



Transformada de Hilbert-Huang y sus aplicaciones en ingeniería y ciencias

Fernando A. Marengo Rodriguez ^{(a), (b), (c)}

(a) [Laboratorio de Acústica y Electroacústica](#), [Escuela de Ingeniería Electrónica](#), [Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura](#), [Universidad Nacional de Rosario](#), Riobamba 245 bis, Rosario, Argentina. CP: S2000EKE.

(b) [Laboratório de Vibrações e Acústica](#), [Departamento de Engenharia Mecânica](#), [Universidade Federal de Santa Catarina](#), Campus Universitário Reitor João David Ferreira Lima, Trindade, Florianópolis, Santa Catarina, Brasil. CEP: 88040-900.

(c) Correo electrónico: fmarengorodriguez@yahoo.com.ar, fmarengo@eie.fceia.unr.edu.ar

Resumen

Se presenta el algoritmo EMD (empirical mode decomposition, o descomposición empírica de modos) y la transformada de Hilbert-Huang, junto a sus aplicaciones para el procesamiento de señales, como por ejemplo el filtrado robusto de ruido, la detección de componentes armónicas y la codificación digital de audio. El método EMD descompone cualquier señal real en una secuencia de funciones puramente oscilatorias moduladas en amplitud y frecuencia, llamadas IMF (intrinsic mode functions, o funciones de modo intrínseco). Estas funciones permiten construir una representación gráfica de energía-tiempo-frecuencia de los datos de entrada, llamada transformada de Hilbert-Huang, de mayor precisión que otras herramientas clásicas. Estas herramientas fueron desarrolladas en el Laboratorio de Acústica y Electroacústica de la Universidad Nacional de Rosario, Argentina.

PACS: 43.60.Ek; 43.60.Wy.

Palabras clave: Procesamiento digital de señales, descomposición empírica de modos, transformada de Hilbert-Huang, distribución energía-tiempo-frecuencia, codificación de audio.

1 Introducción

Cualquier señal temporal con modulación de amplitud (AM) y frecuencia (FM) suave puede describirse como una función de tipo $c(t) = a(t) \times \cos[\phi(t)]$, donde $a(t)$ y $\phi(t)$ son la *amplitud* y la *fase instantánea*, respectivamente. De acuerdo con [Hahn, 1996], esa señal puede ser asociada a una función compleja del tipo $z(t) = a(t) \times \exp[i\phi(t)]$, llamada *señal analítica*, manteniendo la misma información que la señal original. La ventaja de la señal analítica es que permite calcular la amplitud y fase con mayor facilidad, pues $a(t) = \|z(t)\|$ y $\phi(t) = \text{Im}\{\ln[z(t)]\}$, donde $\text{Im}\{\bullet\}$ es el operador parte imaginaria.

El algoritmo EMD [Huang et al., 1998], [Rilling et al., 2003] es una herramienta de procesamiento digital de señales que permite descomponer cualquier señal temporal $x(t)$ en una serie de funciones puramente oscilatorias con modulación AM-FM suave y fácilmente caracterizables. Estas funciones son llamadas IMF y pueden tener asociadas sus propias señales analíticas.

El método EMD se define a través del diagrama de flujo mostrado en la Figura 1. Este proceso iterativo, conocido como *tamizado*, consiste en extraer las diferentes componentes oscilatorias en forma recursiva, desde el detalle más fino (mayor resolución) hasta el detalle más grosero (menor resolución). Para esta extracción, se resta la *media local* $m(t)$ a la señal analizada $x(t)$. Esta media se calcula como el promedio de las envolventes superior $e_{\max}(t)$ e inferior $e_{\min}(t)$, que son calculadas via interpolación entre los máximos y mínimos locales de la señal en cuestión, respectivamente. En realidad, este proceso es iterativo porque el *detalle local* $d(t)$ extraído de la entrada puede no ser suficientemente simétrico en relación al eje de abscisas. Esta simetría es importante, pues de cumplirse se facilita el análisis matemático del detalle.

Un ejemplo de análisis de señales con el método EMD se expone en la Figura 2¹. El panel (a) muestra la señal de entrada $x(t)$, que consiste en la suma de una senoide de amplitud 0,5 y frecuencia 0,02 y dos señales de barrido espectral parabólicos de amplitud unitaria y frecuencias contenidas en las bandas [0,05; 0,1] y [0,08; 0,2]. El panel (b) muestra, para un pequeño intervalo temporal, la entrada junto a las envolventes superior $e_{\max}(t)$ (color azul) e inferior $e_{\min}(t)$ (color rojo) como resultado de la interpolación entre los máximos y mínimos locales de la entrada, respectivamente. En ese panel también se muestra en color magenta la media local $m(t) = \frac{1}{2} \times [e_{\max}(t) + e_{\min}(t)]$. Esta señal restada a la secuencia de entrada permite obtener el detalle local $d(t)$ mostrado en el panel (c) en color negro. Esta señal no es completamente simétrica alrededor del eje horizontal, pues su media local (en color magenta) es no nula. Por este motivo se realizan iteraciones sobre esta misma serie temporal tantas veces como sea necesario hasta obtener una serie simétrica como la graficada en color negro en el panel (d). En este punto, el detalle es considerado la primera función IMF.

El análisis de señal con EMD continúa de este modo iterando sobre el *residuo*, que es la entrada sin el detalle anteriormente calculado (consistente en la primera IMF). El próximo detalle extraído es entonces otra IMF de siguiente orden, que contiene información en escalas temporales más groseras, o sea con frecuencias menores. La extracción de los sucesivos detalles continúa de esta forma hasta que el residuo: 1) es despreciable o bien 2) no contiene más extremos locales, o sea, es una función monótona llamada *residuo final* $r_N(t)$ (también llamada *residuo a secas*).

¹ Este ejemplo fue analizado con el algoritmo de EMD presentado por [Rilling et al., 2003] y está disponible en: <http://perso.ens-lyon.fr/patrick.flandrin/emd.html>

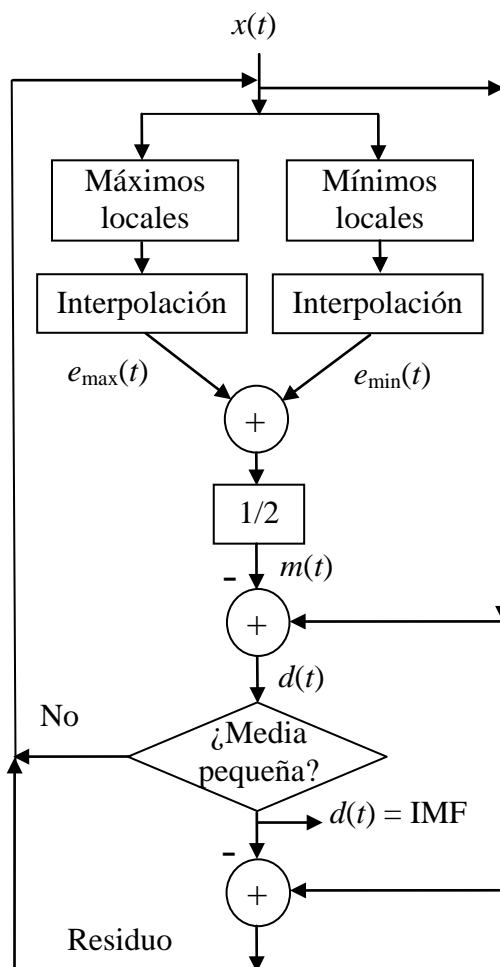


Figura 1. Algoritmo de EMD.

Como resultado final, se obtiene un conjunto de funciones IMF $c_k(t)$, ordenadas de mayor a menor frecuencia media, que describen la entrada como:

$$x(t) = \sum_{k=1}^N c_k(t) + r_N(t). \quad (1)$$

La Figura 3 muestra las cuatro funciones IMF para la señal de la Figura 2 (a). Estas señales están ordenadas de mayor a menor frecuencia media. Nótese que las IMF de órdenes 1 y 2 contienen las respectivas señales de barrido espectral que componen la entrada. Además, como se observa en el panel inferior, la componente restante de la entrada (la señal senoidal, en color negro) está contenida en la suma de la IMF de orden 4 y el residuo $r_N(t)$ (en color rojo). En conclusión, el algoritmo EMD permite obtener funciones que representan fenómenos físicos contenidos en la señal analizada.

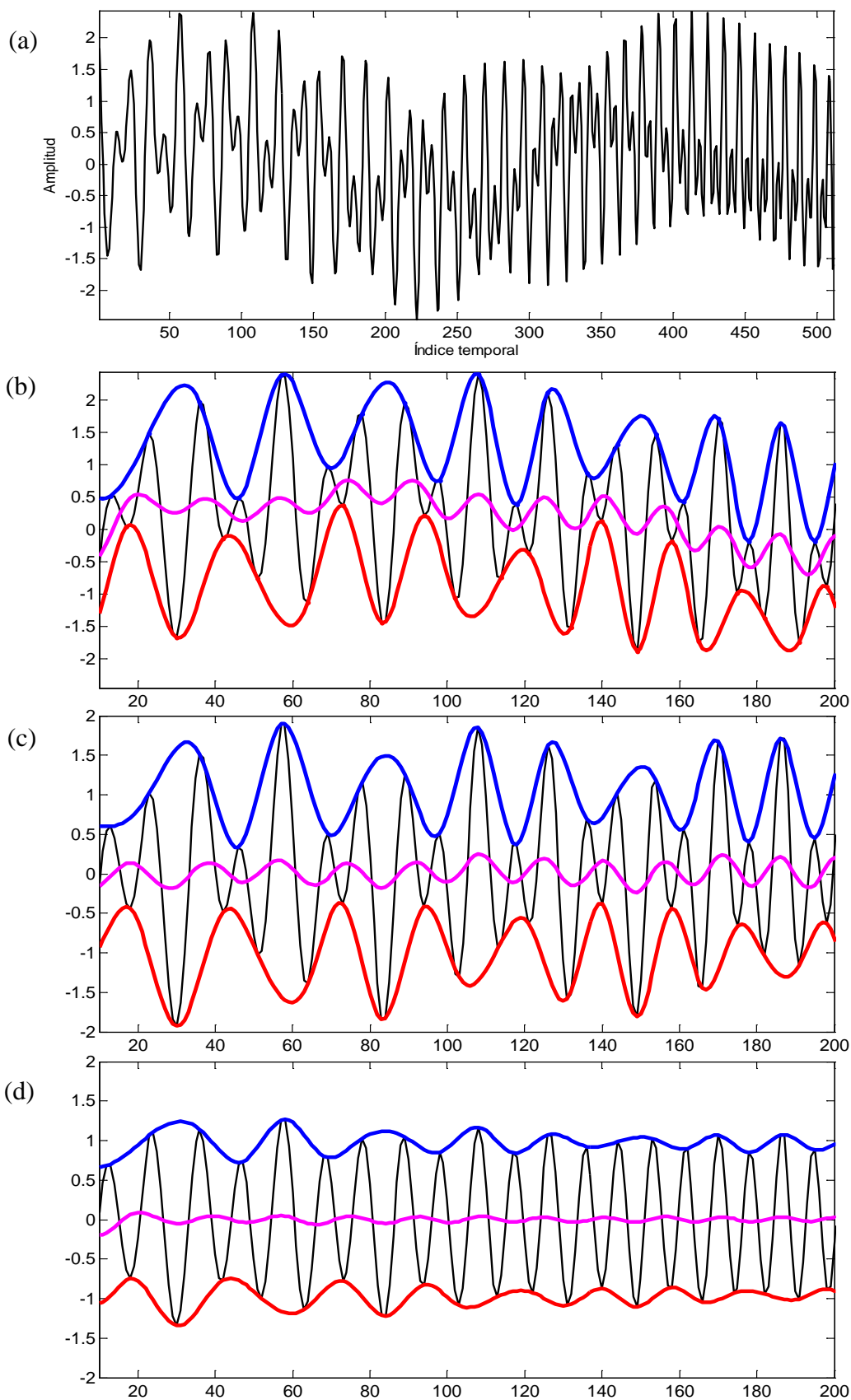


Figura 2. Señales correspondientes al análisis con EMD.

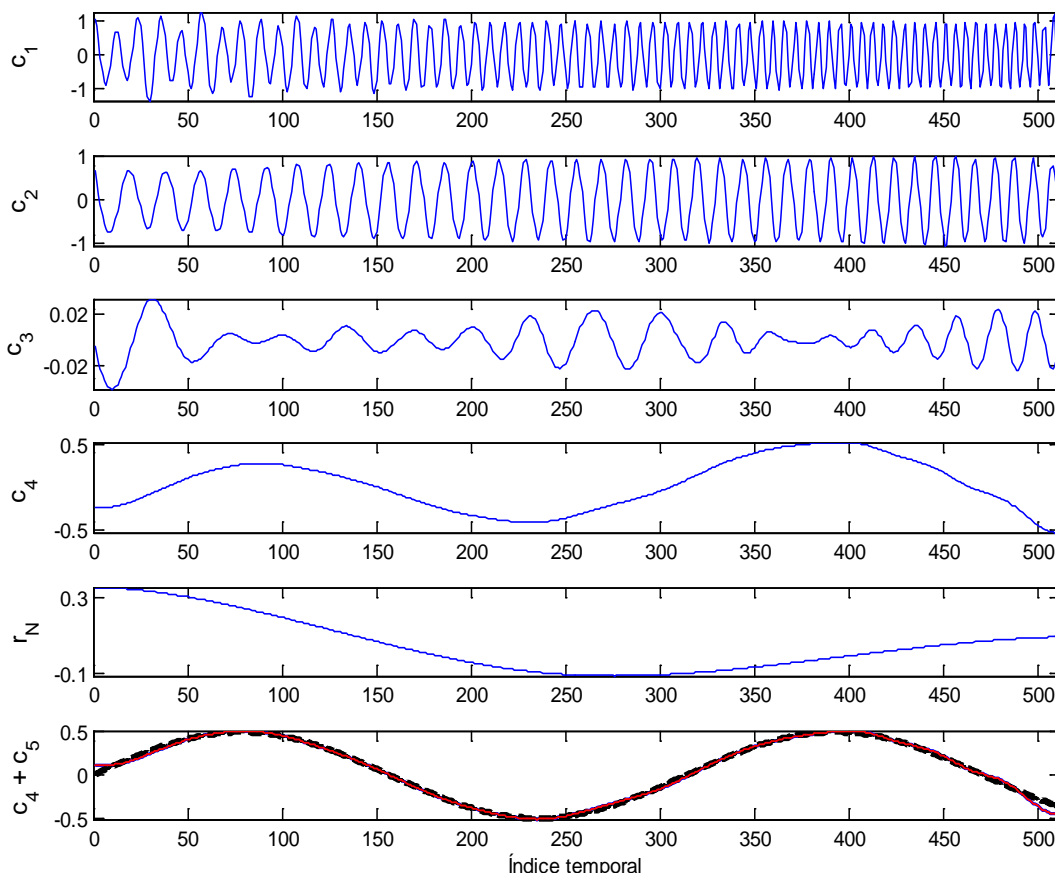


Figura 3. Funciones de modo intrínseco asociadas a la señal de entrada. El gráfico inferior ilustra la suma del residuo con la IMF de orden 4 (color rojo), y la señal senoidal contenida en la entrada (color negro, trazo intermitente).

2 Aplicaciones

En la Figura 3 se observa que la cantidad de funciones IMF es reducida. Dicha cantidad depende de la señal analizada, y como máximo llega a ser $\#IMF = \log_2(K)$ —que se cumple para el caso de ruido blanco—, donde K es la cantidad de muestras de la secuencia analizada [Wu, Huang, 2004]. Esta propiedad de pocas IMF puede ser útil para la codificación de audio [Marengo Rodriguez, Miyara, 2009] o de imágenes [Linderhed, 2002]. Finalmente, se observa en la Figura 3 que el espectro de la IMF de orden 3 está contenido entre una de las dos señales de barradura y la senoidal pura de la entrada. En algunos casos, esta información irrelevante puede suprimirse, y la senoide de entrada podría detectarse en una sola función. Esto puede realizarse vía el algoritmo EEMD (en inglés, EMD por conjuntos) [Wu, Huang, 2009]. De esta manera, EMD y EEMD permiten descomponer la entrada en términos de señales físicamente relevantes de forma clara.

Otra aplicación de EMD muy difundida es el filtrado robusto de ruido [Marengo Rodriguez et al., 2007, 2008], [Marengo Rodriguez, 2008], [Neyra Astudillo et al., 2011]. En estos casos, el ruido está contenido en las IMF de primer y último orden. Al sustraer esas funciones de la entrada (en aplicaciones conocidas como *denoising* y *detrending*), se obtiene la señal con relación señal-ruido muy superior a la de entrada.

3 Transformada de Hilbert-Huang

Además del método EEMD que permite agrupar mejor las funciones IMF en bandas espectrales adyacentes, hay otras herramientas asociadas a EMD. Por ejemplo, al aplicar la transformada de Hilbert $H\{\bullet\}$ a cada IMF $a(t)\times\cos[\phi(t)]$, se obtiene su componente en cuadratura, es decir ²:

$$H \{ a(t) \times \cos[\phi(t)] \} = a(t) \times \text{sen}[\phi(t)]. \quad (2)$$

Esta última componente multiplicada por la unidad imaginaria i permite obtener la señal analítica asociada $a(t)\times\exp[i\phi(t)]$. Esto se conoce como *transformada de Hilbert-Huang* o HHT [Hahn, 1996], y permite obtener una representación energía-tiempo-frecuencia de la entrada con mayor precisión. Dicha representación está dada por la siguiente expresión:

$$x(t) = \text{Re} \left\{ \sum_{k=1}^N a_k(t) \times \exp \left(i \int \omega_k(t) dt \right) \right\} + r_N(t), \quad (3)$$

donde $\int \omega_k(t) dt = \phi_k(t)$ es la fase instantánea de la k -ésima IMF, dada por la frecuencia angular instantánea $\omega_k(t)$. En muchos casos, se puede ignorar el residuo por ser una función monótona que no aporta información espectralmente relevante. La ecuación (3) puede compararse con la representación en series de Fourier de la señal en cuestión:

$$x(t) = \text{Re} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k \times \exp(i \omega_k t) \right\}. \quad (4)$$

La Ecuación (4) es muy similar a la Ecuación (3), pero contiene una mayor cantidad de términos pues en cada uno de ellos es constante tanto la amplitud como la frecuencia. En la Ecuación (4), en cambio, la amplitud y la frecuencia son variables en el tiempo. Por dicha semejanza es que la transformada HHT se conoce también como la *transformada de Fourier generalizada*. Como ejemplo de análisis, se toma un tono de 2 kHz seguido de otro tono de 1 kHz. La transformada HHT y el espectrograma de esta secuencia se muestran en falsos colores en la Figura 4. Por comparación visual entre ambas distribuciones se evidencia la mayor precisión de la transformada HHT. En términos específicos, esta herramienta no posee las limitaciones de resolución tiempo-frecuencia que sí posee el espectrograma, ya que HHT analiza el comportamiento espectral de cada función monocomponente (IMF) por separado en lugar de analizar la secuencia de entrada que contiene todas las componentes presentes sin su previa descomposición.

² La Ecuación (2) se verifica siempre que se cumplan las condiciones establecidas por el teorema de Bedrosian [Bedrosian, 1963] y de Nuttall [Nuttall, 1966].

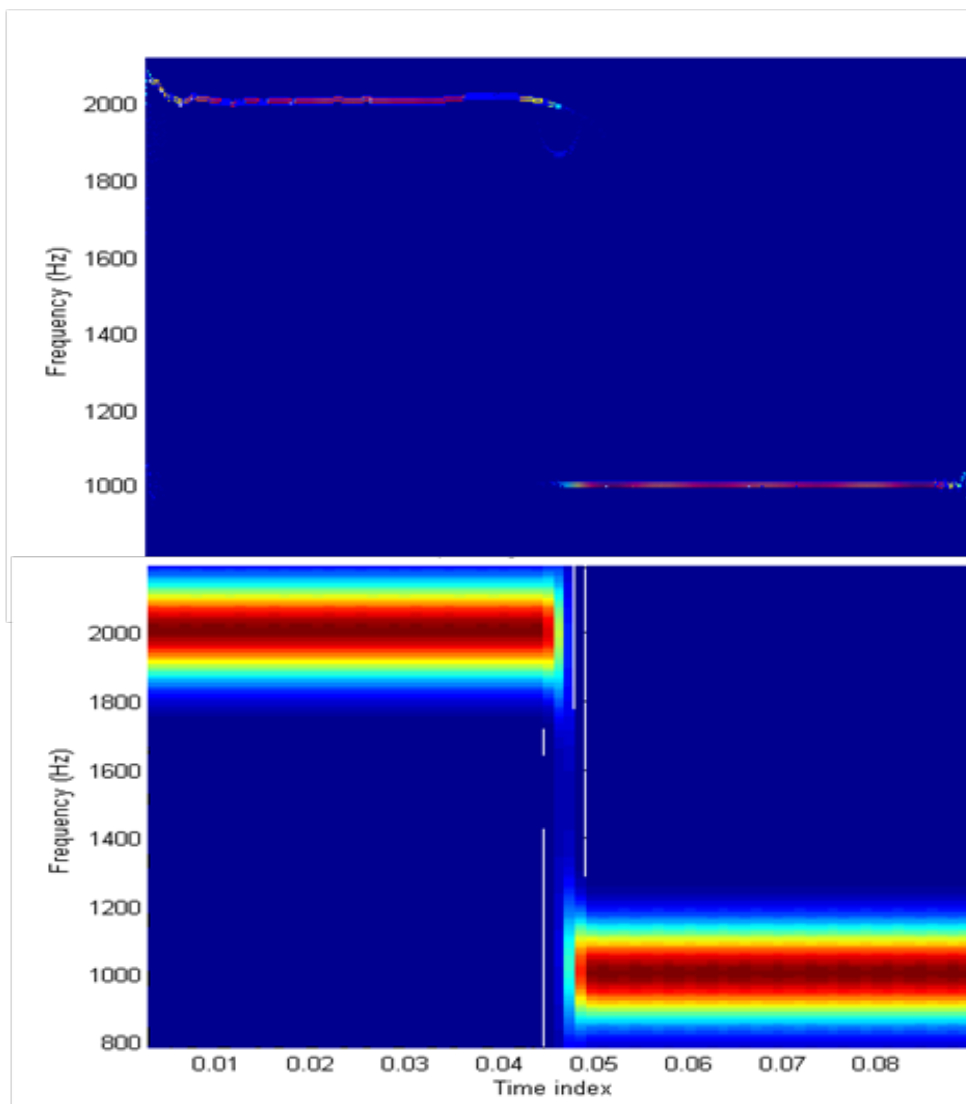


Figura 4. HHT (arriba) y espectrograma (abajo).

4 Conclusión

Este documento presenta los lineamientos básicos de las herramientas EMD y HHT y sus aplicaciones y ventajas en el área de procesamiento digital de señales.

Referencias

- Hahn, S. (1996). "Hilbert Transforms in Signal Processing". Artech House, London, UK.
- Huang, N. E.; Shen, Z.; Long, S. R.; Wu, M. C.; Shih, H. H.; Zheng, Q.; Yen, N.-C.; Tung, C. C.; and Liu, H. H. (1998). "The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis". Proceedings of the Royal Society of London, Ser. A, 454, 903–995.
- Rilling, G.; Flandrin, P.; Gonçalves, P. (2003). "On Empirical Mode Decomposition and its algorithms". IEEE-EURASIP Workshop on Nonlinear Signal and Image Processing, NSIP-03, Grado (I).
- Wu, Z.; Huang, N. E. (2004). "A study of the characteristics of white noise using the empirical mode decomposition method". Proc. Royal Soc. London(A):460, 1597–1611.

- Marengo Rodriguez, F. A.; Miyara, F. (2009). "Representación de Señales de Audio con Descomposición Empírica de Modos y Submuestreo Adaptativo". Prim. Jorn. Reg. de Acúst. (AdAA2009) A056R, Rosario, Argentina.
- Linderhed, A. (2002). "2D empirical mode decompositions in the spirit of image compression". Wavelet and Independent Component Analysis Applications IX, Orlando, Fl., SPIE Proceedings, 4738, 1-8.
- Wu, Z.; Huang, N. E. (2009). "Ensemble empirical mode decomposition: a noise-assisted data analysis method". Advances in Adaptive Data Analysis, 1(1):1-41.
- Marengo Rodriguez, F. A.; Federico, A.; Kaufmann, G. H. (2007). "Phase measurement improvement in temporal speckle pattern interferometry using Empirical Mode Decomposition". Optics Com., 275(1):38-41.
- Marengo Rodriguez, F. A.; Federico, A.; Kaufmann, G. H. (2008). "Hilbert transform analysis of a time series of speckle interferograms with a temporal carrier". Applied Optics, 47(9):1310-1316.
- Marengo Rodriguez, F. A. (2008). "Medición de la distribución de fase en interferometría de speckle temporal usando descomposición empírica de modos y transformada de Hilbert". Tesis Doctoral. Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario. 2008. Disponible en: <http://www.fceia.unr.edu.ar/acustica/biblio/tesis.pdf>
- Neyra Astudillo, M.; Ortega Paredes, V. L.; Nuñez, N.; Ruzzante, J. E.; López Pumarega, M. L.; Marengo, J. A.; Marengo Rodriguez, F. A. (2011). "Ruido barkhausen en álabes de turbina", VIII Congreso Regional de ENDE. Campana, Buenos Aires, Argentina.
- Bedrosian, E. (1963). "A product theorem for Hilbert transforms", Proceedings of the IEEE, 51(5):868-869.
- Nuttall, A. H. (1966). "On the quadrature approximation to the Hilbert transform of modulated signals". Proc. IEEE, 54, 1458-1459.