TEORÍA DE LAS FUNCIONES SEMIÓTICAS

Un Enfoque Ontológico-Semiótico de la Cognición e Instrucción Matemática

Juan D. GODINO

Teoría de las Funciones Semióticas

Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática

Juan D. Godino

Trabajo de investigación presentado
para optar a la Cátedra de Universidad de
Didáctica de la Matemática de la
Universidad de Granada

Noviembre de 2003

TEORÍA DE LAS FUNCIONES SEMIÓTICAS:
Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática

Departamento de Didáctica de la Matemática
Facultad de Ciencias de la Educación
Universidad de Granada
18071 Granada

ISBN: (pendiente)
Depósito Legal: (pendiente)

Impresión: Servicio de reprografía de la Facultad de Ciencias. Granada.

Distribución en Internet:
http://www.ugr.es/local/jgodino/

INDICE

Página

INTRODUCCIÓN 9

1. EL PROBLEMA DE LA COGNICIÓN MATEMÁTICA Y SU DESARROLLO
   1.1. Introducción 13
   1.2. La ontología y epistemología matemática como problema para la didáctica de las matemáticas 14
   1.3. Cognición matemática individual e institucional 15
   1.4. Perspectiva sistémica 17
   1.5. Complementariedad y transdisciplinariedad en didáctica de la matemática ....
      1.5.1. Herramientas antropológicas 19
      1.5.2. Herramientas ecológicas 21
      1.5.3. Herramientas semióticas 21
   1.6. Hacia un enfoque unificado de la cognición e instrucción matemática 23

2. ONTOLOGÍAS Y EPISTEMOLOGÍAS SOBRE LA COGNICIÓN MATEMÁTICA
   2.1. Introducción 27
   2.2. Naturaleza de los objetos matemáticos 28
   2.3. Lenguaje matemático: Representación y significación
      2.3.1. Teorías referenciales o analíticas del significado 32
      2.3.2. Teorías operacionales o pragmáticas del significado .. 35
      2.3.3. Complementariedad entre teorías realistas y pragmáticas del significado 37
      2.3.4. Semiótica y filosofía del lenguaje 38
   2.4. Naturaleza de las matemáticas según Wittgenstein
      2.4.1. El lenguaje matemático como herramienta 43
      2.4.2. Alternativa al platonismo y mentalismo 46
      2.4.3. Creación intradiscursiva de los objetos matemáticos .. 47

Página

2.4.4. Características y limitaciones del convencionalismo de Wittgenstein como modelo de cognición matemática 48
2.5. Representaciones internas y externas
2.5.1. Sistemas de representación en educación matemática 51
2.5.2. Registros de representación, comprensión y aprendizaje 55
2.5.3. Esquemas cognitivos 57
2.5.4. Conceptos y concepciones en educación matemática 60
2.6. Epistemologías de la matemática
2.6.1. Los constructivismos radical y social 64
2.6.2. Interaccionismo simbólico 68
2.6.3. Aprendizaje discursivo o comunicacional 71
2.6.4. Una epistemología experimental: La teoría de situaciones didácticas 74
2.6.5. Antropología cognitiva. La matemática como actividad humana 75
2.7. La metáfora ecológica en el estudio de la cognición matemática 77
2.8. Implicaciones: Necesidad de un enfoque unificado sobre la cognición y la instrucción matemática 80

3. SIGNIFICADO INSTITUCIONAL Y PERSONAL DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS
3.1. Introducción 85
3.2. La teoría antropológica como punto de partida 86
3.3. Problemas matemáticos y campos de problemas 88
3.4. La noción de práctica 91
3.5. La noción de institución 93
3.6. Los objetos matemáticos como emergentes de sistemas de prácticas 95
3.7. Significados institucionales y personales de los objetos matemáticos 99
3.8. Síntesis e implicaciones 101

4. COMPONENTES DE LOS SISTEMAS DE PRÁCTICAS. ELEMENTOS DEL SIGNIFICADO
4.1. Introducción 105
4.2. Una interpretación del triángulo epistemológico 106
4.3. Situaciones y problemas 108
4.3. El lenguaje matemático 109
4.4. Las acciones del sujeto ante tareas matemáticas 111

Página

4.5. Conceptos 114
4.6. Propiedades o atributos 115
4.7. Argumentos 116
4.8. Síntesis e implicaciones 117

5. COMPRENSIÓN Y COMPETENCIA MATEMÁTICA
5.1. Introducción 119
5.2. La comprensión en Didáctica de la Matemática.
5.2.1. Comprensión instrumental y relacional 121
5.2.2. Actos y procesos de comprensión 122
5.3. Elementos para un modelo de la comprensión
5.3.1.Dimensión personal e institucional 124
5.3.2. Carácter sistémico y dinámico 125
5.3.3. Acción humana e intencionalidad 128
5.4. Relación entre comprensión y competencia 129
5.5. Evaluación de la comprensión 131
5.6. Síntesis e implicaciones 133

6. FACETAS DUALES DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO
6.1. Introducción 135
6.2. Facetas institucional y personal 137
6.3. Facetas elemental y sistémica 139
6.4. Facetas ostensiva y no ostensiva 141
6.5. Facetas ejemplar y tipo 143
6.6. Facetas expresión y contenido 144
6.7. Síntesis e implicaciones 145

7. FUNCIONES SEMIÓTICAS Y SUS TIPOS
7.1. Introducción 147
7.2. Funciones semióticas 149
7.3. Tipos de funciones semióticas 152
7.4. El análisis semiótico como técnica para determinar significados 155
7.5. Determinación de significados institucionales
7.5.1. Unidades de análisis. Significados elementales 157
7.5.2. Significado institucional pretendido de la mediana. Comparación con el significado de referencia 162
7.6. Determinación de significados personales 165
7.7. Dialéctica entre significados institucionales y personales 171
7.8. Síntesis e implicaciones 173

Página

8. ANÁLISIS DE PROCESOS DE INSTRUCCIÓN MATEMÁTICA: HACIA UNA TEORÍA DE LA INSTRUCCIÓN MATEMÁTICA SIGNIFICATIVA
8.1. Introducción 175
8.2. Modelización de la instrucción mediante procesos estocásticos
8.2.1. Dimensiones de un proceso de instrucción matemática. Trayectorias muestrales 179
8.2.2. El tiempo didáctico 181
8.2.3. Trayectoria epistémica 183
8.2.4. Trayectoria docente 190
8.2.5. Trayectoria discente 194
8.2.6. Otras trayectorias 197
8.3. Interacciones didácticas
8.3.1. Interaccionismo simbólico y teoría de situaciones 199
8.3.2. Configuraciones y trayectorias didácticas 200
8.3.3. Configuraciones didácticas de referencia 202
8.3.4. Análisis de las configuraciones didácticas empíricas 204
8.3.5. Patrones de interacción, técnicas didácticas y contrato didáctico 211
8.3.6. Criterios de idoneidad de las configuraciones y trayectorias didácticas 212
8.4. Síntesis e implicaciones 214

9. UNA AGENDA DE INVESTIGACIÓN PARA LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS
9.1. Introducción 219
9.2. Cuestiones según el fin de la investigación
9.2.1. Semiometría o determinación de significados 221
9.2.2. Ecología de significados 222
9.2.3. Dinámica de significados 222
9.3. Cuestiones según el foco de investigación
9.3.1. Análisis epistémico (cognición institucional) 224
9.3.2. Análisis cognitivo (cognición individual) 225
9.3.3. Análisis instruccional 226

9.4. Marco y herramientas metodológicas
9.4.1. Enfoque metodológico 227
9.4.2. El análisis semiótico como técnica para determinar significados 229
9.4.3. El problema de la evaluación de los conocimientos matemáticos 229

Página

9.5. Síntesis e implicaciones 231

10. CONCORDANCIAS Y COMPLEMENTARIEDADES
10.1. Introducción 233
10.2. Nociones de objeto matemático y significado 234
10.3. Concepciones e imágenes conceptuales 237
10.4. Representaciones internas y externas ....
10.4.1. Observaciones generales sobre la noción de representación 239
10.4.2. La representación como función semiótica 241
10.4.3. Características y limitaciones del modelo cognitivo de Duval 242
10.4.4. Características y limitaciones de la teoría APOS 244
10.5. Teoría de los campos conceptuales 245
10.6. Teoría de situaciones didácticas 247
10.7. Teoría antropológica en didáctica de la matemática 248
10.8 Hacia una integración de modelos teóricos 253

11. INVESTIGACIONES REALIZADAS EN EL MARCO DE LA TEORÍA DE LAS FUNCIONES SEMIÓTICAS
11.1. Introducción 257
11.2. Argumentación y demostración matemática 258
11.3. Razonamiento combinatorio 260
11.4. Significado de nociones ligadas a la aproximación frecuencial de la probabilidad 262
11.5. Nociones probabilísticas en libros de texto de secundaria .. 264
11.6. Sucesos independientes en probabilidad 265
11.7. Enseñanza y aprendizaje de la derivada 267
11.8. Estudio de la distribución normal en un curso de análisis de datos 271
11.9. Estudio de la divisibilidad en secundaria 273
11.10. Estudio de las inecuaciones lineales con dos variables en secundaria 275
11.11. Papel de la teoría de conjuntos en la construcción de los números naturales 276
11.12. Medidas de posición central 280
11.13. Otras investigaciones 282

12. SÍNTESIS E IMPLICACIONES DE LA TEORÍA DE LAS FUNCIONES SEMIÓTICAS
12.1. Introducción 283

Página

12.2. Herramientas cognitivas 284
12.3. Herramientas instruccionales 288
12.4. Enfoque y herramientas metodológicas 289
12.5. Hacia un enfoque unificado del análisis didáctico matemático 290

REFERENCIAS 293

ANEXOS 309

INTRODUCCIÓN

Desde hace más de 12 años estamos comprometidos con la investigación en didáctica de las matemáticas en el contexto académico del Programa de Doctorado de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Esta situación, y la dirección de diversas tesis doctorales y proyectos de investigación, nos ha llevado a estudiar con profundidad la variedad de enfoques y marcos teóricos que se están utilizando actualmente en esta disciplina científica, y nos ha convencido de la necesidad de realizar esfuerzos por clarificar y confrontar las distintas herramientas conceptuales y metodológicas. Este esfuerzo se ha plasmado en diversos trabajos realizados en colaboración con otros miembros del Grupo de Investigación sobre Teoría de la Educación Matemática de la Universidad de Granada.

En esta Monografía tratamos de sintetizar esta colección de trabajos, al tiempo que procuramos explicar, desarrollar y organizar de una manera sistemática y coherente el sistema de nociones elaboradas. Se trata también de una buena ocasión para reflexionar sobre la naturaleza, fundamentos y conexiones del marco teórico que proponemos para la didáctica de las matemáticas, al tiempo que progresamos en su desarrollo, extendiéndolo en diversos puntos que estaban pendientes de completar.

La mirada retrospectiva sobre la colección de trabajos elaborados sobre "el significado y comprensión de los objetos matemáticos" en este período de tiempo muestra nuestra preocupación de tratar de clarificar la naturaleza de los objetos matemáticos, como un requisito previo a las cuestiones de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Reconocemos que las nociones de concepto, concepción, esquema, en sus diversas variantes, son las más usadas por los investigadores en didáctica de las matemáticas como herramientas teóricas para describir la cognición matemática. Pero consideramos que esas nociones han de ser completadas. Necesitamos un modelo ontológico y epistemológico más complejo si deseamos describir y explicar los fenómenos de cognición matemática y su desarrollo en el contexto educativo. En el trabajo matemático se ponen en juego, además de conceptos, otros "objetos" como: procedimientos, algoritmos, proposiciones, demostraciones, problemas, lenguaje, etc.

La principal aportación en una primera etapa de nuestro trabajo fue el constructo "sistema de prácticas personales (e institucionales) ante una clase de problemas" (Godino y Batanero, 1994), que puede desempeñar el papel de unidad de análisis de la cognición matemática, tanto en la faceta individual como institucional. Se trata de una entidad de naturaleza pragmática (antropológica) que permite desplazar el centro de atención en la investigación didáctica desde la mente a la acción de los sujetos, mediatizada con instrumentos, y realizada en el seno de los contextos institucionales.

Junto a este constructo de "sistema de prácticas" consideramos necesario introducir la noción de "objeto emergente" de los sistemas de prácticas, entre los cuales se establecen relaciones de "expresión y contenido", de significante y significado. De esta manera obtenemos un modelo que al tiempo de ser antropológico, es también referencial, tratando de superar de este modo el dilema epistemológico entre pragmatismo y realismo.

En una segunda etapa nos hemos interesado por elaborar una descomposición de los sistemas de prácticas en tipos de prácticas de las cuales emergen objetos que nos permiten analizar con el detalle necesario la actividad matemática. Esta tipología de objetos elementales, junto con la entidad relacional que designamos como *función semiótica*, nos sirve para desarrollar la técnica del análisis ontológico-semiótico que aplicamos para caracterizar los significados tanto personales como institucionales.

En la tercera etapa abordamos el desarrollo de nociones teóricas relacionadas con la descripción y análisis de los procesos de instrucción matemática, entendida ésta como enseñanza y aprendizaje organizado de las matemáticas en el seno de los sistemas didácticos. En esta problemática adoptamos los supuestos interaccionistas y socio-constructivistas del aprendizaje matemático y desarrollamos algunas herramientas analíticas para el estudio de las interacciones entre los conocimientos matemáticos, el profesor, los alumnos y el medio instrucional, a partir del enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática elaborado.

En esta Monografía presentaremos y relacionaremos entre sí, y con otras teorizaciones, las diversas nociones teóricas introducidas sobre las que venimos investigando en los últimos 12 años. Estas nociones se han presentado y discutido en este período, tanto en foros internacionales

(PME, ICME, ICOTS, TME, Sesiones del ISI, etc.), y nacionales (SEIEM, Reuniones del Seminario SIIDM), como en artículos publicados en *Educational Studies in Matemáticas*, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *ICMI Study* (publicado por Kluwer), etc. Estas nociones, en su conjunto definen una aproximación ontológica y semiótica al estudio de la cognición y la instrucción matemática, entendida la cognición en sus dimensiones institucionales y personales.

La Monografía se estructura de la siguiente manera:

1. Descripción del problema de elaboración de un marco teórico para analizar la naturaleza de la cognición y la instrucción matemática, así como su desarrollo en los sistemas didácticos.
2. Perspectiva de las principales ontologías y epistemologías sobre la cognición matemática; necesidad de contrastar y articular las herramientas teóricas propuestas con el fin de progresar hacia un modelo unificado.
3. Síntesis de nuestras investigaciones sobre los significados de los objetos matemáticos y ampliación del problema ontológico y semiótico.
4. Descripción de los tipos de entidades matemáticas que consideramos necesarios tener en cuenta para analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
5. Presentación de un modelo sobre la comprensión y competencia matemática coherente con el modelo ontológico y epistemológico elaborado.
6. Análisis de las facetas duales desde las cuales se pueden contemplar los objetos matemáticos y de sus implicaciones para orientar la investigación didáctica.
7. Introducción de la idea de función semiótica y presentación de ejemplos de posibles tipos de funciones semióticas. Presentación de la técnica del "análisis ontológico-semiótico" para caracterizar significados elementales y sistémicos.
8. Herramientas teóricas para analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje matemático (objetos e interacciones didácticas).
9. Descripción de una agenda de investigación basada en el enfoque unificado de la cognición e instrucción matemática que proporciona la Teoría de las Funciones Semióticas.

10. Estudio de las concordancias y complementariedades de las nociones teóricas desarrolladas con otras herramientas teóricas.
11. Síntesis de investigaciones desarrolladas en el marco teórico del enfoque unificado.
12. Síntesis y perspectivas futuras para la investigación en didáctica de las matemáticas.

En la presentación de las nociones teóricas desarrolladas utilizaremos principalmente como ejemplo ilustrativo el concepto estadístico de mediana. De manera especial usaremos la descripción de esta noción que se hace en un libro de secundaria que se utilizó como recurso en una experiencia de enseñanza realizada con estudiantes de Magisterio. En los Anexos 1 y 2 se incluye el texto y la reconstrucción que hacemos del significado institucional de referencia de la mediana. Las nuevas nociones teóricas para el estudio de la instrucción matemática, que se describen en el Capítulo 8, serán ejemplificadas con un fragmento de la transcripción de una clase sobre enseñanza del cálculo de derivadas en Bachillerato (Anexo 3).

Dada la amplitud, dificultad y alcance de los objetivos pretendidos no podemos dar por concluido el trabajo. El ensayo que publicamos en 1991 con el título "Hacia una teoría de la didáctica de la matemática"[1] marca el comienzo de un proyecto de investigación sobre los fundamentos de nuestra disciplina que aspira a definir un "Enfoque Ontológico-Semiótico de la Cognición e Instrucción Matemática", para el que solicitamos el concurso de los investigadores interesados por esta problemática.

RECONOCIMIENTOS

Las investigaciones recogidas en esta Monografía han sido desarrolladas, bajo la dirección de J. D. Godino, por diversos miembros del Grupo de Investigación del Plan Andaluz de Investigación FQM-126, "*Teoría y Métodos de Investigación en Educación Matemática*" y del Proyecto PS93-0196, subvencionado por la Dirección General de Investigación Científica y Técnica (MEC), "*Significado de los objetos matemáticos. Implicaciones teóricas y metodológicas para la Didáctica de la Matemática*". De manera especial se reconoce y agradece la contribución de C. Batanero y las sugerencias y comentarios de A. Contreras y V. Font.

[1] Godino, J. D. (1991).

Capítulo 1

EL PROBLEMA DE LA COGNICIÓN MATEMÁTICA Y SU DESARROLLO

"La noción de conocimiento nos parece una y evidente. Pero, en el momento en que se le interroga, estalla, se diversifica, se multiplica en nociones innumerables, planteando cada una de ellas una nueva interrogante"

(Edgard Morin, 1977, p. 18)

1.1. Introducción
1.2. La ontología y epistemología matemática como problema para la didáctica de las matemáticas
1.3. Cognición matemática individual e institucional
1.4. Perspectiva sistémica
1.5.3. Complementariedad y transdisciplinariedad en didáctica de la matemática
    1.5.1. Herramientas antropológicas
    1.5.2. Herramientas ecológicas
    1.5.3. Herramientas semióticas
1.6. Hacia un enfoque unificado de la cognición e instrucción matemática: La Teoría de las Funciones Semióticas

1.1. INTRODUCCIÓN

En este primer capítulo comenzamos justificando brevemente nuestro interés por los temas ontológicos y epistemológicos sobre las matemáticas, al considerarlos como necesarios para fundamentar las investigaciones didácticas.

Después de aclarar el uso que hacemos en esta Monografía del término 'cognitivo', indicamos la necesidad de adoptar un punto de vista sistémico en Didáctica de la Matemática, incorporando herramientas y perspectivas procedentes de distintas disciplinas relacionadas, en particular la antropología cognitiva, la ecología conceptual y la semiótica.

Terminamos indicando, en términos generales, la problemática de reflexión y elaboración teórica que hemos abordado en cada una de las tres etapas en que dividimos nuestro trabajo.

Como afirma Tirosh (1999), en la literatura de educación matemática se han tratado con frecuencia varias formas de conocimiento como "conocimiento instrumental, relacional, conceptual, procedimental, algorítmico, formal, visual, intuitivo, implícito, explícito, elemental, avanzado, conocer qué, conocer por qué, y conocer cómo" (p. 1). En la colección de artículos del número monográfico de Educational Studies in Mathematics, editado por Tirosh, se describe y distinguen algunas de estas formas de conocimiento matemático, y se discute sus posibles implicaciones para la enseñanza y el aprendizaje matemático. El modelo ontológico y semiótico de la cognición matemática que desarrollamos en esta Monografía pensamos que proporciona un marco unificado en el que se estudian las diversas formas de conocimiento matemático y sus respectivas interacciones.

1.2. LA ONTOLOGÍA Y LA EPISTEMOLOGÍA MATEMÁTICA COMO PROBLEMA PARA LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

El fin específico de la didáctica de las matemáticas como campo de investigación es el estudio de los factores que condicionan los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y el desarrollo de programas de mejora de dichos procesos. Para lograr este objetivo, la didáctica de las matemáticas debe considerar las contribuciones de diversas disciplinas como la psicología, pedagogía, filosofía, sociología, etc. (Godino, 1991). Además debe tener en cuenta y basarse en un análisis de la naturaleza de los contenidos matemáticos -a los que se ha de problematizar-, su desarrollo cultural y personal, particularmente en el seno de los sistemas didácticos. Este análisis ontológico y epistemológico es esencial para la didáctica de las matemáticas ya que difícilmente podría estudiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de objetos difusos o indefinidos.

Así pues, la investigación en didáctica de la matemática no puede ignorar cuestiones filosóficas tales como:

- ¿Cuál es la naturaleza de los objetos matemáticos?

- ¿Qué papel juegan la actividad humana y los procesos socioculturales en el desarrollo de las ideas matemáticas?
- ¿Las matemáticas se descubren o inventan?
- Las definiciones formales y los enunciados de las proposiciones agotan el significado de integral de los conceptos?
- ¿Cuál es el papel que juegan en el significado de los objetos matemáticos, sus relaciones con otros objetos, las situaciones problemáticas en las cuales se usan como herramientas, y las diversas representaciones simbólicas?

Es necesario reconocer, no obstante, la complejidad de estas cuestiones y la variedad de posibles respuestas. Como afirma A. Dou en el prólogo del libro de Cañón (1993), "La ontología de las entidades matemáticas y aún más su epistemología son interpretadas de modo increíblemente dispar y permanecen en el misterio" (p. 14). También Piaget (1979) afirma, "ocurre que nunca pudo llegarse a un acuerdo acerca de lo que son realmente los "entes" matemáticos" (p. 147). Sin embargo, esta dificultad no puede implicar la renuncia a la clarificación de estas cuestiones, si se desea progresar en el establecimiento de un programa de investigación coherente y productivo en didáctica de las matemáticas.

1.3. COGNICIÓN MATEMÁTICA INDIVIDUAL E INSTITUCIONAL

La emergencia relativamente reciente del área de conocimiento de didáctica de la matemática explica que no exista aún un paradigma de investigación consolidado y dominante. En el trabajo de Sierpinska y Lerman (1997), sobre epistemología de las matemáticas y de la educación matemática, podemos observar la diversidad de aproximaciones teóricas que se están desarrollando en la actualidad. En ciertos momentos esta diversidad puede ser inevitable, incluso enriquecedora, pero el progreso de la disciplina y la potenciación de sus aplicaciones prácticas exige aunar esfuerzos para identificar el núcleo firme de conceptos y métodos que, a la larga, deberían cristalizar en un verdadero programa de investigación (Lakatos, 1983).

Uno de los principales problemas “meta-didácticos" que debemos abordar es la clarificación de las nociones teóricas que se vienen utilizando en el área de conocimiento, en particular las nociones usadas para analizar los fenómenos cognitivos. No hay un consenso sobre este tema ni incluso dentro de la aproximación que suele describirse como "epistemológica" o "didáctica fundamental" (Gascón, 1998). Basta observar la variedad de nociones que se usan sin que se haya iniciado su contrastación, clarificación y depuración: conocimientos, saberes, concepciones, conceptos, imágenes conceptuales, esquemas, invariantes operatorios, significados, praxeologías, etc.

En esta Monografía, además de presentar nuevas herramientas teóricas para el análisis de los conocimientos matemáticos, sobre las que venimos trabajando desde hace más de doce años, trataremos de confrontar estas nociones con otras propuestas, procurando identificar las concordancias, complementariedades, posibles redundancias y discordancias. Estas nociones debemos considerarlas como herramientas y como tales tienen su potencial utilidad para analizar un tipo de problemas y sus propias limitaciones. El delicado problema que debemos abordar consiste en elaborar nuevos constructos cognitivos que superen las limitaciones de los existentes, pero partiendo de las herramientas disponibles, con el objetivo de avanzar hacia un modelo unificado de la cognición matemática, su generación y difusión.

El uso del término "cognitivo" no deja de ser conflictivo en sí mismo. Con frecuencia se usa para designar los *conocimientos subjetivos*, y los procesos mentales que ponen en juego los sujetos individuales enfrentados ante un problema. Desde un enfoque psicologista de tipo radical de la cognición matemática tales procesos mentales, que tienen lugar en el cerebro de las personas, son los únicos constituyentes del conocimiento. Esta modelización no tiene en cuenta que los sujetos dialogan entre sí, consensúan y regulan los modos de expresión y actuación ante una cierta clase de problemas; que de esos sistemas de prácticas compartidas emergen objetos institucionales los cuales a su vez condicionan los modos de pensar y actuar de los miembros de tales instituciones. Por tanto, junto a los conocimientos subjetivos, emergentes de los modos de pensar y actuar de los sujetos considerados de manera individual, es necesario considerar los *conocimientos institucionales*, a los cuales se atribuye un cierto grado de objetividad.

En consecuencia, se debería distinguir en la cognición matemática (y en la cognición en general) la dualidad "*cognición individual*" y "*cognición institucional*", entre las cuales se establecen relaciones dialécticas complejas. Resaltamos el hecho que la "cognición individual" es el resultado del pensamiento y la acción del sujeto individual ante una cierta clase de problemas, mientras que la “cognición institucional” es el resultado del diálogo, el convenio y la regulación en el seno de un grupo de individuos. Una manera de designar dichas cogniciones con un solo término podría ser reservar el término ‘cognitivo’ para la cognición individual (como se hace con frecuencia por el predominio de la psicología cognitiva) y ‘epistémico’ (relativo al conocimiento objetivo) para la cognición institucional.

Como describe Varela (1988), el análisis científico del conocimiento en todas sus dimensiones es realizado por diversas ciencias y tecnologías de la cognición, entre las cuales menciona la epistemología, la psicología cognitiva, la lingüística, la inteligencia artificial y las neurociencias. En didáctica de las matemáticas tenemos que adoptar modelos cognitivos que no estén exclusivamente centrados en la psicología cognitiva, ya que el estudio de las matemáticas en las instituciones escolares se propone, como uno de sus fines esenciales, que el sujeto se apropie de los conocimientos matemáticos a los que se les atribuye una realidad cultural.

1.4. PERSPECTIVA SISTÉMICA

La característica principal de la didáctica de las matemáticas es la de su extrema complejidad. Como describe Steiner, esta disciplina comprende "el complejo fenómeno de la matemática en su desarrollo histórico y actual y su interrelación con otras ciencias, áreas prácticas, tecnología y cultura; la estructura compleja de la enseñanza y la escolaridad dentro de nuestra sociedad; las condiciones y factores altamente diferenciados en el desarrollo cognitivo y social del alumno" (Steiner, 1984, p. 16)

Esta complejidad ha llevado a distintos autores al uso de la Teoría de Sistemas para su estudio teórico. La noción interdisciplinar de sistema, adoptada por todas las ciencias sociales, se revela necesaria siempre que se tengan razones para suponer que el funcionamiento global de un conjunto de elementos no puede ser explicado por el simple agregado de los mismos, y que incluso el comportamiento de estos queda modificado por su inclusión en el sistema.

En la didáctica de las matemáticas el enfoque sistémico nos parece necesario, pues, además del sistema de enseñanza de las matemáticas en su conjunto, y de los propios sistemas conceptuales, hay que considerar los sistemas didácticos materializados en una clase, cuyos componentes principales son: el profesor, los alumnos y el saber enseñado. Además, el sistema didáctico está inmerso en un entorno social, cultural, tecnológico y científico que influye y condiciona su funcionamiento.

Una aproximación sistémica para los problemas didácticos es importante ya que muestra que la didáctica de las matemáticas se encuentra en el corazón de interacciones múltiples y debe, como consecuencia, desarrollar sus propias problemáticas y metodologías, aunque sin despreciar los aportes de las disciplinas conexas, en particular la psicología, pedagogía, epistemología, antropología, lingüística, etc.

Steiner señala una característica adicional de la visión sistémica de la didáctica de las matemáticas, al indicar que es autoreferente: "con respecto a ciertos aspectos y tareas, la educación matemática como disciplina y como campo profesional es uno de estos subsistemas. Por otro lado, es también el único campo científico que estudia el sistema total. Una aproximación sistémica con sus tareas de auto-referencia debe considerarse como un meta-paradigma organizativo para la educación matemática. Parece ser también una necesidad para manejar la complejidad de la totalidad, pero también porque el carácter sistémico se muestra en cada problema particular del campo" (Steiner, 1985, p. 11).

1.5. COMPLEMENTARIEDAD Y TRANSDISCIPLINARIEDAD EN DIDÁTICA DE LAS MATEMÁTICAS

La investigación en didácticas de la matemáticas se está realizando usando herramientas teóricas procedentes de diversas disciplinas. Inicialmente la pedagogía ha sido la que se ha ocupado de la mejora de la educación de los diversos contenidos curriculares, pero desde hace más de veinte años la psicología de la educación matemática ha asumido una parte importante de estos estudios en el caso de las matemáticas. Esto ha llevado a que el centro de atención haya sido el sujeto que aprende, considerando el contenido matemático en cierto modo como trasparente, esto es, no problemático en sí mismo.

También han surgido líneas de investigación que han tomado el estudio crítico del propio saber matemático como punto de entrada obligado de los estudios didácticos. Se trata de lo que Gascón (1998) llama "el programa epistemológico". Otros enfoques se han centrado en el análisis de los patrones de interacción didáctica en el seno de la clase de matemática, la negociación de significados (Cobb y Bauersfeld, 1995); el discurso, la comunicación y participación (Kieran, Forman y Sfard, 2001); el estudio del currículo de matemáticas (Rico, 1997); el pensamiento del profesor (Lin y Cooney, 2001; Llinares (2000), etc.

Esta variedad de líneas y enfoques de investigación ha ocasionado una diversidad de herramientas teóricas que tratan de describir y explicar los fenómenos cognitivos y didácticos: representaciones internas y externas, concepciones, esquema, situación didáctica, etc. El progreso en el campo exige contrastar estas herramientas y posiblemente elaborar otras nuevas que permitan realizar de manera más eficaz el trabajo requerido. Además, es necesario tratar de articular de manera coherente las diversas facetas implicadas, entre las que debemos citar, la faceta ontológica (tipos de objetos y su naturaleza), epistemológica (acceso al conocimiento), sociocultural e instruccional (enseñanza y aprendizaje organizado en el seno de los sistemas didácticos).

Pensamos que es necesario y posible construir un enfoque unificado de la cognición e instrucción matemática que permita superar los dilemas que se plantean entre los diversos paradigmas en competición: realismo - pragmatismo, cognición individual - institucional, constructivismo - conductismo, etc. La superación de los dilemas puede ser posible si se tienen en cuenta algunas herramientas conceptuales y metodológicas de disciplinas de tipo holístico como la semiótica, la antropología y la ecología, articuladas de manera coherente con disciplinas como la psicología y pedagogía que tradicionalmente han sido el punto de referencia inmediato para la didáctica de las matemáticas. En los apartados siguientes describimos brevemente algunas característica de estas disciplinas que consideramos de interés potencial para la investigación en didáctica de las matemáticas, y que tenemos en cuenta en la construcción de un enfoque unificado de la cognición e instrucción matemática.

1.5.1. Herramientas antropológicas

La antropología se ocupa del estudio de los seres humanos desde una perspectiva biológica, social y humanista. Se divide en dos grandes campos: la antropología física, que trata de la evolución biológica y la adaptación fisiológica de los seres humanos, y la antropología social o cultural, que se ocupa de las formas en que las personas viven en sociedad, es decir, la evolución de su lengua, cultura y costumbres. Una rama de la antropología cultural de relevancia particular para la educación matemática es la antropología cognitiva, que se centra en el estudio de las relaciones entre la cultura y el pensamiento humano, particularmente mediante los estudios del uso del lenguaje.

Al considerar las matemáticas como un aspecto o dimensión de la cultura humana, el estudio de su desarrollo en las distintas sociedades puede ser abordado como una faceta específica de la antropología cultural. De hecho, la línea de investigación conocida como etnomatemática (Nunes, 1992) se interesa por las características de los conocimientos matemáticos desarrollados en comunidades étnicas primitivas y en entornos profesionales de tipo artesanal. También se interesa por comparar este tipo de matemáticas con las matemáticas escolares. Una perspectiva más general es la adoptada por las investigaciones socioculturales realizadas en educación matemática (Atweh, Forgasz y Nebres, 2001).

A nivel de filosofía de la matemática, la manera de considerar la matemática por parte de Wittgenstein (Bloor, 1983) se suele presentar como antropológica. Se postula que los hombres en diferentes épocas y culturas, tienen educaciones, intereses y preocupaciones diversas; también son variadas las relaciones humanas y relaciones con la naturaleza y el mundo, lo que constituyen distintas formas de vida. Debido a ello, tales culturas forman diferentes estructuras conceptuales, adoptan diversas formas y normas de representación. Este planteamiento cognitivo general se aplica también a las matemáticas, lo que implica atribuir al conocimiento matemático una relatividad institucional. La necesidad lógica de las proposiciones matemáticas se justifica mediante la aceptación de convenciones en el uso del lenguaje que describe el mundo que nos rodea y el propio mundo de las matemáticas.

Otro uso del enfoque antropológico en didáctica de la matemática es el propuesto por Chevallard (1992), que ha sido uno de los puntos de partida de nuestros trabajos, como se describirá en el capítulo 3. El supuesto clave es considerar la matemática como una actividad humana, que se desarrolla en el seno de ciertas instituciones con el concurso de determinados instrumentos, principalmente lingüísticos, y que aporta técnicas para realizar determinado tipo de tareas. Como consecuencia, se asume que todo conocimiento es relativo a una institución. Los matemáticos profesionales constituyen una institución, al igual que la escuela, o las diversas profesiones; en el seno de estas instituciones se realizan prácticas matemáticas específicas que generan conocimientos matemáticos específicos.

En general, la adopción del enfoque antropológico para las matemáticas supone también atribuir un papel clave a los instrumentos lingüísticos usados para el desarrollo de la actividad matemática.

1.5.2. Herramientas ecológicas

Un objetivo del enfoque antropológico de la epistemología de las matemáticas será investigar las fuentes, modos de control, y mecanismos de crecimiento de las matemáticas en los distintos "nichos ecológicos" en que vive. Esta manera de expresar el problema en términos ecológicos es propia de la rama de la antropología conocida como antropología ecológica, la cual intenta proporcionar explicaciones materialistas de la sociedad y cultura humana como productos de adaptaciones a las condiciones dadas del entorno.

El concepto de adaptación al entorno es una noción clave dentro de la antropología ecológica. En nuestro caso los objetos "vivos" cuyas adaptaciones y funciones debemos estudiar son los objetos matemáticos, concebidos como "sistemas de prácticas" (capítulo 3).

Uno de los usos del paradigma ecológico en nuestro enfoque unificado de la cognición matemática será explorar las adaptaciones de la cultura matemática (hecha operativa mediante la noción de "sistema de prácticas") en relación a áreas culturales específicas (etnomatemáticas). Pero la indagación se centra además en los sistemas didácticos y niveles educativos, vistos como núcleos culturales con características idiosincrásicas. Como se describe en la sección 2.8 la metáfora ecológica permite plantear nuevas cuestiones relativas al estudio de las relaciones entre distintos objetos matemáticos, usando para ello nociones tales como simbiosis, dominancia, cadena trófica, etc.

La aplicación de las herramientas conceptuales de la ecología biológica a la antropología cultural (y dentro de ella a la antropología cultural matemática) añade nuevas perspectivas a la didáctica de la matemática como disciplina científica.

1.5.3. Herramientas semióticas

En los últimos años observamos un interés creciente en la comunidad de investigación en educación matemática por el uso de nociones semióticas en el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Así encontramos trabajos presentados en Grupo Internacional PME (Psychology of Mathematics Education) (Ernest, 1993; Vile y Lerman, 1996), y los realizados desde la perspectiva del interaccionismo simbólico, entre otros, por Bauersfeld y colaboradores (Cobb y Bauersfeld, 1995) que enfatizan la noción de significado y negociación de significados como centrales para la educación matemática. Destacamos también los trabajos sobre la influencia los sistemas de representación (Duval, 1993), simbolización y comunicación (Pimm, 1995; Cobb, Yackel y McClain, 2000), y, en general, del lenguaje y el discurso (Ellerton y Clarkson, 1996; Kieran, Forman y Sfard, 2001) en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, así como las investigaciones sobre la comprensión de las matemáticas (Sierpinska, 1994; Godino, 1996), que no pueden eludir las cuestiones del significado.

Este interés es consecuencia natural del papel esencial que desempeñan los medios de expresión en los procesos de pensamiento, como resaltan Vygotsky (1934), quien considera el significado de la palabra como unidad de análisis de la actividad psíquica, y Cassirer (1964: 27) para quien "el signo no es una mera envoltura eventual del pensamiento, sino su órgano esencial y necesario".

En el trabajo matemático, los símbolos (significantes) remiten o están en lugar de las entidades conceptuales (significados). El punto crucial en los procesos de instrucción matemática no es, sin embargo, el dominio de la sintaxis del lenguaje simbólico matemático, aunque ésta sea también importante, sino la comprensión de su semántica y pragmática, es decir, la naturaleza de los propios conceptos y proposiciones matemáticas y su dependencia de los contextos y situaciones-problemas de cuya resolución provienen. Además, es necesario elaborar modelos teóricos que traten de articular las dimensiones semiótica (en sus aspectos sintácticos, semánticos y pragmáticos), epistemológica, psicológica y sociocultural en educación matemática. Esta modelización, que utiliza la semiótica como componente fundamental, requiere tener en cuenta, entre otros, las siguientes hipótesis:

- Diversidad de objetos puestos en juego en la actividad matemática, tanto en el plano de la expresión como en el del contenido.

- Diversidad de actos y procesos de semiosis (interpretación) entre los distintos tipos de objetos y de los modos de producción de signos.
- Diversidad de contextos y circunstancias espacio-temporales y psicosociales que determinan y relativizan los procesos de semiosis.

1.6. HACIA UN ENFOQUE UNIFICADO DE LA COGNICIÓN Y LA INSTRUCCIÓN MATEMÁTICA: LA TEORÍA DE LAS FUNCIONES SEMIÓTICAS

Descritas brevemente las herramientas antropológicas, ecológicas y semióticas en las que apoyamos nuestro trabajo, estamos en condiciones de presentar el problema de investigación sobre el que se centra esta Monografía. Podemos describirlo brevemente como la elaboración de un enfoque teórico unificado de la cognición e instrucción matemática, a partir de una ontología matemática y una semiótica propia, adaptada a las necesidades de investigación en didáctica de las matemáticas.

Esta problemática se ha gestado en tres etapas diferenciadas de nuestro trabajo, en cada una de las cuales hemos ido refinando progresivamente el objeto de nuestra investigación. A continuación describimos sucintamente las tres etapas y los problemas abordados en cada una de ellas. En los capítulos sucesivos se presentarán las aportaciones realizadas en cada uno de dichos problemas.

En nuestros primeros trabajos, publicados en el periodo 1991- 98 (Godino, 1991; 1993; 1996, Godino y Batanero 1994; 1998) progresivamente desarrollamos y precisamos las nociones de "significado institucional y personal de un objeto matemático". Desde supuestos pragmáticos, estas ideas trataban de centrar el interés de la investigación en los conocimientos matemáticos institucionalizados, pero sin perder de vista el sujeto individual hacia el que se dirige el esfuerzo educativo.

En estos trabajos sugerimos que al preguntarnos, por ejemplo, qué es la "mediana" (o número real, función, etc.), o lo que es equivalente, cuando nos interesamos por "qué significa 'mediana'", debemos pensar en términos de los "sistemas de prácticas que realiza una persona para resolver cierto tipo de problemas". Esas prácticas –acciones o manifestaciones operatorias y discursivas- pueden ser atribuidas a un sujeto individual, en cuyo caso hablamos de significado del objeto personal, o pueden ser compartidas en el seno de una institución y entonces decimos que se trata del significado del objeto institucional correspondiente.

Interesa hacer dos observaciones sobre esta elaboración teórica:

- Como respuesta a la cuestión, ¿qué es un objeto matemático?, construimos otro objeto, "el sistema de prácticas" que podríamos designar con el término 'praxeología' dado que tales sistemas de prácticas incluyen tanto componentes operatorios como discursivos[1] .
- El objeto "sistema de prácticas" se presenta como el contenido que proponemos asignar a la expresión que designa el objeto, por ejemplo, "mediana". Establecemos, por tanto, una correspondencia entre ambos objetos, en la que el sistema de prácticas viene a ser el significado (sistémico) de la expresión 'mediana'.

En nuestro trabajo el significado se concibe como el contenido asignado a una expresión (función semiótica en el sentido de Hjemslev, 1943). No tiene por qué ser necesariamente una entidad mental, aunque también puede serlo: es sencillamente aquello a lo cual se refiere un sujeto en un momento y circunstancias dadas. En ciertos actos comunicativos nos referimos a "sistemas de prácticas" (significado sistémico), mientras que en otros nos referimos a elementos constitutivos de tales sistemas (significado elemental).

El modelo teórico sobre los significados institucionales y personales desarrollado en Godino y Batanero (1998)[2] permitió describir una agenda de investigación en base a las nociones de *semiometría* (caracterización de significados sistémicos) y *ecología de significados* (relaciones entre significados). La productividad de dicha agenda ha quedado mostrada en los diferentes trabajos realizados en nuestro grupo de investigación y otros grupos de diferentes universidades que se basan en el marco teórico desarrollado y que describiremos en el capítulo 11.

En una segunda etapa de nuestro trabajo teórico (a partir de 1998) hemos considerado, sin embargo, necesario elaborar modelos ontológicos y semióticos más detallados que el llevado a cabo hasta dicha fecha.

[1] El término 'praxeología' ha sido introducido por Chevallard (1997) para designar una entidad asimilable a nuestro "sistema de prácticas operativas y discursivas" (Godino, y Batanero, 1994). En el Capítulo 3 analizamos con detalle las conexiones de nuestro modelo teórico con la Teoría Antropológica elaborada por Chevallard (1992).
[2] Sierpinska y Kilpatrick (1998, p. 535) califican nuestro modelo teórico como "una epistemología – especialmente adaptada para las necesidades de la investigación en educación matemática".

Esta reflexión surge del hecho que el problema epistémico-cognitivo no puede desligarse del ontológico. Por este motivo nos sentimos interesados en continuar con la elaboración de una ontología suficientemente rica para describir la actividad matemática y los procesos de comunicación de sus "producciones". Como objeto básico para el análisis cognitivo (tanto en su dimensión institucional como personal) propusimos "los sistemas de prácticas manifestadas por un sujeto (o en el seno de una institución) ante una clase de situaciones-problemas".

Sin embargo, en los procesos comunicativos que tienen lugar en la educación matemática, no sólo hay que interpretar las entidades conceptuales, sino también las situaciones problemáticas y los propios medios expresivos y argumentativos desencadenan procesos interpretativos. Ello supone conocer los diversos objetos emergentes de los tipos o subsistemas de prácticas, así como su estructura.

Llegamos a la conclusión de que era preciso estudiar con más amplitud y profundidad las relaciones dialécticas entre el pensamiento (las ideas matemáticas), el lenguaje matemático (sistemas de signos) y las situaciones-problemas para cuya resolución se inventan tales recursos. En consecuencia, en este periodo hemos tratado de progresar en el desarrollo de una ontología y una semiótica específica que estudie los procesos de interpretación de los sistemas de signos matemáticos puestos en juego en el seno de los sistemas didácticos.

Estas cuestiones son centrales en otras disciplinas (como la semiótica, la epistemología y la psicología), aunque constatamos que no se puede hablar de una solución clara para las mismas. Las respuestas dadas son diversas, incompatibles o difíciles de compaginar, como se puede ver, por ejemplo, en los dilemas planteados por las aproximaciones propuestas por Peirce (1965), Saussure (1915) y Wittgenstein (1953).

Nosotros hemos tratado de dar una respuesta particular desde el punto de vista de la didáctica de las matemáticas, ampliando las investigaciones realizadas hasta la fecha sobre los significados institucionales y personales y completando también la idea de función semiótica y la ontología matemática asociada que introdujimos en Godino y Recio (1997). Paralelamente, nuevas investigaciones empíricas se han ido sustentando en los nuevos desarrollos teóricos y, a su vez, han permitido poner a prueba su utilidad y pertinencia (Recio, 1999, Roa, 2000, Tauber, 2001; Arrieche, 2002; Font, 2000a; Etchegaray, 2001; Gatica, 2001).

En una tercera etapa de nuestro trabajo nos hemos interesado por los modelos teóricos propuestos en el seno de la didáctica de las matemáticas sobre la instrucción matemática, entendida como "enseñanza y aprendizaje organizado en el seno de los sistemas didácticos". En el capítulo 8 ampliamos y organizamos las ideas que comenzamos a desarrollar en Godino (1999b) sobre esta faceta, proponiendo algunas nociones que permiten analizar con detalle los procesos de instrucción. Proponemos tener en cuenta en la instrucción matemática seis dimensiones o facetas interdependientes, cada una de las cuales se puede modelizar mediante procesos estocásticos, con sus respectivos estados y trayectorias muestrales. Tales dimensiones son las siguientes: epistémica (relativa al conocimiento institucional), docente (funciones del profesor), discente (funciones del estudiante), mediacional (relativa al uso de recursos instruccionales), cognitiva (cronogénesis de los significados personales de lso estudiantes) y emocional (afectos, valores, sentimientos, implicados en el estudio de un contenido matemático). El modelo ontológico y semiótico de la cognición desarrollado en esta Monografía proporciona criterios para identificar los estados posibles de la trayectoria epistémica, y la adopción de la "negociación de significados" como noción clave para la gestión de las trayectorias didácticas. El aprendizaje matemático se concibe como el resultado de los patrones de interacción entre los distintos componentes de dichas trayectorias.

Una vez descrita la problemática abordada en cada una de las fases de nuestro trabajo estamos en condiciones de desarrollarla con detalle y describir el sistema de nociones que hemos ido introduciendo a lo largo de estos doce años como respuesta a las cuestiones planteadas.

El sistema teórico desarrollado no surge de la nada. Por el contrario, hemos llevado a cabo un extenso trabajo de revisión y análisis de los principales trabajos publicados sobre teoría de la educación matemática, y demás disciplinas que nos sirven de apoyo. En el capítulo 2 incluimos una síntesis de las principales teorías y enfoques de investigación que hemos tenido en cuenta, y sobre los cuales apoyamos nuestro trabajo. En el capítulo 10 mostramos las concordancias y complementariedades entre las nociones que proponemos y otros constructos usados para estudiar la cognición matemática y su desarrollo.

Capítulo 2

ONTOLOGÍAS Y EPISTEMOLOGÍAS SOBRE LA COGNICIÓN MATEMÁTICA

2.1. Introducción
2.2. Naturaleza de los objetos matemáticos
2.3. Lenguaje matemático: Representación y significación
    2.3.2. Teorías referenciales
    2.3.3. Teorías operacionales
    2.3.4. Semiótica y filosofía del lenguaje
2.4. Naturaleza de las matemáticas según Wittgenstein
    2.4.1. El lenguaje matemático como herramienta
    2.4.2. Alternativa al platonismo y mentalismo
    2.4.3. Creación intradiscursiva de los objetos matemáticos (Sfard)
    2.4.4. Características y limitaciones del convencionalismo de Wittgenstein como modelo de cognición matemática
2.5.Representaciones internas y externas
    2.5.1. Sistemas de representación en educación matemática
    2.5.3. Registros de representación, comprensión y aprendizaje
    2.5.4. Esquemas cognitivos
    2.5.5.Conceptos y concepciones en educación matemática
2.6. Epistemologías de la matemática
    2.6.1. Constructivismos. Epistemología genética
    2.6.2. Interaccionismo simbólico como acceso al conocimiento
    2.6.3. Aprendizaje discursivo o comunicacional
    2.6.4. Una epistemología experimental: La Teoría de las Situaciones Didácticas
    2.6.5. Antropología cognitiva: La matemática como actividad humana
2.7. La metáfora ecológica en el estudio de la cognición matemática
2.8. Necesidad de un enfoque unificado sobre la cognición y la instrucción matemática

2.1. INTRODUCCIÓN

Antes de presentar nuestra propuesta para progresar hacia un modelo unificado de la cognición e instrucción matemática, en este capítulo haremos una síntesis de los principales modelos ontológicos, y epistemológicos que servirán de punto de partida para dicho enfoque unificado. Después de una breve reflexión sobre la naturaleza de los objetos matemáticos describimos:

- Las teorías referenciales y operacionales sobre el significado, así como el marco general de la semiótica y filosofía del lenguaje como punto de entrada al estudio de los objetos matemáticos.
- La posición de Wittgenstein como promotor de la visión antropológica sobre las matemáticas.
- Las nociones de representación interna y externa sobre el conocimiento, incluyendo la noción de esquema cognitivo y concepción en sus diversas acepciones.
- Enfoques epistemológicos (constructivismos, interaccionismo simbólico, aprendizaje discursivo, teoría de situaciones didácticas, antropología cognitiva).
- Uso de la metáfora ecológica en el estudio de los conocimientos matemáticos institucionales.

Concluimos el capítulo con unas reflexiones sobre la necesidad de progresar hacia un enfoque unificado de la cognición matemática, en sus facetas personales e institucionales, y su desarrollo mediante la instrucción matemática.

Somos conscientes del carácter limitado de esta síntesis, dado que la cognición matemática ha sido y es una constante en filosofía, lingüística, semiótica, psicología y demás ciencias y tecnologías interesadas por la cognición humana. Hemos optado por incluir las principales corrientes y modelos específicos sobre los que hemos basado nuestras reflexiones e indagaciones.

2.2. NATURALEZA DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS

La Didáctica de las Matemáticas se interesa por identificar el significado que los alumnos atribuyen a los términos y símbolos matemáticos, a los conceptos y proposiciones, así como explicar la construcción de estos significados como consecuencia de la instrucción.

La noción de significado, utilizada con frecuencia de modo informal en los estudios didácticos, es un tema central y controvertido en filosofía, lógica, semiótica y demás ciencias y tecnologías interesadas en la cognición humana. El análisis de esta noción desde un punto de vista didáctico puede ayudar a comprender las relaciones entre las distintas formulaciones teóricas en esta disciplina y permitir estudiar bajo una nueva perspectiva las cuestiones de investigación, particularmente las referidas a la evaluación de los conocimientos y la organización de los procesos instruccionales.

El papel relevante que la idea de significado tiene, por tanto, para la Didáctica se pone de relieve por el uso que hacen de ella algunos autores interesados por el fundamento de esta disciplina. Así, Balacheff (1990) cita el significado como palabra clave de la problemática de investigación de la Didáctica de la Matemática: "Un problema pertenece a una problemática de investigación sobre la enseñanza de la matemática si está específicamente relacionado con el significado matemático de las conductas de los alumnos en la clase de matemáticas" (p. 258). Como cuestiones centrales para la Didáctica de la Matemática menciona las siguientes:

- ¿Qué significado matemático de las concepciones de los alumnos podemos inferir a partir de una observación de su conducta?

- ¿Qué clase de significado pueden construir los alumnos en el contexto de la enseñanza de las matemáticas?

- ¿Cuál es la relación entre el significado del contenido a enseñar y el del conocimiento matemático elegido como referencia?

- ¿Cómo podemos caracterizar el significado de los conceptos matemáticos?

También Brousseau (1980) destaca como centrales las preguntas siguientes: "¿Cuáles son las componentes del significado que pueden deducirse del comportamiento matemático observado en el alumno?; ¿Cuáles son las condiciones que conducen a la reproducción de la conducta, teniendo la misma significación, el mismo significado?" (p. 132). Asimismo, Brousseau (1986) se pregunta si existe una "variedad didáctica" del concepto de sentido, desconocida en lingüística, psicología o en matemáticas.

Otra autora que considera básica para la Didáctica de la Matemática la idea de significado es Sierpinska (1990), quien, a su vez, la relaciona íntimamente con la comprensión: "Comprender el concepto será entonces concebido como el acto de captar su significado. Este acto será probablemente un acto de generalización y síntesis de significados relacionados a elementos particulares de la "estructura" del concepto (la "estructura" es la red de sentidos de las sentencias que hemos considerado). Estos significados particulares tienen que ser captados en actos de comprensión" (p. 27). "La metodología de los actos de comprensión se preocupa principalmente por el proceso de construir el significado de los conceptos" (p. 35).

Dummett (1991) relaciona, asimismo, el significado y la comprensión desde una perspectiva más general: "una teoría del significado es una teoría de la comprensión; esto es, aquello de lo que una teoría del significado tiene que dar cuenta es lo que alguien conoce cuando conoce el lenguaje, esto es, cuando conoce los significados de las expresiones y oraciones del lenguaje" (p. 372).

Desde el punto de vista de la psicología cultural, el objetivo principal de la misma, según Bruner (1990), es el estudio de las reglas a las que recurren los seres humanos a la hora de crear significados en contextos culturales. "El concepto fundamental de la psicología humana es el de significado y los procesos y transacciones que se dan en la construcción de los significados" (Bruner, 1990, p. 47).

A pesar del carácter relevante que la idea de significado tiene, no sólo para la Didáctica de la Matemática, sino para la psicología en general, no se encuentra en la literatura de la especialidad un análisis explícito de qué sea el significado de las nociones matemáticas. Los investigadores en esta disciplina utilizan el término "significado" de un modo que podemos calificar de lenguaje ordinario, o sea, con un sentido intuitivo o pre-teórico. "Lo que entendemos por 'comprensión' y 'significado' está lejos de ser obvio o claro, a pesar de ser dos términos centrales en toda discusión sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en cualquier nivel" (Pimm, 1995, p. 3).

La preocupación por el significado de los términos y conceptos matemáticos lleva directamente a la indagación sobre la naturaleza de los objetos matemáticos, a la reflexión ontológica y epistemológica sobre la génesis personal y cultural del conocimiento matemático y su mutua interdependencia. Recíprocamente, detrás de toda teoría sobre la formación de conceptos, o más general, de toda teoría del aprendizaje hay unos presupuestos epistemológicos sobre la naturaleza de los conceptos, y por tanto, una teoría más o menos explícita del significado de los mismos.

2.3. LENGUAJE MATEMÁTICO: SIGNIFICADO Y REPRESENTACIÓN

Como hemos indicado, el término 'significado' se usa de una manera persistente en la investigación y en la práctica de la educación matemática, ligado al de 'comprensión'. Se considera esencial que los estudiantes conozcan el significado de los términos, expresiones, representaciones, o sea, a qué hace referencia el lenguaje matemático en sus diferentes registros.

Pero el 'significado' "es uno de los términos más ambiguos y más controvertidos de la teoría del lenguaje" (Ullmann, 1962, p. 62). En el texto clásico *The Meaning of Meaning*, Ogden y Richards (1923) recogieron no menos de diecisiete definiciones de 'significado'. Desde entonces se han añadido muchos nuevos usos, implícitos o explícitos, incrementando por tanto su ambigüedad. A pesar de esto la mayoría de los tratadistas, son reacios a abandonar un término tan fundamental; prefieren definirlo de nuevo y añadirle varias calificaciones[1].

La complejidad del problema semántico del lenguaje matemático se incrementa por la variedad de registros semióticos utilizados en la actividad matemática (uso del lenguaje ordinario, oral y escrito, símbolos específicos, representaciones gráficas, objetos materiales, etc.). Además, no sólo nos interesa analizar el "significado" de los objetos lingüísticos matemáticos, sino también los diversos "objetos matemáticos" (situaciones-problemas, técnicas, conceptos, proposiciones, argumentaciones, teorías, etc.).

En términos generales hay dos escuelas de pensamiento en la lingüística que abordan la cuestión del significado desde puntos de vista diferentes: la tendencia "analítica" o "referencial", que intenta apresar la esencia del significado resolviéndolo en sus componentes principales, y la tendencia "operacional", que estudia las palabras en acción y se interesa menos por qué es el significado por cómo opera.

En este apartado vamos a sintetizar las principales características de estos enfoques semióticos, tratando de identificar sus respectivas

[1] Ullmann, o.p., p. 62.

potencialidades y limitaciones para su aplicación al estudio de la cognición matemática.

2.3.1. Teorías referenciales o analíticas del significado

El análisis del significado de los objetos matemáticos está estrechamente relacionado con el problema de las representaciones externas e internas de dichos objetos. La relación de significación se suele describir como una relación ternaria, analizable en tres relaciones binarias, dos directas y una indirecta, como se propone en el llamado "triángulo básico" de Ogden y Richards (1923) (Figura 1).

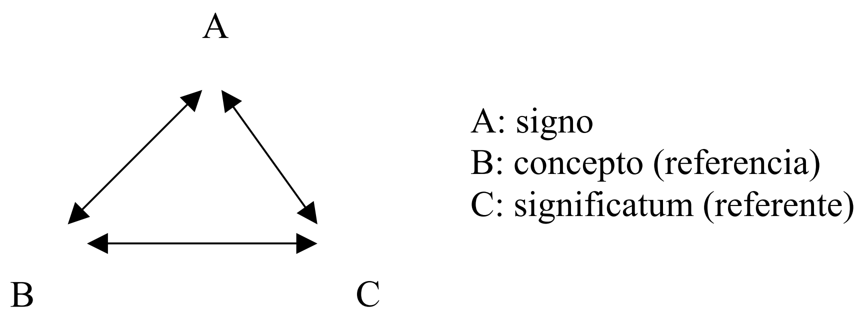


Figura 1

Por ejemplo, A es la palabra 'mesa', C es una mesa particular a la cual me refiero y B es el concepto de mesa, algo existente en mi mente. La relación entre A y C es indirecta por medio del concepto de mesa.

Si consideramos que existe un concepto matemático C en algún mundo platónico, el concepto C sería el referente, A el significante matemático (palabra o símbolo) y B el concepto matemático individual del sujeto.

Este análisis ternario del proceso de significación plantea muchas cuestiones, en particular cuando se ponen en juego "objetos matemáticos", para los que no existe un acuerdo en las ciencias cognitivas. Por ejemplo, ¿cuál es el estatus psicológico u ontológico del concepto B? ¿El referente C, es un referente particular, es una clase de objetos, o más bien un representante de esta clase? El objeto C genera una imagen mental C' ¿Qué relación hay entre el concepto B y la imagen mental C'?

Como describe Font (2000b), la opción epistemológica "representacionalista", presupone que la mente de las personas producen procesos mentales y que los objetos externos a las personas generan representaciones mentales internas. La opción representacionalista presupone que tanto el referente como el significante tienen un equivalente en la mente del sujeto que los utiliza. Con este postulado, a los objetos A (significante) y C (referente) se les asocia otros objetos A' y C', que junto a B (referencia conceptual individual) se consideran como representaciones mentales. A sería una representación externa de C, mientras que C se considera un objeto exterior al sujeto. En esta opción representacionista del conocimiento, la mente se considera como un espejo en el que se reflejan los objetos del mundo exterior.

Las posiciones epistemológicas no representacionistas rechazan el postulado básico del representacionismo según el cual existe una relación homeomórfica entre objetos mentales y objetos externos.

El término representación se usa con diferentes sentidos. Por una parte, la representación es considerada como un objeto, bien mental (A', C', B), o real A, C; pero también la representación es la relación o correspondencia que se establece entre dos objetos, de manera que uno de ellos se pone en lugar del otro. Esta relación puede darse entre objetos del mismo mundo, o entre mundos diferentes (Font, 2000b), lo que tiene implicaciones ontológicas muy diferentes. La relación entre objetos del mismo mundo es una manera débil y bastante admitida de considerar la representación, ya que se refiere a todo aquello que se puede interpretar a propósito de otra cosa. La relación entre objetos de mundos diferentes es una manera mucho más fuerte de entender la representación, ya que presupone una realidad exterior y su correspondiente imagen mental, así como una determinada manera de entender la percepción, el lenguaje y la cognición.

La problemática del significado nos lleva a la compleja cuestión: ¿cuál es la naturaleza del significatum del concepto?, o más general, ¿cuál es la naturaleza de los objetos matemáticos?

En matemáticas, los distintos tipos de definiciones que se utilizan (por abstracción, inducción completa, etc.) describen con precisión las notas características de sus objetos: un concepto matemático viene dado por sus atributos y por las relaciones existentes entre los mismos. Pero en el campo de la psicología cognitiva, interesada por los procesos de formación de los conceptos, la concepción según la cual no existen atributos necesarios y suficientes que determinen completamente la estructura interna de los conceptos ha adquirido una posición dominante. Como indica Pozo (1989), a partir fundamentalmente de la obra de E. Rosch, se ha impuesto la idea de que los conceptos están definidos de un modo difuso. Esta nos parece que es la posición adoptada por Vergnaud (1982, 1990) quien propone una definición de concepto, adaptada para los estudios psicológicos y didácticos, en la cual incluye no solo las propiedades invariantes que dan sentido al concepto, sino también las situaciones y los significantes asociados al mismo.

De acuerdo con Kutschera (1979) las teorías del significado pueden agruparse en dos categorías: realistas y pragmáticas. Las teorías realistas (o figurativas) conciben el significado como una relación convencional entre signos y entidades concretas o ideales que existen independientemente de los signos lingüísticos; en consecuencia, suponen un realismo conceptual. "Según esta concepción el significado de una expresión lingüística no depende de su uso en situaciones concretas, sino que el uso se rige por el significado, siendo posible una división tajante entre semántica y pragmática" (Kutschera, 1979; p. 34). Una palabra se hace significativa por el hecho de que se le asigna un objeto, un concepto o una proposición como significado. De esta forma hay entidades, no necesariamente concretas, aunque siempre objetivamente dadas con anterioridad a las palabras, que son sus significados.

La forma más simple de la semántica realista se presenta en los autores que atribuyen a las expresiones lingüísticas solo una función semántica, consistente en designar (en virtud de unas convenciones) ciertas entidades, por ejemplo:

- el significado de un nombre propio consiste en el objeto que se designa por dicho nombre;
- los predicados (por ejemplo, esto es rojo; A es más grande que B) designan propiedades o relaciones o, en general, atributos;
- las oraciones simples (sujeto - predicado - objeto) designan hechos (por ejemplo, Madrid es una ciudad)

En las teorías realistas (como las defendidas por Frege, Carnap, los escritos de Wittgenstein del *Tractatus,...*), por tanto, las expresiones lingüísticas tienen una relación de atribución con ciertas entidades (objetos, atributos, hechos). La función semántica de las expresiones consiste simplemente en esa relación convencional, designada como relación nominal.

2.3.2. Teorías operacionales o pragmáticas del significado

Una concepción enteramente diferente del significado es la formulada por Wittgenstein en *Philosophical Investigations* publicadas póstumamente en 1953, aunque un cuarto de siglo antes Bridgman (1927) había recalcado el carácter puramente operacional de conceptos científicos como "longitud", "tiempo" o "energía"[2]. "Entendemos por cualquier concepto nada más que una serie de operaciones; el concepto es sinónimo con el correspondiente conjunto de operaciones". Esta manera de concebir los conceptos científicos se extendió al significado de las palabras en general mediante la fórmula: "El verdadero significado de una palabra ha de encontrarse observando lo que un hombre hace con ella, no lo que dice acerca de ella". Wittgenstein da un paso más afirmando que el significado de una palabra es su uso: "Para un gran número de casos -aunque no para todos- en que empleamos la palabra "significado", este puede definirse así: el significado de una palabra *es* su uso en el lenguaje" (Wittgenstein, 1953, p. 20).

La concepción operacionista del significado resalta el carácter instrumental del lenguaje. "Pensad en los utensilios de una caja de herramientas: hay allí un martillo, alicates, un serrucho, un destornillador, una regla, un bote de cola, cola, clavos y tornillos. Las funciones de las palabras son tan diversas como las funciones de estos objetos" (Wittgenstein, 1953, p. 6). Al igual que ocurre en el ajedrez, en el que "el significado" de una pieza debemos referirlo a las reglas de su uso en el juego, el significado de las palabras vendrá dado por su uso en el juego de lenguaje en que participa.

El enfoque operacional tiene el mérito de definir el significado en términos contextuales, es decir, puramente empíricos, sin necesidad de recurrir a estados o procesos mentales vagos, intangibles y subjetivos. Sin embargo, aunque da cuenta perfectamente de la valencia instrumental del lenguaje, no así de la valencia representacional, de la que no se puede

[2] Citado por Ullmann, o.c., p. 73.

prescindir, como el propio Wittgenstein reconoce. Al indagar en los usos de los términos y expresiones encontraremos con frecuencia usos típicos extrayendo el rasgo o rasgos comunes de una selección representativa de contextos. De esta manera podemos asignar a las palabras o expresiones el uso prototípico identificado llegando de esta manera a una concepción referencial del significado. "La terminología sería diferente, pero reaparecería el dualismo básico, con el "uso", desempeñando el mismo papel que el "sentido", la "referencia" u otros términos de teorías más abiertamente referenciales" (Ullmann, 1962, p. 76).

En lo que respecta a la categoría operacional de las teorías del significado, calificadas también como pragmáticas, las dos ideas básicas son las siguientes:

- el significado de las expresiones lingüísticas depende del contexto en que se usan;
- niegan la posibilidad de observación científica, empírica e intersubjetiva de las entidades abstractas - como conceptos o proposiciones-, que es admitida implícitamente en las teorías realistas. Lo único accesible a la observación en estos casos, y por tanto, el punto de donde hay que partir en una investigación científica del lenguaje es el uso lingüístico. A partir de tal uso es como se debe inferir el significado de los objetos abstractos.

Como hemos indicado, una concepción pragmática u operacional del significado es abiertamente defendida por Wittgenstein en su obra *Investigaciones filosóficas*. En su formulación una palabra se hace significativa por el hecho de desempeñar una determinada función en un juego lingüístico, por el hecho de ser usada en este juego de una manera determinada y para un fin concreto. Para que una palabra resulte significativa, no es preciso, pues, que haya algo que sea el significado de esa palabra.

Para Wittgenstein no existe siempre una realidad en sí que sea reflejada por el lenguaje, cuyas estructuras tengan, por tanto, que regirse de acuerdo con las estructuras ontológicas, sino que el mundo se nos revela sólo en la descripción lingüística. Para este autor, hablar es ante todo una actividad humana que tiene lugar en contextos situacionales y accionales muy diversos y debe, por tanto, ser considerada y analizada en el plano de estos contextos. El lenguaje puede formar parte de diversas "formas de vida"; hay tantos modos distintos de empleo del lenguaje, tantos juegos lingüísticos, como contextos situacionales y accionales.

2.3.3. Complementariedad entre teorías realistas y pragmáticas del significado

La aplicación de los supuestos ontológicos de la semántica realista a la Matemática se corresponde con una visión platónica de los objetos matemáticos (conceptos, proposiciones, teorías, contextos, ...). Según esta posición filosófica, las nociones y estructuras matemáticas tienen una existencia real, independiente de la humanidad, en algún dominio ideal. El conocimiento matemático consiste en descubrir las relaciones preexistentes que conectan estos objetos.

Esta concepción implica, además, una visión absolutista del conocimiento matemático, en el sentido de que éste es considerado como un sistema de verdades seguras e inmutables. Bajo estos supuestos el significado del término "función", por ejemplo, sería simplemente el concepto de función, dado por su definición matemática.

A pesar de los distinguidos representantes de esta corriente, entre los que se cuentan Frege, Russell, Cantor, Bernays, Hardy, Gödel, ..., han aparecido nuevas tendencias en la filosofía de las matemáticas que aportan críticas severas a la perspectiva absolutista y platónica de las matemáticas. Una síntesis de estas críticas y una visión de las matemáticas desde una perspectiva falible, basada en el convencionalismo de Wittgenstein y en el cuasi-empiricismo de Lakatos, podemos encontrarla en Ernest (1991).

Desde el punto de vista epistemológico, la definición pragmática del significado "es mucho más satisfactoria que la teoría figurativa realista: al desaparecer los conceptos y proposiciones como datos independientes de la lengua, se disipa también el problema de cómo pueden ser conocidas esas entidades, y nos acercamos a los fenómenos que justifican la dependencia del pensamiento y de la experiencia respecto del lenguaje" (Kutschera, 1979; p. 148).

Desde nuestro punto de vista, los supuestos ontológicos del constructivismo social como filosofía de las matemáticas (Ernest, 1998) llevan también a la adopción de las teorías pragmáticas del significado. Los objetos matemáticos deben ser considerados como símbolos de unidades culturales, emergentes de un sistema de usos ligados a las actividades de resolución de problemas que realizan ciertos grupos de personas y que van evolucionando con el tiempo. En nuestra concepción, es el hecho de que en el seno de ciertas instituciones se realicen determinados tipos de prácticas lo que determina la emergencia progresiva de los "objetos matemáticos" y que el "significado" de estos objetos esté íntimamente ligado a los problemas y a la actividad realizada para su resolución, no pudiéndose reducir este significado del objeto a su mera definición matemática.

Según lo expuesto hasta ahora, encontramos un dilema entre las teorías realistas y pragmáticas que parece difícil de superar. Sin embargo, Ullman (1962) presenta las teorías de tipo pragmático (que denomina operacionales o contextuales) como un complemento válido de las teorías de tipo realista (que denomina referenciales). “Contiene la saludable advertencia que tanto los semánticos y los lexicógrafos harían bien en atender, de que el significado de una palabra *solamente* puede averiguarse estudiando su uso. No hay ningún atajo hacia el significado mediante la introspección o cualquier otro método. El investigador debe comenzar por reunir una muestra adecuada de contextos y abordarlos luego con un espíritu abierto, permitiendo que el significado o los significados emerjan de los contextos mismos. Una vez que se ha concluido esta fase, puede pasar con seguridad a la fase “referencial” y procurar formular el significado o los significados así identificados. La relación entre los dos métodos, o más bien entre las dos fases de la indagación, es, en definitiva, la misma que hay entre la lengua y el habla: la teoría operacional trata del significado en el habla; la referencial, del significado en la lengua. No hay, absolutamente, necesidad de colocar los dos modos de acceso uno frente a otro: cada uno maneja su propio lado del problema, y ninguno es completo sin el otro” (p`. 76-77).

Esta observación de Ullmann nos parece fundamental y nos sirve de apoyo para el modelo de significado que proponemos en el Capítulo 3. Para nosotros el significado comienza siendo pragmático, relativo al contexto, pero existen tipos de usos que permiten orientar los procesos de enseñanza y aprendizaje matemático. Estos tipos de usos son objetivados mediante el lenguaje y constituyen los referentes del léxico institucional.

2.3.4. Semiótica y filosofía del lenguaje

La teoría del lenguaje de Hjelmslev

Consideramos que la teoría del lenguaje del lingüísta danés Hjelmslev (1943) puede ser de utilidad para describir la actividad matemática y los procesos cognitivos implicados, tanto en la producción, como en la comunicación de conocimientos matemáticos.

La descripción y análisis de los procesos de estudio matemático requiere transcribir en forma textual las manifestaciones lingüísticas de los sujetos participantes, y los acontecimientos que tienen lugar en la interacción didáctica. El investigador en didáctica dispone finalmente para realizar su trabajo de los textos con la planificación del proceso instruccional, transcripciones del desarrollo de las clases, entrevistas y respuestas escritas a pruebas de evaluación, etc. En definitiva, el análisis se aplicará a un *texto* que registra la actividad matemática desarrollada por los sujetos participantes.

Partiendo del texto como dato, la teoría lingüística de Hjemslev intenta mostrar el camino que lleva a una descripción autoconsecuente y exhaustiva del mismo por medio del análisis. Dicho análisis se concibe como una progresión deductiva de la clase al componente y al componente del componente, así como a la identificación adecuada de las dependencias mutuas entre las distintas partes entre sí, sus componentes y el texto en su conjunto. El principio básico del análisis es que “tanto el objeto sometido a examen como sus partes tienen existencia sólo en virtud de las dependencias mutuas; la totalidad del objeto sometido a examen sólo puede definirse por la suma total de dichas dependencias. Así mismo, cada una de las partes puede sólo definirse por las dependencias que le unen a otras coordinadas, al conjunto, y a sus partes del grado próximo, y por la suma de las dependencias que estas partes del grado próximo contraen entre sí" (Hjelmslev 1943: 40).

Una noción clave en la teoría del lenguaje de Hjelmslev es la de *función*, que se concibe como la dependencia entre el texto y sus componentes y entre estos componentes entre sí. Se dice que hay función entre una clase y sus componentes y entre los componentes entre sí. A los terminales de una función los llama funtivos, esto es, cualquier objeto que tiene función con otros. Esta noción de función está a medio camino entre el lógico-matemático y el etimológico, más próximo en lo formal al primero, pero no idéntico a él. “Así podemos decir que una entidad del texto tiene ciertas funciones, y con ello pensar: primero, aproximándonos al significado lógico-matemático, que la entidad tiene dependencias con otras entidades, de tal suerte que ciertas entidades presuponen a otras; y segundo, aproximándonos al significado etimológico, que la entidad funciona de un modo definido, cumple un papel definido, toma una "posición" definida en la cadena" (p. 56).

La función de signo

La noción de signo que propone Hjelmslev está ligada a su consideración de la lengua como un *sistema de signos*. El concepto vago de signo, legado por la tradición, es que "signo" (o expresión de signo) se caracteriza primero y principalmente por ser signo de alguna otra cosa, lo que parece indicar que "signo" se define por una función. Un signo funciona, designa, denota; un signo, en contraposición a un no-signo, es el portador de una significación (p. 68). "Toda entidad, y por tanto todo signo, se define con carácter relativo, no absoluto, y sólo por el lugar que ocupa en el contexto" (p. 69).

Entre los posibles tipos de dependencias que se pueden identificar entre partes de un texto destacan aquellas en que una parte designa o denota alguna otra; la primera (plano de expresión) funciona o se pone en representación de la segunda (plano del contenido), esto es, señala hacia un contenido que hay fuera de la expresión. Esta función es la que designa Hjemslev como *función de signo* y que Eco (1979: 83) presenta como *función semiótica*.

En esta teoría, y en consonancia con las propuestas de Saussure, la palabra 'signo' no se aplica a la expresión sino a la entidad generada por la conexión entre una expresión y un contenido. La expresión y el contenido son los funtivos entre los que la función de signo establece una dependencia: "no puede concebirse una función sin sus terminales, y los terminales son únicamente puntos finales de la función y, por tanto, inconcebibles sin ella" (Hjelmslev, 1943: 75).

Con frecuencia se usa la palabra 'signo' para designar especialmente la forma de la expresión; pero parece más adecuado usar dicha palabra para designar la unidad que consta de forma de contenido y forma de expresión y que se establece mediante la solidaridad que este autor llama función de signo. La distinción entre expresión y contenido y su interacción en la función de signo es algo básico en la estructura de cualquier lengua. Cualquier signo, cualquier sistema de signos, cualquier lengua contiene en sí una forma de la expresión y una forma del contenido. La primera etapa del análisis de un texto debe consistir, por tanto, en un análisis que diferencie estas dos entidades.

Sugerimos tener en cuenta que, además de estas dependencias representacionales existen otras dependencias de naturaleza operatoria o *actuativa* entre distintas partes de un texto. Así mismo, dos o más partes de un texto pueden estar relacionadas de tal modo que conjuntamente *cooperan* para producir una unidad significativa más global.

La teoría del lenguaje de Hjemslev, junto con la ontología matemática que presentamos en los capítulos 3 y 4, desempeñará un papel crucial en la formulación de nuestra teoría de las *funciones semióticas*, a las que atribuimos papeles representacionales, operativos y cooperativos, y que se presenta en el capítulo 7 de esta monografía.

Semiótica cognitiva de Eco

La semiótica cognitiva esbozada por Eco en su libro "*Kant y el ornitorrinco*", publicado en 1999, nos permite interpretar de manera complementaria las nociones de objeto y significado personal, que introdujimos en 1994 en nuestro modelo teórico (Godino y Batanero, 1994). Encontramos, por tanto, en esta semiótica apoyo para el enfoque unificado de la cognición matemática que proponemos.

En el libro mencionado, Eco introduce las nociones de *tipo cognitivo* (TC), *contenido nuclear* (CN) y *contenido molar* (CM). Aclara estas nociones mediante un ejemplo sobre el conocimiento de los caballos por parte de los aztecas cuando los vieron por primera vez al ser llevados a América por los españoles.

El tipo cognitivo (TC) es el procedimiento o regla que permite a un sujeto construir las condiciones de reconocibilidad e identificación de un objeto (por ejemplo, el objeto caballo, o el objeto matemático mediana). Concretamente afirma, "En nuestro caso, sea lo que sea el TC, es ese algo que permite el reconocimiento" (p. 154). Esta noción pretende sustituir a la noción de concepto o concepción, entendida tradicionalmente como la idea que alguien tiene sobre algo en su cabeza.

Junto al tipo cognitivo, Eco propone la noción de contenido nuclear (CN) y la describe como el conjunto de interpretantes[3] a que da lugar un

[3] Expresiones que aclaran lo que quiere decir una palabra o expresión.

TC. "Si estos interpretantes estuvieran a disposición de forma integral, no sólo aclararían cuál era el TC de los aztecas, sino que circunscribirían también el significado que asignaban a la expresión maçatl (caballo). Este conjunto de interpretantes lo denominaremos contenido nuclear" (p. 160). "Tales contenidos nucleares se expresan a veces con palabras, a veces con gestos, a veces mediante imágenes o diagramas" (p. 162). Se concibe, por tanto, como un complejo multimedia, incluyendo, en el caso del caballo, no sólo su imagen sino también su olor, y los usos en los que participa.

La relación entre TC y CN la establece Eco del siguiente modo: "Un TC es siempre un hecho privado, pero se vuelve público cuando se interpreta como CN, mientras que un contenido nuclear público puede dar instrucciones para la formación de los tipos cognitivos. Por tanto, en cierto sentido, aunque los tipos cognitivos sean privados, están sometidos continuamente al control público, y la comunidad nos educa paso a paso a adecuar los nuestros a los ajenos" (p. 256).

El hecho que el CN puede ser distinto según los contextos institucionales le lleva a introducir la noción de *contenido molar* (CM). El CM será la serie controlable de lo que se puede decir sobre, o hacer con los caballos (o sobre el objeto mediana) de manera específica y que es compartida socialmente.

Como veremos en el capítulo 3, el constructo "contenido molar" tiene una gran similitud con nuestro "sistemas de prácticas institucionales", que consideramos como "el significado del objeto institucional" correspondiente. Parece que en la semiótica cognitiva de Eco faltaría la noción que podría ser como el equivalente institucional al "tipo cognitivo" (que para nosotros equivaldría al "objeto personal"). En nuestro caso introducimos el objeto institucional como "emergente del sistema de prácticas institucionales", que podría interpretarse, en términos de Eco, como "aquello que permite el reconocimiento público de un objeto", esto es, la definición matemática de un objeto.

2.4. NATURALEZA DE LAS MATEMÁTICAS SEGÚN WITTGENSTEIN

Entre las diversas cuestiones filosóficas tratadas por Wittgenstein sobresalen las referidas a las matemáticas, no sólo en las "*Observaciones sobre los fundamentos de las matemáticas*" (Wittgenstein, 1976), sino también en diversos apartados de las "*Investigaciones filosóficas*" y otros ensayos.

Sin embargo, a pesar de la extraordinaria repercusión que las ideas de Wittgenstein han tenido en la filosofía contemporánea y en otras disciplinas, como la sociología, psicología, etc., encontramos escasas referencias a las mismas en los trabajos publicados sobre los problemas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Una excepción notable la encontramos en Weinberg y Gavelek (1987) donde se presentan los principales rasgos de una teoría socioconstructivista de la instrucción y el desarrollo de la cognición matemática basada en Wittgenstein y Vigotsky. También encontramos una estrecha relación entre la filosofía de Wittgenstein y las ideas recientes de Sfard (2000) sobre los objetos matemáticos, que sintetizamos en la sección 2.4.3, así como en el enfoque sobre el aprendizaje matemático que Kieran, Forman y Sfard (2001) designan como discursivo o comunicacional (sección 2.6.3).

La filosofía de las matemáticas de Wittgenstein se sitúa en el extremo opuesto de las corrientes de tipo platónico-idealista y también de los enfoques psicologístas. Plantea el reto de superar el platonismo dominante, y por tanto dejar de hablar de objetos matemáticos como entidades ideales que se descubren, y dejar de considerar las proposiciones matemáticas como descripción de las propiedades de tales objetos. Nos propone una visión alternativa: Las proposiciones matemáticas deben verse como instrumentos, como reglas de transformación de proposiciones empíricas. Por ejemplo, los teoremas de la geometría son reglas para encuadrar descripciones de formas y tamaños de objetos, de sus relaciones espaciales y para hacer inferencias sobre ellas.

Podemos decir que la revolución Wittgensteiniana -aún no digerida del todo en la epistemología y las ciencias cognitivas (McDonough, 1989)- debería conducir a una profunda revisión de gran parte de las investigaciones realizadas sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. ¿Cómo cambiaría la práctica de la enseñanza de las matemáticas asumiendo una epistemología de tipo antropológico como propone Wittgenstein? ¿Que modelos instruccionales serían coherentes con la misma?

A continuación presentamos una síntesis de la filosofía de las matemáticas de Wittgenstein siguiendo el análisis de Baker y Hacker, (1985).

2.4.1. El lenguaje matemático como herramienta

La concepción realista (Agustiniana) del significado de las palabras se basa en tratar cada palabra significante como un nombre. Esta idea informa la mayor parte de la reflexión sobre la filosofía de las matemáticas y de la psicología. Las expresiones matemáticas tales como '0', '-2'; (raíz de -1); 'alef subcero', o incluso '+', 'x^4', 'e^x', se toman como nombres de entidades, y la cuestión, "¿Qué significan", se reduce a, "¿En lugar de qué están"?

Durante mucho tiempo los matemáticos han sostenido que nada corresponde al uso de los números negativos, que estos símbolos están en lugar de nada. Producir una explicación rigurosa de en lugar de qué está un símbolo, por ejemplo, identificar un número negativo con una clase de equivalencia de pares ordenados de números naturales, se toma como demostración de que un símbolo tiene un significado. (Es sorprendente que tales explicaciones no juegan ningún papel en transmitir a un neófito cómo usar estos símbolos en las aplicaciones de los cálculos matemáticos, esto es, en emplear los números enteros negativos en las operaciones bancarias o en mecánica). Wittgenstein sostiene que la preconcepción de que los términos significantes son nombres oculta profundas diferencias en uso bajo una terminología uniforme engañosa. Además estimula el mito de que las diferencias en uso fluyen misteriosamente de las diferencias en la naturaleza de los objetos supuestamente nombrados.

Wittgenstein argumentó que deberíamos considerar las palabras como herramientas y clarificar sus usos en nuestros juegos de lenguaje. No debemos perder de vista el hecho de que las palabras-numéricas son instrumentos para contar y medir, y que los fundamentos de la aritmética elemental, esto es, el dominio de la serie de números naturales, se basa en el entrenamiento en el recuento.

Los filósofos se desvían pronto de estos puntos familiares tratando de buscar fundamentos más profundos para la aritmética. Frege ejemplificó este error. Comienza sus investigaciones de los números a partir de un examen de enunciados de recuento extra-matemáticos tales como 'Júpiter tiene cuatro lunas'. Pero después descartó su 'insight' mediante su convicción de que los numerales son nombres de objetos platónicos. Sucumbió al poder hipnotizante de la cuestión filosófica "¿Qué son los números?" y buscó una definición rigurosa como respuesta. Wittgenstein pensó que esta cuestión era engañosa ("¿Cuál es el significado de la palabra 'cinco'"? - "Aquí no se cuestiona tal cosa, sólo como se usa la palabra 'cinco'"). "Lo que estamos buscando no es una definición del concepto de número, sino una exposición de la gramática de la palabra 'número' y de los numerales". La asimilación de los términos matemáticos a nombres, especialmente la concepción de que son nombres de objetos ideales o abstractos, es fundamental para las confusiones que se producen al reflexionar sobre las matemáticas.

Las proposiciones matemáticas se deben distinguir también de las descripciones. Las deberíamos ver como instrumentos e indagar sobre sus papeles, sus usos en la práctica. Veremos entonces que su uso característico es como regla de transformación de proposiciones empíricas, o, de manera más general, como reglas de representación para encuadrar (framing) descripciones.

Por ejemplo, los teoremas geométricos funcionan como reglas para encuadrar descripciones de formas y tamaños de objetos y de sus relaciones espaciales y para hacer inferencias sobre ellas. El contraste entre proposiciones descriptivas y proposiciones matemáticas que sirven como reglas de descripción es de la mayor importancia. El fallo en hacer esta distinción es fuente de confusiones al reflexionar sobre las matemáticas, arrastrando tras de sí otras sobre los conceptos de verdad, aserción, conocimiento y verificación.

Además, alimenta mitologías filosóficas tales como el Platonismo, que observa correctamente que las proposiciones matemáticas no son descripciones de signos y salta a la conclusión de que deben ser descripciones de otra cosa, esto es, entidades abstractas. Es igual de sencillo caer en la reacción formalista al Platonismo, creyendo que las proposiciones matemáticas describen algo: si no describen entidades abstractas entonces describen signos, y que elimina la distinción entre aplicar las técnicas matemáticas dentro de ellas mismas y aplicarlas fuera de las matemáticas.

Un enunciado como 'Los números reales no pueden ponerse en correspondencia uno a uno con los números naturales' parece un notable descubrimiento sobre objetos matemáticos, pero es parte de la construcción de un cálculo matemático, no un descubrimiento de hechos matemáticos sino la creación de nuevas normas de descripción (Baker y Hacker, 1985, p. 10)

La hipótesis acrítica de que cada palabra significativa es un nombre y cada sentencia es una descripción ocasiona tantos estragos a nuestro pensamiento sobre la mente como a nuestras reflexiones sobre las matemáticas. Los malentendidos de la imagen agustiniana se ramifican en ideas distorsionadas sobre los símbolos, la explicación y la comprensión de palabras, la comunicación, la representación, el sentido y no-sentido, etc.

2.4.2. Alternativa al platonismo y mentalismo

El análisis del uso del lenguaje matemático que hace Wittgenstein está dirigido de manera central a la superación del platonismo.

Por ejemplo, decimos que '2+2 = 4' es una afirmación sobre números. Ciertamente no es un enunciado sobre signos (marcas sobre papel), ni sobre cómo la gente usa tales signos. De igual modo decimos que el enunciado 'Los leones son carnívoros' es una afirmación sobre los leones. Pero hay que insistir en la radical diferencia entre ambas sentencias. Los enunciados sobre leones nos dicen hechos sobre leones, pero lo que llamamos 'enunciados sobre números' tienen el papel de reglas para el uso de las palabras numéricas o numerales. Se trata de que evitemos pensar en la existencia de un dominio de objetos matemáticos, de manera similar a lo que ocurre con las proposiciones sobre leones que sí se refieren a un dominio de seres vivos.

El fallo en distinguir estos diferentes usos de 'referir' es uno de los muchos estímulos para apoyar el mito de que las proposiciones necesarias se refieren a tipos especiales de entidades, objetos abstractos, Objetos Ideales o Universales que constituyen la esencia de las cosas. Pensamos que si afirmamos una proposición matemática 'sobre' $\aleph_0$ estamos hablando sobre un ciudadano de un fantástico y misterioso dominio del número, 'el paraíso de Cantor'. Pero no estamos hablando de un dominio de nada, sólo dando reglas para el uso de '$\aleph_0$'. Cuando se especifican estas normas de representación podemos usar '$\aleph_0$' para hacer enunciados empíricos falsos o verdaderos (Baker y Hacker, 1985, p. 283).

Somos propensos a pensar de la geometría como la ciencia sobre Objetos Ideales. Decimos que una línea euclídea no tiene amplitud mientras que todas las líneas trazadas con un lápiz la tienen, que un triángulo euclídeo tiene exactamente 180º, mientras que todos los triángulos mundanos se desvían más o menos. Esta es una imagen ofuscada. Una geometría no es una teoría del espacio, sino más bien un sistema de reglas para describir objetos en el espacio.

No hay ninguna cosa como 'un Objeto Ideal', o 'un objeto abstracto' (p. 283). Debemos recordar que se comienza a hablar de Objetos Ideales para significar cosas que no son reales, que no tienen ninguna existencia salvo como ideas de la imaginación. Decir que un cierto símbolo 'a' significa un Objeto Ideal es decir algo sobre el significado, y por tanto el uso de 'a'. En particular, supone decir que este uso es en cierto aspecto similar al de signos que significan un objeto pero que 'a' no significa un objeto en absoluto.[4] A veces se sostiene que Frege, en los Fundamentos de la Aritmética mostró que si uno cree en la objetividad de las matemáticas, entonces no hay ninguna objeción en pensar en términos de objetos matemáticos o concebirlos como si esperasen ser descubiertos. Pero esto es bastante equivocado.

Debido a que pensamos que las proposiciones necesarias expresan verdades de modo análogo a las proposiciones empíricas, porque creemos que se refieren a entidades de diverso tipo, pensamos de modo natural que algún tipo de realidad les corresponde. Y por tanto, no queremos decir meramente que tales proposiciones son verdaderas, sino que, por ejemplo, 'la verdad matemática es parte de la realidad objetiva'

La verdad de una proposición matemática es enteramente independiente de cómo sean las cosas en la realidad. ... Las proposiciones matemáticas son reglas de representación. Se dicen que son verdaderas si son proposiciones primitivas del sistema o si son probadas. Pero ciertamente el sistema es enormemente útil... (Baker y Hacker, 1985, p. 285).

2.4.3. Creación intradiscursiva de los objetos matemáticos

El análisis de las relaciones entre los símbolos y los objetos matemáticos que realiza Sfard (2000) proporciona un punto de vista que podemos calificar de no realista sobre la naturaleza de los objetos matemáticos y que consideramos necesario tener en cuenta para progresar hacia un enfoque unificado de la cognición matemática. La visión sobre las relaciones entre la realidad perceptible (que denomina realidad de hecho), el lenguaje, y la "realidad virtual" de los objetos matemáticos guarda una

[4] En nuestro modelo teórico, los contenidos de las funciones semióticas (capítulo 7) pueden ser objetos conceptuales o proposicionales, los cuales los interpretamos como entidades gramaticales, como propone Wittgenstein, si el juego de lenguaje corresponde a un contexto institucional.

estrecha relación con la filosofía de las matemáticas propuesta por Wittgenstein, razón por la cual incluimos su análisis en esta sección.

Contrasta el discurso de la realidad de hecho (perceptible), (por ejemplo, "Las expresiones 'el fundador del psicoanálisis' y 'Sigmund Freud' significan lo mismo porque se refieren a la misma persona") y el discurso matemático (por ejemplo, "Los símbolos 2/3 y 12/18 significan lo mismo porque se refieren al mismo número") que considera refiriendo a una realidad virtual. Entre ambos discursos existen grandes similitudes, pero considera fundamental tomar conciencia de las diferencias entre los tipos de objetos referidos en cada caso, así como las relaciones entre los dos mundos.

El problema que aborda, expresado en términos semióticos, es: "Los símbolos matemáticos refieren a algo -¿pero a qué?, ... ¿Cuál es el estatuto ontológico de estas entidades?, ¿De donde vienen? ¿Cómo podemos acceder a ellas (o construirlas)?" (p. 43)

Sfard rechaza la concepción que propone los signos y los significados como entidades independientes y adopta la visión de psicólogos como Vygotsky y semióticos como Peirce, de que los signos (el lenguaje en general) tiene un papel constitutivo de los objetos de pensamiento y no meramente representacional. Está de acuerdo básicamente con el postulado Wigensteiniano de que el "significado de una palabra está en su uso en el lenguaje", pero tiene también la convicción de que desde el punto de vista psicológico, el problema del significado no se puede reducir sólo al análisis lingüístico.

La tesis central que defiende Sfard en este trabajo es que "el discurso matemático y sus objetos son mutamente constitutivos: La actividad discursiva, incluyendo la producción continua de símbolos, es la que crea la necesidad de los objetos matemáticos; y son los objetos matemáticos (o mejor el uso de símbolos mediado por los objetos) los que, a su vez, influyen en el discurso y le lleva hacia nuevas direcciones" (p. 47)

2.4.4. Características y limitaciones del convencionalismo de Wittgenstein como modelo de cognición matemática

Las ideas de Wittgenstein sobre las matemáticas nos parecen de gran utilidad y relevancia para la educación matemática, aunque también pensamos que necesitan ser estudiadas críticamente y complementadas para que puedan constituir un marco pertinente para analizar en su complejidad los procesos de estudio de las matemáticas en las instituciones educativas. En la problemática de la enseñanza de las matemáticas-particularmente de las actividades de planificación de la instrucción y la evaluación de los aprendizajes- nos parece necesario revisar algunos presupuestos básicos de la filosofía de Wittgenstein.

La metáfora del objeto matemático nos parece una herramienta útil tanto para estructurar el cuerpo de conocimientos matemáticos (o si se prefiere la gramática matemática), como también para organizar los procesos de estudio de las matemáticas. Pensamos que dentro de la ilimitada variedad de usos de los términos, símbolos y expresiones matemáticas es posible identificar 'patrones de comportamiento' o 'prácticas prototípicas' locales, estructuradas en ciertos niveles de generalidad en torno a campos de problemas, que constituyen una guía para organizar los procesos de enseñanza y aprendizaje.

En el contexto de enseñanza de un saber constituido o en vías de constitución parece natural hablar de objeto matemático para referirnos a los componentes de dicho saber, que están dados como entidades culturales cuya apropiación por los estudiantes es el compromiso básico de la institución correspondiente. La adopción en el seno de las instituciones educativas de una epistemología realista y una semiótica referencial parece útil. Ahora bien, las entidades matemáticas deben ser concebidas en términos socioculturales, no como entidades ideales absolutas. Pensamos que es posible y necesario compatibilizar los enfoques realistas y pragmáticos para lograr un modelo de la cognición matemática adaptado a las necesidades de la educación matemática. La posición de Ullmann (1962) al respecto es un buen apoyo para esta articulación.

En la literatura de educación matemática nos parece difícil seguir la recomendación de Wittgenstein de evitar hablar del 'objeto matemático'. Incluso en el enfoque antropológico propuesto por Chevallard (1992) se introduce como noción clave la 'relación con el objeto' como sustituto de la idea de comprensión, conocimiento, etc. Los trabajos de Douady, con su dialéctica útil-objeto, la idea de 'reificacion' de Sfard y Dubinsky, o nuestra propia expresión 'significado de un objeto matemático', son indicaciones de la, al menos aparente, utilidad del objeto. La metáfora del objeto parece ser un recurso útil del pensamiento y la comunicación, aunque también puede ocultar algunos aspectos, de modo que tenemos que aprender a controlar su uso[5].

Se debe estudiar si el considerar que tales objetos (conceptos, proposiciones, teorías) no son otras entidades que las reglas gramaticales de Wittgenstein (al menos desde el punto de vista institucional) permitiría resolver el dilema y evitar las confusiones de las que nos advierte.

Es cierto que el hacer matemático conlleva una faceta de creación, invención de reglas gramaticales para el uso de símbolos y expresiones, pero también supone descubrimiento de regularidades (patrones) en el mundo empírico y en el propio mundo matemático, que son el motivo de sus inventos. Tales regularidades persuaden de la conveniencia de extender el sistema conceptual en una cierta dirección. Como afirma Cañón (1993), la matemática es creación y descubrimiento; tras el estudio de Wittgenstein, y teniendo en cuenta las reflexiones y aportaciones de las investigaciones didácticas podríamos decir que la matemática es gramática y es heurística.

Como hemos visto, Wittgenstein enfatiza la dimensión constructiva de las matemáticas, su aspecto convencional y creativo como única vía para explicar el carácter necesario de las proposiciones matemáticas. Ahora bien, ¿cómo explicar la eficacia de las matemáticas para resolver problemas empíricos?. Nos parece que el reconocer la existencia de ciertas regularidades en el mundo que nos rodea, las cuales son la motivación de la adopción de las convenciones matemáticas, abre la vía al reconocimiento de la dimensión heurística de las matemáticas. Pensamos que la motivación de las estructuras matemáticas proviene de las regularidades perceptibles sobre el mundo que nos rodea. Por ejemplo, la curva normal de probabilidades es una de las estructuras matemáticas que organiza las regularidades observables en los errores de medición.

La filosofía de Wittgenstein nos parece insuficiente para basar en ella el análisis de los procesos de estudio de las matemáticas. Concebir la matemática como la gramática del uso de símbolos y expresiones resuelve el problema de explicar el carácter necesario de las proposiciones, pero no para explicar la eficacia de su aplicación, ni la motivación de su adopción. ¿Cómo se generan las reglas? No basta con saber seguir las reglas, hay que

[5] El papel de las metáforas en la formación de los conceptos matemáticos es un tema relevante en la investigación en educación matemática, como se muestra en los trabajos de Van Dormolen (1991), English, (1997), Lakoff y Núñez (2000).

conocer su motivación, su aplicación, y sobre todo saber derivar nuevas reglas útiles para organizar nuestros mundos.

2.5. REPRESENTACIONES INTERNAS Y EXTERNAS

En este apartado hacemos una síntesis de las principales nociones teóricas usadas como herramientas para describir la cognición en las investigaciones que se realizan en educación matemática. Predominan los constructos que designan los conocimientos del sujeto (representaciones mentales o internas) y sus relaciones con los objetos ostensivos (notaciones, símbolos, gráficos, materiales manipulativos, etc.), que se consideran como representaciones externas de los conocimientos individuales.

2.5.1. Sistemas de representación en educación matemática

Goldin (1998) presenta la noción de sistemas de representación y sus diversos tipos como el constructo clave de un modelo psicológico unificado del aprendizaje y la resolución de problemas matemáticos. Sugiere que los avances en los campos de la psicología, lingüística formal, semántica y semiótica, junto con el estudio de las estructuras matemáticas y la necesidad práctica de comprender las interacciones de los estudiantes con los entornos basados en el uso de ordenadores han motivado un intenso trabajo sobre las representaciones y los sistemas de símbolos en la psicología de la educación matemática. Esto se refleja en los trabajos publicados en los dos números monográficos dedicados al tema en la revista *Journal of Mathematical Behavior* (1998).

En este apartado vamos a identificar las características que se atribuye a la noción de representación en el campo de la psicología de la educación matemática. Esto facilitará su contraste con otras herramientas cognitivas desarrolladas desde diferentes marcos teóricos, así como identificar algunas limitaciones para que pueda servir de noción clave en el análisis de la cognición matemática, en su dimensión institucional y personal.

Interpretaciones del término 'representación'

El término 'representación' y la expresión 'sistema de representación', en conexión con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas tiene las siguientes interpretaciones (Goldin y Janvier, 1998, p. 1):

1. Una situación física, externa y estructurada, o un conjunto de situaciones de un entorno físico, que se puede describir matemáticamente o se puede ver como concretización de ideas matemáticas;
2. Una materialización lingüística, o un sistema lingüístico mediante el que se plantea un problema o se discute un contenido matemático, con énfasis en las características sintácticas y en la estructura semántica.
3. Un constructo matemático formal, o un sistema de constructos, que puede representar situaciones mediante símbolos o mediante un sistema de símbolos, usualmente cumpliendo ciertos axiomas o conforme a definiciones precisas -incluyendo constructos matemáticos que pueden representar aspectos de otros constructos matemáticos.
4. Una configuración cognitiva interna, individual, o un sistema complejo de tales configuraciones, inferida a partir de la conducta o la introspección, que describe algunos aspectos de los procesos del pensamiento matemático y la resolución de problemas.

Carácter sistémico

Las representaciones matemáticas no se pueden entender de manera aislada. Una ecuación o una fórmula específica, una disposición concreta de bloques multibase, una gráfica particular en un sistema cartesiano adquieren sentido sólo como parte de un *sistema* más amplio con significados y convenciones que se han establecido. "Los sistemas representacionales importantes para las matemáticas y su aprendizaje tienen *estructura*, de manera que las diferentes representaciones dentro de un sistema están relacionadas de manera rica unas a otras" (Goldin y Stheingold, 2001,p. 2)

Dentro de cada sistema representacional se incluyen las convenciones que lo configuran así como las relaciones con otros objetos y sistemas matemáticos. El numeral 12, por ejemplo, debe interpretarse incorporando las reglas del sistema de numeración posicional decimal y todas las relaciones que guarda con otros sistemas de numeración y con todo el sistema de números reales.

Representaciones externas

Los sistemas de representaciones externas comprenden los sistemas simbólicos convencionales de las matemáticas tales como la numeración en base diez, notación formal algebraica, la recta numérica real, la representación en coordenadas cartesianas. También se incluyen entornos de aprendizaje, como los que utilizan materiales manipulativos concretos, o micromundos basados en el uso de ordenadores.

Se considera que una representación es un signo o una configuración de signos, caracteres u objetos que pueden ponerse en lugar de algo distinto de él mismo (simbolizar, codificar, dar una imagen o representar).

El objeto representado puede variar según el contexto o el uso de la representación: En el caso de un gráfico cartesiano puede representar una función o el conjunto solución de una ecuación algebraica.

Algunos sistemas de representación externos son principalmente notacionales y formales, como los sistemas de numeración, escritura de expresiones algebraicas, convenios de expresión de funciones, derivadas, integrales, lenguajes de programación, etc. Otros sistemas externos muestran relaciones de manera visual o gráfica, como las rectas numéricas, gráficos basados en sistemas cartesianos o polares, diagramas geométricos; las palabras y expresiones del lenguaje ordinario son también representaciones externas. Pueden denotar y describir objetos materiales, propiedades físicas, acciones y relaciones, u objetos que son mucho más abstractos (Goldin, 1998, p. 4).

Carácter convencional y ambigüedad

Los sistemas de representación son constructos convencionales, en el mismo sentido que lo puede ser un sistema de axiomas matemáticos. La decisión de donde empieza y termina un sistema, o si una estructura adicional es intrínseca a un sistema dado o procede de una relación simbólica entre dos sistemas, es arbitraria y está motivada por la conveniencia y simplicidad de la descripción. Por tanto, en un sistema representacional puede haber una cierta ambigüedad, que afecta al conjunto de reglas sintácticas y semánticas del sistema, en cuanto puede haber excepciones a tales reglas. En la práctica, la ambigüedad se resuelve teniendo en cuenta el contexto en el que el signo, la configuración, o la relación simbólica ambigua aparece.

Carácter bidireccional de la representación

La relación de representación (simbolización, codificación) entre dos sistemas es reversible. Dependiendo del contexto un gráfico puede proporcionar una representación geométrica de una ecuación de dos variables, y alternativamente una ecuación ($x^2 + y^2 =1$) puede proporcionar una simbolización algebraica de un gráfico cartesiano.

Representaciones internas

Se consideran representaciones internas los constructos de simbolización personal de los estudiantes, las asignaciones de significado a las notaciones matemáticas. Goldin incluye también como representaciones internas el lenguaje natural del estudiante, su imaginación visual y representación espacial, sus estrategias y heurísticas de resolución de problemas, y también sus afectos en relación a las matemáticas. Las configuraciones cognitivas internas pueden tener, o no tener, semejanza estructural con los sistemas externos, al menos en el modelo unificado que propone Goldin (1998, p. 147); la relación simbólica se puede establecer con sistemas externos o entre sistemas internos.

Las representaciones cognitivas internas (o mentales) se introducen como una herramienta teórica para caracterizar las cogniciones complejas que pueden construir los estudiantes sobre las representaciones externas. No se pueden observar directamente, sino que son inferidas a partir de conductas observables.

Como tipos de representaciones cognitivas Goldin (1998) describe los siguientes:

- Verbales o sintácticas: capacidades relativas al uso del lenguaje natural por los individuos, vocabulario matemático y no matemático, incluyendo el uso de la gramática y la sintaxis.
- Sistemas figurales (imagistic) y gestuales, incluyendo configuraciones cognitivas espaciales y visuales, o "imágenes mentales"; esquemas gestuales y corporales.
- Manipulación mental de notaciones formales (numerales, operaciones aritméticas, visualización de pasos simbólicos para resolver una ecuación)

- Procesos estratégicos y heurísticos: "ensayo y error", "descomposición en fases", etc.
- Sistemas de representación afectivos, emociones, actitudes, creencias y valores sobre las matemáticas, o sobre sí mismos en relación a las matemáticas.

Interacción entre representaciones externas e internas

Se considera que la interacción entre las representaciones externas e internas es fundamental para la enseñanza y el aprendizaje. El interés primario del proceso de instrucción se centra sobre la naturaleza de las representaciones internas en proceso de desarrollo por los estudiantes. Las conexiones entre representaciones se pueden basar en el uso de analogías, imágenes y metáforas, así como semejanzas estructurales y diferencias entre sistemas de representación.

Las representaciones internas son siempre inferidas a partir de sus interacciones con, o su discurso sobre, o la producción de representaciones externas. Se considera útil pensar que lo externo representa lo interno y viceversa. Un concepto matemático se ha aprendido y se puede aplicar en la medida en que se han desarrollado una variedad de representaciones internas apropiadas, junto con las relaciones funcionales entre ellas.

Objetivo instruccional

Se considera que entre los fines fundamentales de la educación matemática están los objetivos representacionales: el desarrollo de sistemas internos eficientes de representación en los estudiantes que correspondan de manera coherente, e interactúen bien, con los sistemas externos convencionalmente establecidos de las matemáticas.

Remitimos al lector al capítulo 10 para encontrar nuestra valoración de las nociones de representación interna y externa desde el enfoque semiótico de la cognición que presentamos en esta Monografía.

2.5.2. Registros de representación, comprensión y aprendizaje

Una característica importante de la actividad matemática es el uso de diversos sistemas de expresión y representación, además del lenguaje natural: variados sistemas de escritura para los números, escrituras algebraicas para expresar relaciones y operaciones, figuras geométricas, gráficos cartesianos, redes, diagramas, esquemas, etc. Un autor que se ha interesado particularmente por este uso variado de los sistemas de representación semiótica es Duval (1995), quién se pregunta: "¿Es esencial esta utilización de varios sistemas semióticos de representación y expresión, o al contrario no es más que un medio cómodo pero secundario para el ejercicio y para el desarrollo de las actividades cognitivas fundamentales?" (p. 3) Considera que esta pregunta sobrepasa el dominio de las matemáticas y de su aprendizaje y apunta hacia la naturaleza misma del funcionamiento cognitivo del pensamiento humano.

Duval da una respuesta afirmativa a esta cuestión aportando los siguientes argumentos:

1) No puede haber comprensión en matemáticas si no se distingue un objeto de su representación. No se deben confundir nunca los objetos matemáticos (números, funciones, rectas, etc.) con sus representaciones (escrituras decimales o fraccionarias, los símbolos, los gráficos, los trazados de figuras, etc.), pues un mismo objeto matemático puede darse a través de representaciones muy diferentes.

2) Existen representaciones mentales, conjunto de imágenes, conceptos, nociones, ideas, creencias, concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto, sobre una situación y sobre aquello que les está asociado. "Permiten una mirada del objeto en ausencia total de significante perceptible". (p. 20). Las representaciones mentales están ligadas a la interiorización de representaciones externas, de la misma manera que las imágenes mentales lo están a una interiorización de los perceptos.

3) Las representaciones semióticas son un medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales, es decir, para hacerlas visibles o accesibles a los demás. Además de sus funciones de comunicación, las representaciones semióticas son necesarias para el desarrollo de la propia actividad matemática. La posibilidad de efectuar tratamientos (operaciones, cálculos) sobre los objetos matemáticos depende directamente del sistema de representación semiótico utilizado. El progreso de los conocimientos matemáticos se acompaña siempre de la creación y del desarrollo de sistemas semióticos nuevos y específicos que más o menos coexisten con el de la lengua natural.

4) Diferentes representaciones no pueden oponerse como dominios totalmente diferentes e independientes. La pluralidad de sistemas

semióticos permite una diversificación tal de las representaciones de un mismo objeto, que aumenta las capacidades cognitivas de los sujetos y por tanto de sus representaciones mentales. Esta interdependencia entre las representaciones internas y externas la expresa Duval afirmando que "no hay noesis[6] sin semiosis; es la semiosis la que determina las condiciones de posibilidad y de ejercicio de la noesis" (p. 5). La aprehensión conceptual no es posible sin el recurso a una pluralidad al menos potencial de sistemas semióticos, y por tanto su coordinación por parte del sujeto.

5) La coordinación entre las representaciones que provienen de sistemas semióticos diferentes no es espontánea; la conversión de unos sistemas a otros requiere un aprendizaje específico. El problema esencial de la semiosis es el de la diversidad de sistemas de representación y los fenómenos de no-congruencia que resultan por la conversión de las representaciones. La coordinación entre registros no es una consecuencia de la aprehensión conceptual (noesis) sino que, al contrario, el logro de dicha coordinación es una condición esencial de la noesis.

6) Las actividades cognitivas inherentes a la semiosis son tres: *formación* de representaciones en un registro semiótico particular, para "expresar" una representación mental, o para "evocar" un objeto real; el *tratamiento* o transformación de una representación dentro del mismo registro; *conversión*, cuando la transformación de la representación de un objeto, de una situación o de una información produce una representación en un registro distinto al de la representación inicial.

Remitimos al lector al capítulo 10 para encontrar nuestra valoración del modelo cognitivo propuesto por Duval desde el enfoque ontológico y semiótico de la cognición que presentamos en esta Monografía.

2.5.3. Esquemas cognitivos

Invariantes operatorios y esquemas

Dentro de las teorías que postulan la pertinencia de considerar representaciones internas como constituyentes del conocimiento de los sujetos destacamos la elaborada por Vergnaud (1990, 1998). Con la noción

[6] Noesis, aprehención conceptual de un objeto; semiosis, la aprehensión o la producción de una representación semiótica.

de esquema, adaptada de la propuesta por Piaget, se propone una visión alternativa a los "sistemas de representación". Además de incorporar los elementos lingüísticos atribuye un papel esencial a la acción del sujeto en la constitución de los esquemas cognitivos, relativizándolos a una clase de situaciones. "Un esquema es la organización invariante de la conducta para una cierta clase de situaciones" (Vergnaud, 1990, p. 136).

Afirma que "es en los esquemas donde se deben investigar los conocimientos en acto del sujeto, que son los elementos cognitivos que permiten a la acción del sujeto ser operatoria". Cada esquema es relativo a una clase de situaciones cuyas características son bien definidas. Además, un esquema reposa siempre sobre una conceptualización implícita, siendo los conceptos-en-acto y los teoremas-en-acto constituyentes de los esquemas operatorios.

Un esquema es una totalidad organizada, que permite generar una clase de conductas diferentes en función de las características particulares de cada una de las situaciones de la clase a la cual se dirige. Comporta los siguientes componentes:

- Invariantes operatorios (conceptos-en-acto y teoremas-en-acto) que pilotan el reconocimiento por el sujeto de los elementos pertinentes de la situación, y la recogida de información sobre la situación a tratar;
- Anticipaciones del fin a lograr, de los efectos a esperar y de las etapas intermedias eventuales;
- Reglas de acción del tipo si ... entonces ... que permiten generar la serie de acciones del sujeto;
- Inferencias (o razonamientos) que permiten "calcular" las reglas y las anticipaciones a partir de las informaciones y del sistema de invariantes operatorios de los que dispone el sujeto.

Para Vergnaud "el concepto de esquema es el concepto más importante de la psicología cognitiva si aceptamos que la psicología se debe interesar por teorizar sobre la acción y la actividad". (Vergnaud, 1998, p. 172)

Como ejemplos de esquemas perceptivos-gestuales en matemáticas están:

- contar un conjunto de objetos;
- dibujar la imagen simétrica de una figura plana poligonal sobre papel cuadriculado;

- dibujar la imagen simétrica de una figura plana sólo con regla y compás;
- dibujar un gráfico o un diagrama.

En la aplicación de estos esquemas se ponen en juego conceptos y teoremas matemáticos. Contar un conjunto de objetos implica al menos el concepto de correspondencia uno a uno y el concepto de número cardinal. Usar un juego de escuadras y compás implica al menos el concepto de ángulo recto y el teorema de que la simetría conserva los ángulos.

Vergnaud propone una noción de concepto a la que atribuye una naturaleza cognitiva, al incorporar en la misma los invariantes operatorios "sobre los que reposa la operacionalidad de los esquemas". Esta noción es distinta de lo que son los conceptos y teoremas en la ciencia, para los que no propone ninguna conceptualización.

La abstracción reflexiva y los esquemas cognitivos en las investigaciones sobre pensamiento matemático avanzado (Dubinsky y cols.)

En Estados Unidos ha surgido un grupo de investigadores que, interesados principalmente por la enseñanza y aprendizaje del análisis matemático, han comenzado a aplicar y desarrollar las ideas de Piaget sobre la génesis de conceptos lógico.-matemáticos. Partiendo del concepto de abstracción reflexiva "se trata de elaborar un marco teórico que se pueda usar, en principio para describir cualquier concepto matemático junto con su adquisición " (Dubinsky, 1991, p. 97). Entre las nociones claves que introducen están, las de "*acción, objetos, procesos y esquemas*" (APOS) y *descomposición genética* de un concepto matemático.

La abstracción reflexiva se concibe como la construcción de objetos mentales y de acciones mentales sobre tales objetos. En el desarrollo del pensamiento lógico-matemático se distinguen cinco tipos de construcciones: interiorización, coordinación, encapsulación, generalización y reversión.

La noción de esquema se adopta e interpreta como una colección más o menos coherente de objetos y procesos. "La tendencia de un sujeto a invocar un esquema con el fin de comprender, tratar con, organizar o dar sentido a una situación problema dada es su conocimiento de un concepto matemático particular" (p. 103). Existen esquemas para situaciones que implican números, aritmética, funciones, proposiciones, cuantificadores, demostración por inducción, etc. Estos esquemas deben estar interrelacionados en una organización compleja más amplia. Uno de los fines pretendidos con la teoría general desarrollada es aislar pequeñas porciones de esta estructura compleja y dar descripciones explícitas de las posibles relaciones entre esquemas. Esta descripción de relaciones entre esquemas relativos a un concepto es la descomposición genética de dicho concepto. Se interpreta como una descripción de las construcciones mentales específicas que un estudiante pone en juego al desarrollar su comprensión del concepto matemático.

Remitimos al lector al capítulo 10 para encontrar nuestra valoración de la teoría APOS desde el enfoque ontológico y semiótico de la cognición que presentamos en esta Monografía.

2.5.4.Conceptos y concepciones en educación matemática

Los términos 'concepto' y 'concepción' se utilizan con frecuencia en la investigación en didáctica de la matemática para describir las cogniciones de los sujetos, incluso también, para designar cogniciones de tipo institucional.

Sfard (1991) usa la palabra 'concepto' (a veces sustituida por "noción") para referirse a "una idea matemática en su forma 'oficial' - como un constructo teórico dentro "del universo formal del conocimiento ideal". Por el contrario, el término "concepción" designa "al aglomerado completo de representaciones internas y asociaciones evocadas por el concepto - la contrapartida del concepto en el universo interno o subjetivo del conocimiento humano" (p. 3).

Tanto para los conceptos como para las concepciones Sfard propone distinguir dos tipos de facetas o descripciones: operacional y estructural, a las cuales atribuye una complementariedad mutua. El concepto puede verse como un objeto abstracto, con una cierta estructura descrita mediante definiciones estructurales; esto lleva a considerarlo como una cosa real - una estructura estática que existe en algún lugar del espacio y del tiempo. Esto supone reconocer la idea a primera vista y a manipularla como un todo, sin especificar los detalles. En contraste, interpretar una noción como un proceso implica considerarlo como una entidad más bien potencial, que adquiere existencia en cada circunstancia mediante una secuencia de acciones. Por ejemplo, la noción de función dada como un conjunto de pares ordenados responde a una descripción estructural, mientras que al proporcionar un proceso de cálculo de los valores imágenes a partir de los originales se tiene una descripción operacional.

Este carácter dual de los conceptos matemáticos se traslada también a las concepciones del sujeto sobre dichos objetos, identificándose una concepción operacional y otra estructural, ambas relacionadas de manera dialéctica y complementaria. "Un cierto grado de dominio en la realización de estos procesos, debería a veces ser visto como una base para la comprensión de los tales conceptos mas bien que su resultado" (p. 10).

En este modelo cognitivo encontramos un cierto paralelismo y apoyo para el enfoque ontológico-semiótico que proponemos: la distinción entre las facetas institucionales (ideas u conceptos matemáticos) y personal (concepciones), en ambos casos distinguiendo dos polos duales y complementarios (operacional y estructural). En nuestro caso, esta dualidad operacional y estructural de los objetos matemáticos es notablemente enriquecida al considerar cinco facetas duales para dichos objetos (Capítulo 6).

La noción de concepción es el constructo usado con más frecuencia para el análisis cognitivo en didáctica de las matemáticas, como puede inferirse del estudio que hace Artigue (1990). No se distingue claramente en la bibliografía de otras nociones como representación (interna), modelo implícito, etc. Como describe Artigue (1990, p. 265), "trata de poner en evidencia la pluralidad de puntos de vista posibles sobre un objeto matemático, diferenciar las representaciones y modos de tratamiento que se le asocian, poner en evidencia su adaptación más o menos buena a la resolución de distintas clases de problemas".

En la descripción que hace Artigue se aprecian dos sentidos complementarios para el término concepción: el punto de vista epistémico (naturaleza compleja de los objetos matemáticos y de su funcionamiento, que viene a corresponder al concepto según lo describe Sfard) y el punto de vista cognitivo (los conocimientos del sujeto en relación a un objeto matemático particular). Así Artigue (1990) habla de, "un conjunto de concepciones es definido a priori con referencia a once definiciones distintas de círculo" (p. 268); y también se habla de "las concepciones del sujeto sobre el concepto de ... (círculo, tangente, límite, etc.)".

Sobre las concepciones del sujeto se discuten dos tipos de usos según los distintos autores:

a) La concepción como estado cognitivo global que tiene en cuenta la totalidad de la estructura cognitiva del sujeto en un momento dado con relación a un objeto. En este caso sería el análogo subjetivo del concepto, entendido como la tripleta de Vergnaud (situaciones, invariantes y significantes).

b) La concepción como un objeto local, estrechamente asociado al saber puesto en juego y a los diferentes problemas en cuya resolución intervienen.

Imagen y definición conceptual

Dentro de la línea de investigación en educación matemática conocida como "pensamiento matemático avanzado", Tall y Vinner (1981) introdujeron los constructos "imagen conceptual" (concept image) y "definición conceptual" (concept definition), para describir el estado de los conocimientos del sujeto individual en relación a un concepto matemático.

Se trata de entidades mentales que se introducen para distinguir los conceptos matemáticos formalmente definidos y los procesos cognitivos por medio de los cuales se conciben. Se considera que durante los procesos mentales de recuerdo y manipulación de un concepto se ponen en juego muchos procesos asociados, de manera consciente o inconsciente, que afectan a su significado y uso. Con la expresión "imagen conceptual se describe la estructura cognitiva total asociada a un concepto, que incluye las imágenes mentales y las propiedades y procesos asociados" (p. 152). Se construye a lo largo de los años por medio de las experiencias de todo tipo y cambia a medida que el individuo encuentra nuevos estímulos y a medida que madura.

Se reconoce que la imagen conceptual de un sujeto sobre un concepto no tiene por qué ser coherente todo el tiempo a medida que se desarrolla ni estar de acuerdo plenamente con el concepto formal matemático. En una situación particular en la que se pone en juego un concepto matemático el sujeto activa solo una porción de su imagen conceptual: es la imagen conceptual evocada. En momentos diferentes, o incluso simultáneamente, distintas imágenes conceptuales parciales pueden no ser coherentes y entrar en conflicto.

Tall y Vinner se esfuerzan por describir la "imagen conceptual" como una entidad mental, pero no elaboran una descripción aceptable del concepto matemático (formal) entendido como objeto institucional o cultural. De los conceptos se tienen en cuenta casi exclusivamente su definición: "una configuración de palabras usadas para especificar el concepto" (p. 152). Se considera que mediante la definición el concepto queda "encapsulado" como una entidad unitaria.

Esta definición puede ser aprendida por un individuo de manera memorística o de un modo más significativo y relacionada en mayor o menor grado con el concepto como un todo. En un momento dado el sujeto puede expresar con sus propias palabras la definición de un concepto, lo que es interpretado como la encapsulación lingüística de su imagen conceptual. Esta *definición personal del concepto* puede diferir de la definición conceptual formal, esto es, la definición del concepto aceptada por la comunidad matemática en su conjunto.

Estas herramientas teóricas son usadas por Tall y Vinner para analizar las imágenes conceptuales y las definiciones conceptuales de estudiantes de último curso de secundaria sobre los conceptos de límite de sucesiones, límite de una función en un punto y la continuidad de funciones.

El estudio se centra en la identificación de factores conflictivos potenciales entre distintos componentes de las imágenes y definiciones conceptuales, contrastadas con las definiciones formales de los conceptos matemáticos.

Los conceptos y campos conceptuales en G. Vergnaud

La noción de concepto

Vergnaud (1982), presenta una noción de concepto matemático que puede ser interpretada en términos semánticos. Este autor define un concepto como una tripleta (S, I, z) en la cual cada símbolo representa lo siguiente:

> S: conjunto de situaciones que hacen significativo el concepto;
>
> I: conjunto de invariantes que constituyen el concepto;
>
> z: conjunto de representaciones simbólicas usadas para presentar el concepto, sus propiedades y las situaciones a las que se refiere (pág. 36).

En el trabajo de 1990, Vergnaud describe a S como la referencia (del concepto); I el significado ("el conjunto de invariantes sobre los cuales reposa la operacionalidad de los esquemas"); z, el significante (conjunto de formas lingüísticas y no lingüísticas que permiten representar simbólicamente el concepto, sus propiedades, las situaciones y los procedimientos de tratamiento.

La noción de campo conceptual

La primera descripción que hace Vergnaud (1990) de un campo conceptual es la de "conjunto de situaciones". Pero a continuación aclara que junto a las situaciones se deben considerar también los conceptos y teoremas que se ponen en juego en la solución de tales situaciones. "En efecto, si la primera entrada de un campo conceptual es la de las situaciones, se puede también identificar una segunda entrada, la de los conceptos y los teoremas." (p. 147). El campo conceptual de las estructuras aditiva es a la vez el conjunto de las situaciones cuyo tratamiento implica una o varias adiciones o sustracciones, y el conjunto de conceptos y teoremas que permiten analizar estas situaciones como tareas matemáticas.

En esta descripción del campo conceptual no se mencionan elementos de tipo subjetivo por lo que considero que al campo conceptual se le atribuye una naturaleza de tipo epistémica. Los conceptos y teoremas que intervienen aquí se califican de “matemáticos”, nociones que no son teorizadas; la noción de concepto matemático, no parece ser la misma que la noción cognitiva de concepto que acaba de definir como una tripleta heterogénea de conjuntos formados por situaciones, invariantes y significantes.

En el capítulo 10 estudiamos las concordancias y complementariedades entre las nociones cognitivas propuestas en la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud y nuestro enfoque semiótico.

2.6. EPISTEMOLOGÍAS DE LA MATEMÁTICA

2.6.1. Los constructivismos radical y social

Siguiendo la influencia de Piaget, el constructivismo emerge como el principal paradigma de investigación en psicología de la educación matemática.

En este apartado hacemos una síntesis de los aspectos ontológicos y epistemológicos que subyacen en las dos versiones de constructivismo más relevantes, el radical y el social, siguiendo, entre otros, los trabajos de Ernest (1994; 1998).

La metáfora de la construcción

Lo que las diversas formas de constructivismo comparten es la metáfora de la construcción. Describe la comprensión del sujeto como la construcción de estructuras mentales, y el término "reestructuración", con frecuencia usado como sinónimo de "acomodación" o "cambio conceptual", contiene esta metáfora. Lo que la metáfora de la construcción no sugiere es que la comprensión se realice a partir de piezas de conocimiento recibidas. Reconoce que el conocer es activo, que es individual y personal, y que se basa sobre el conocimiento previamente construido.

El proceso es recursivo (Kieren y Pirie, 1991), y por ello los "bloques constructivos" de la compresión son ellos mismos producto de actos previos de construcción. De este modo, la distinción entre la estructura y el contenido de la comprensión sólo pueden ser relativos en el constructivismo. Las estructuras previamente construidas se convierten en el contenido en las siguientes construcciones. La metáfora de la construcción está contenida en el primer principio del constructivismo según lo expresa von Glasersfeld (1989: 182):

> "el conocimiento no es recibido pasivamente por el sujeto cognitivo sino activamente construido".

Constructivismo radical

Aunque se origina con Piaget, y fue anticipado por Vico, el constructivismo radical ha sido trabajado en su forma más moderna y completa en términos epistemológicos por von Glasersfel, en una serie de publicaciones a lo largo de los últimos 15 años.

El constructivismo radical se define mediante el primero y el segundo de los principios de von Glasersfeld. El segundo afecta profundamente a la metáfora del mundo, así como a la de la mente: "la función de la cognición es adaptativa y sirve a la organización del mundo experiencial, no al descubrimiento de una realidad ontológica." (von Glasersfeld, 1989: 182).

Por consiguiente, "De explorador condenado a buscar 'propiedades estructurales' de una realidad inaccesible, el organismo inmerso en la experiencia se convierte ahora en un constructor de estructuras cognitivas que pretenden resolver tales problemas según los percibe o concibe el organismo.” (von Glasersfel, 1983: 50).

La metáfora subyacente de la mente o sujeto cognitivo es la que corresponde a un organismo sujeto a evolución, modelada según la teoría de Darwin, con su concepto central de ‘supervivencia del adaptado’. Esto viene indicado por la noción de Piaget de adaptación al entorno, y su discusión explícita de la evolución cognitiva, como se presenta en Piaget (1979).

Según la metáfora evolutiva, el sujeto cognitivo es una criatura con entradas sensoriales, que aportan datos que son interpretados (o mejor construidos) mediante las lentes de sus estructuras cognitivas; también comprende una colección de aquellas estructuras siempre que esté adaptado; y un medio de actuar sobre el mundo exterior.

El sujeto cognitivo genera esquemas cognitivos para guiar las acciones y representar sus experiencias. Estas son contrastadas según cómo se ‘ajusten’ al mundo de su experiencia. Aquellos esquemas que se ‘ajustan’ son tentativamente adoptados y retenidos como guías para la acción. La cognición depende de un bucle de retroalimentación subyacente.

Así pues, por una parte, hay una analogía entre la evolución y supervivencia del mejor adaptado de los esquemas en la mente del sujeto cognitivo y la evolución biológica de las especies en su conjunto. Los esquemas evolucionan, y mediante la adaptación llegan a acoplar mejor el mundo experiencial del sujeto. Los esquemas también se dividen y ramifican, y quizás algunas líneas se extinguen. Por otra parte, el propio organismo como un todo, se adapta al mundo de sus experiencias, en cierta medida por medio de la adaptación de sus esquemas.

En conjunto, el constructivismo radical es neutral en su ontología, no haciendo ninguna suposición sobre la existencia del mundo tras el dominio subjetivo de experiencia. La epistemología es decididamente falibilista, escéptica y anti-objetivista. El hecho de que no haya un último conocimiento verdadero posible sobre el estado de las cosas en el mundo, o sobre dominios como las matemáticas, es consecuencia del segundo principio, que es propio de la relatividad epistemológica. Como su nombre implica, la teoría del aprendizaje es radicalmente constructivista, todo conocimiento se construye por el individuo sobre la base de sus procesos cognitivos en diálogo con su mundo experiencial.

Constructivismo social

El constructivismo social considera al sujeto individual y el dominio de lo social como indisolublemente interconectados. Las personas están formadas mediante sus interacciones con los demás (así como por sus procesos individuales). Por tanto no hay ninguna metáfora subyacente para la mente individual completamente aislada. Ciertamente, la metáfora subyacente corresponde a la de *las personas en conversación*, abarcando a las personas en interacción lingüística y extra-lingüística significativas. La mente se ve como parte de un contexto más amplio, la 'construcción social del significado'.

De igual modo, el modelo constructivista social del mundo se corresponde con un mundo socialmente construido que crea (y es constreñido por) la experiencia compartida de la realidad física subyacente. La realidad construida humanamente está siendo todo el tiempo modificada e interactúan para adaptarse a la realidad ontológica, aunque nunca puede dar una 'verdadera imagen' de ella.

Adoptando las personas en conversación como metáfora subyacente, en el constructivismo social, se concede un lugar destacado a los seres humanos y a su lenguaje para la presentación del conocimiento. Siguiendo los trabajos germinales de Wittgenstein, Vygotsky, el Interaccionismo Simbólico y la Teoría de la Actividad, se considera el lenguaje como el conformador, y producto resultante, de las mentes individuales. Se concede una atención creciente al impacto del lenguaje en gran parte de la investigación en la psicología de la educación matemática, como al papel cognitivo de características lingüísticas tales como la metonimia y la metáfora. Se reconoce cada vez más que una gran parte de la instrucción y el aprendizaje tiene lugar directamente por medio del lenguaje. Incluso el aprendizaje manipulativo y enactivo, enfatizado por Piaget y Bruner, tiene lugar en un contexto social de significado y es mediatizado de algún modo por el lenguaje y las interpretaciones asociadas socialmente negociadas (como Donaldson y otros han mostrado).

En resumen, el paradigma de investigación del constructivismo social adopta una ontología relativista modificada (hay un mundo exterior soportando las apariencias a las que tenemos un acceso compartido, pero no tenemos un conocimiento seguro de él). Se basa en una epistemología falibilista que considera el 'conocimiento convencional' como aquel que es 'vivido' y aceptado socialmente. La teoría del aprendizaje asociada es constructiva (en el sentido compartido por sociólogos tales como Schutz, Berger y Luckman, así como los constructivistas), con un énfasis en la naturaleza esencial y constitutiva del lenguaje y la interacción social.

El constructivismo Piagetiano parece enfatizar los procesos cognitivos internos a expensas de la interacción social en la construcción del conocimiento por el aprendiz. Sin embargo el constructivismo tiene necesidad de acomodar la complementariedad entre la construcción individual y la interacción social.

2.6.2. El Interaccionismo simbólico

Una parte sustancial de la investigación en educación matemática se ocupa de estudiar las relaciones entre el profesor, los estudiantes y la tarea matemática en las clases de matemáticas, tratando de encontrar respuestas fundadas a cuestiones del tipo, ¿cómo el profesor y los estudiantes llegan a compartir significados matemáticos para que el flujo de la clase continúe de forma viable?, ¿cómo comprende un estudiante las intervenciones del profesor?

Para intentar responder a estas cuestiones es necesario desarrollar perspectivas teóricas que sean útiles para interpretar y analizar la complejidad de las clases de matemáticas. En este sentido, Bauersfeld (1994) indica que es posible utilizar constructos teóricos procedentes de la sociología y la lingüística (etnometodología, interaccionismo social, y análisis del discurso), pero que, ya que estas disciplinas no están directamente interesadas en las cuestiones relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de contenidos curriculares, es necesario realizar una cierta traducción para responder a las cuestiones específicas de la educación matemática. Esta aproximación se apoya en el supuesto de que se generan diferentes prácticas en el aula si se toma las matemáticas como un conjunto de verdades objetivas, como algo existente y documentado objetivamente, o si se ve la práctica en el aula como un proceso de matematización compartida, guiada por reglas y convenios que emergen de la misma práctica.

Esta segunda perspectiva subraya la importancia de la “constitución interactiva” del significado en las aulas y convierte en objeto de investigación las relaciones entre las características sociales de los procesos de interacción, así como las existentes entre el pensamiento del profesor y el de los estudiantes (Bauersfeld, Krummheuer & Voigt, 1988). Una perspectiva teórica que tiene implicaciones analíticas y que ha sido utilizada para estudiar estas relaciones es el interaccionismo simbólico (I.S.), cuyo supuesto básico es que las dimensiones culturales y sociales no son condiciones periféricas del aprendizaje matemático sino parte intrínseca del mismo.

Según la síntesis que realizan Sierpinska y Lerman (1996) del programa interaccionista aplicado a la educación matemática el interaccionismo es una de las aproximaciones a la investigación sobre el desarrollo intelectual que promueve una visión sociocultural sobre las fuentes y el crecimiento del conocimiento. Se enfatiza como foco de estudio *las interacciones entre individuos dentro de una cultura* en lugar de sobre *el individuo.* El énfasis se coloca en la construcción subjetiva del conocimiento a través de la interacción, asumiendo el supuesto básico de que los procesos culturales y sociales son parte integrante de la actividad matemática (Bauersfeld, 1995). Los fundamentos de la perspectiva interaccionista se pueden esquematizar en:

- el profesor y los estudiantes constituyen interactivamente la cultura del aula,

- las convenciones y convenios tanto en lo relativo al contenido de la disciplina, como en las regularidades sociales, emergen interactivamente, y

- el proceso de comunicación se apoya en la negociación y los significados compartidos.

Objetivos de las investigaciones del programa interaccionista

Como afirman Sierpinska y Lerman (1996), el fin de la mayor parte de la investigación del programa interaccionista en la educación matemática es lograr una mejor comprensión de los fenómenos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, tal y como ocurren en los contextos escolares ordinarios. Hay menos interés en la elaboración de teorías para la acción y el diseño de acciones didácticas en sí mismas. Los resultados de la investigación en el programa interaccionista no conducen a recomendaciones para la acción sino a la descripción y discusión de diferentes posibilidades. No se pretende mejorar la microcultura de la clase de la misma manera que podemos cambiar el currículum matemático o la macrocultura de la clase caracterizada por principios generales y estrategias de enseñanza.

Algunos de los problemas centrales que ve el interaccionismo para la educación matemática son:

¿Cómo se constituyen interactivamente los significados matemáticos en las diferentes culturas de la clase de matemáticas?

¿Cómo se estabilizan estos significados?

¿Cómo son estos significados y cómo dependen del tipo de cultura de la clase en que evolucionan?

Entre las nociones clave del programa IS están los dominios de experiencia subjetiva, los patrones de interacción y las normas sociomatemáticas.

Dominios de experiencia subjetiva

Bauersfeld, Krummheuer y Voigt (1988, p. 177) elaboran un constructo teórico que denominan 'dominio de experiencia subjetiva' (DES), para adaptar al campo de estudio del aprendizaje matemático las nociones psicológicas de "script" (esquema, guión), "frame" (marco), "expert system" (sistema experto) y "microworld" (micromundo). Según el modelo DES el sujeto siempre forma experiencias en un contexto, en una situación dada. Estas experiencias son totales, esto es, no están limitadas a la dimensión cognitiva, incluyen también aspectos emocionales y motores. Según su especificidad situacional las experiencias de un sujeto se almacenan en la memoria en DES distinguibles. Por tanto, cada DES está formado inevitablemente por la totalidad y la complejidad de la situación en la misma medida en que ha sido experimentado y procesado como relevante por el sujeto.

Patrones de interacción

Debido a la ambigüedad y a las diferentes interpretaciones posibles, la negociación del significado de una situación particular es frágil. Incluso aunque se comparta un contexto, hay un riesgo permanente de un colapso y desorganización en el proceso interactivo. Los *patrones de interacción* funcionan para minimizar este riesgo. "Los patrones de interacción se consideran como regularidades que son interactivamente constituidas por el profesor y los estudiantes". (Voigt, 1995, p. 178). Son una consecuencia de la tendencia natural a hacer las interacciones humanas más predecibles, menos arriesgadas en su organización y evolución (Bauersfeld, 1994).

Normas sociales y sociomatemáticas

Las interacciones entre profesor y alumnos están con frecuencia regidas por 'obligaciones' o normas no explícitas. En Godino y Llinares (2000) se indican los supuestos que colocan las perspectivas interaccionistas sobre el uso del lenguaje (entendido ampliamente), subrayando la importancia de la negociación de los significados como una manera de dar cuenta de cómo los estudiantes desarrollan la comprensión de las nociones matemáticas y desarrollan creencias y actitudes en relación a las matemáticas.

2.6.3. Aprendizaje discursivo o comunicacional

El número monográfico de la revista *Educational Studies in Mathematics*, editado por Kieran, Forman y Sfard (2001), agrupa un conjunto de trabajos que describen una nueva dirección en la educación matemática, tanto en la manera de considerar el aprendizaje de las matemáticas como incluso el propio pensamiento matemático.

En la literatura de investigación predomina aún el uso de nociones cognitivas tales como esquemas mentales, concepciones, conflictos cognitivos, pero se observa la progresiva introducción de otras nociones teóricas como actividad, patrones de interacción, fallo de comunicación. El aprendizaje, concebido como una adquisición personal está siendo complementado por una nueva visión del aprendizaje como un proceso de participación en un hacer colectivo. Lo importante no es el cambio del aprendiz individual sino el cambio en los modos de comunicarse con los demás.

El nuevo marco de investigación comienza a designarse como *discursivo* o *comunicacional* por el énfasis que atribuyen las investigaciones al lenguaje y a la comunicación, siendo una de las diversas implementaciones posibles del enfoque sociocultural, ligado a la escuela de pensamiento de Vygotsky y a la filosofía de Wittgenstein. Esta aproximación propone una visión del pensamiento humano como algo esencialmente social en sus orígenes y dependiente de factores históricos, culturales y situacionales de manera compleja.

Según Sfard (2001) la aproximación comunicacional a la cognición se basa en el principio teórico de que "la comunicación no debería considerarse como una mera ayuda al pensamiento sino casi como equivalente al mismo pensamiento" (p. 13). El pensamiento se concibe como un caso especial de actividad de comunicación y "el aprendizaje matemático significa llegar a dominar un discurso que sea reconocido como matemático por interlocutores expertos" (Kieran, Forman y Sfard, 2001: p. 5). El aprendizaje se concibe en términos de discurso, actividad, cultura, práctica, y su desarrollo se centra en las interacciones interpersonales.

La dicotomía problemática entre lo individual y lo social se resuelve cuando se reconoce que los enfoques cognitivistas e interaccionistas no son sino dos maneras de mirar algo que es básicamente un mismo fenómeno: el fenómeno de la comunicación, "que se origina entre las personas y que no existe sin el colectivo aunque incluso temporalmente involucre a un solo interlocutor" (p. 10).

Sfard (2001) presenta la metáfora del aprendizaje mediante la participación y comunicación como complementaria a la del aprendizaje como adquisición del conocimiento, tanto en el caso de considerarlo como recepción pasiva como mediante construcción activa. Los psicólogos que asumen el enfoque sociocultural ponen en duda la pertinencia de hablar de rasgos del individuo independientes del contexto, como puede ser la posesión (construcción o adquisición) de esquemas cognitivos. Prefieren considerar el aprendizaje "como llegar a convertirse en participantes de ciertas actividades específicas en el seno de comunidades de prácticas, en la iniciación en un discurso".

En el enfoque comunicacional o discursivo la dicotomía entre pensamiento y lenguaje prácticamente desaparece; el lenguaje deja de ser una mera "ventana de la mente", como una actividad secundaria del pensamiento que expresa algo ya disponible. Aunque pensamiento y lenguaje se deban considerar como dos entidades diferentes, "ambas se tienen que comprender básicamente como aspectos de un mismo fenómeno, sin que ninguno de ellos sea anterior al otro" (Sfard, 2001, p. 27).

El aprendizaje como iniciación en un discurso

En la aproximación comunicacional /participativa que describe Sfard el centro de atención de la investigación está en el discurso, término que designa cualquier ejemplo específico de comunicación, tanto si es diacrónica como sincrónica, si se realiza con otras personas o con uno mismo, tanto si es predominantemente verbal o con la ayuda de otro sistema simbólico. Los discursos se analizan como actos de comunicación, por lo que cualquier objeto que acompaña a la comunicación e influye en su efectividad - gestos, claves de la situación, las historias de los interlocutores, etc. - se deben incluir en el análisis. El aprendizaje matemático se debe definir en esta perspectiva como una iniciación en el discurso matemático, esto es, iniciación en una forma especial de comunicación conocida como matemática.

Como factores a tener en cuenta en el aprendizaje se deben considerar los *útiles mediadores* que las personas usan como herramientas de comunicación, y las *reglas meta-discursivas* que regulan el esfuerzo de comunicación. La comunicación, bien interpersonal o auto-orientada (pensamiento) no sería posible sin las herramientas simbólicas, entre las que destaca el lenguaje, pero que incluyen también notaciones, gráficos, tablas o fórmulas algebraicas.

Sfard (2001) considera que no tiene sentido hablar del pensamiento como algo con una existencia independiente de las herramientas simbólicas usadas en el proceso de comunicación. Esto significa, entre otras cosas, que deberíamos considerar como sin sentido enunciados tales como "el mismo pensamiento se ha comunicado mediante medios diferentes" (lo que, sin embargo, no quiere decir que no podamos *interpretar* dos expresiones de la misma manera, con *interpretación* y *pensamiento* siendo dos cosas diferentes). "En otras palabras, no hay ninguna 'esencia cognitiva' o 'pensamiento puro' que se pudiera extraer desde una materialidad simbólica y ponerla en otra" (p. 29).

En cuanto a las reglas meta-discursivas Sfard las describe como lo que guía el curso general de las actividades de comunicación. Entre las infinitas posibles referencias o interpretaciones que se pueden poner en juego en un discurso estas reglas permiten a los interlocutores reducirlas a un número manejable de elecciones, lo que hace posible la comunicación. En la mayoría de los casos son implícitas. Vienen a ser equivalentes, entre otros a nociones tales como juegos de lenguaje (Wittgenstein), normas socio-matemáticas (Yackel y Cobb, 1996).

Conflictos discursivos

Sfard (2001) distingue entre la noción de conflicto cognitivo y conflicto discursivo. El concepto de conflicto cognitivo considera que el sujeto está en constante persecución de la verdad sobre el mundo, y cualquier conocimiento nuevo que adquiere es el resultado de sus intentos por ajustar su comprensión al agregado de hechos e ideas dadas externamente e independientes de la mente. Implica, por tanto, la capacidad del sujeto para justificar racionalmente dos afirmaciones contrapuestas sobre el mundo.

En contraste, la noción de conflicto discursivo enfatiza la necesidad de la comunicación como motivación principal de nuestras acciones cognitivas, y señala el deseo de ajustar los usos discursivos propios de las palabras con los de otras personas. Se quiere explicar el fallo en la comunicación por el "desacuerdo en los usos habituales de las palabras, lo que es propiamente un fenómeno discursivo" (p. 48).

2.6.4. Una epistemología experimental: La Teoría de Situaciones Didácticas

El trabajo teórico y experimental realizado por Brousseau (1986; 1997) es sin duda una de las contribuciones más importantes realizadas para la didáctica de las matemáticas.

En la base de esta teoría está la hipótesis epistemológica de que "el conocimiento existe y tiene sentido para el sujeto cognoscente sólo porque representa una solución óptima en un sistema de restricciones" (Brousseau, 1986, p.368). El acto de conocer se considera situado en un sistema de restricciones, las cuales, mediante el feedback sobre las acciones del sujeto, le señalan el coste de los ensayos y errores. El aprendizaje, entendido como un cambio del sujeto en sus relaciones con el medio, ocurre cuando la aplicación de nociones previamente construidas resultan ser demasiado costosas, y está obligado a hacer adaptaciones o incluso rechazos.

Para Brousseau, el conocimiento construido o usado en una situación es definido por las restricciones de esta situación, y, por tanto, si el profesor crea ciertas restricciones artificiales es capaz de provocar en los estudiantes la construcción de un cierto tipo de conocimiento. Se trata de una hipótesis que está ciertamente más próxima al constructivismo que a las aproximaciones que se derivan de la noción Vygostskiana de zona de desarrollo próximo.

Como indican Sierpinska y Lerman (1996), Brousseau establece un programa de investigación para la didáctica de la matemática que implica estudios epistemológicos, diseño de situaciones didácticas, experimentación, comparación del diseño con los procesos que tienen lugar de hecho, revisión de los estudios epistemológicos y del diseño, y estudio de las condiciones de la reproductibilidad de las situaciones. Propone que el diseño de las situaciones didácticas relativas a un concepto matemático dado se oriente a la construcción de su *génesis artificial*, que simulará los diferentes aspectos actuales del concepto para los estudiantes, y que, sin reproducir el proceso histórico, conducirá a resultados similares.

Brousseau, propone varios tipos de situaciones didácticas, cuya secuenciación puede provocar la *génesis artificial* de un concepto matemático. Dichos tipos de situaciones son las siguientes:

- Situaciones centradas sobre 'la acción', donde los estudiantes hacen sus primeros intentos por resolver un problema propuesto por el profesor;
- Situaciones centradas sobre la 'comunicación', donde los estudiantes comunican los resultados de su trabajo a otros estudiantes y al profesor;
- Situaciones centradas sobre la 'validación', donde se deben usar argumentaciones teóricas mas bien que empíricas; y
- Situaciones de institucionalización, donde los resultados de las negociaciones y convenciones de las fases previas son resumidas, y la atención se centra sobre los hechos 'importantes', los procedimientos, las ideas, y la terminología 'oficial'.

Dentro de cada una des estas situaciones, hay un componente 'a-didáctico', esto es, un espacio y tiempo donde la gestión de la situación recae enteramente en los estudiantes. Se considera que ésta es la parte más importante, ya que, de hecho, el fin último de la enseñanza es lo que Brousseau llama la *devolución* del problema a los estudiantes.

El programa de investigación esbozado por la teoría de situaciones está orientado hacia la elaboración de *situaciones fundamentales* relacionadas con los conceptos matemáticos básicos enseñados en la escuela, que garanticen, en cierto modo su adquisición por los estudiantes cualquiera que fuera la personalidad del profesor.

2.6.5. Antropología cognitiva. La matemática como actividad humana

El enfoque antropológico en Didáctica de las Matemáticas que Chevallard viene desarrollando desde 1992 nos parece que aporta los elementos básicos de una epistemología de las matemáticas que entronca con las corrientes de tipo pragmático. El punto de partida es considerar la actividad matemática, y la actividad de estudio de las matemáticas, en el conjunto de las actividades humanas y de las instituciones sociales.

En los comienzos de la teoría antropológica se introducen como nociones técnicas las de objeto, sujetos, instituciones y relaciones personales e institucionales a los objetos. Se considera que estos objetos existen porque hay "actividad", es decir trabajo humano, del que todos son emergentes.

La teoría antropológica se ha centrado hasta el momento, casi de manera exclusiva, en la dimensión institucional del conocimiento matemático. Las nociones de obra matemática, praxeología, relación institucional al objeto se proponen como instrumentos para describir la actividad matemática y los objetos institucionales emergentes de tal actividad. El constructo cognitivo (en sentido restringido) que propone es el de "relación personal al objeto" que agrupa todas las restantes nociones propuestas desde la psicología (concepción, intuición, esquema, representación interna, etc.).

Veamos la descripción que se hace en Chevallard (1999; p. 224-229) de la noción de praxeología u organización matemática que se ha convertido en una de las nociones básicas de la teoría antropológica, y que guarda similitud con el constructo "sistema de prácticas institucionales ligadas a un campo de problemas" introducida en Godino y Batanero (1994).

Alrededor de un tipo de tareas, T, se encuentra así, en principio, una tripleta formada por una *técnica* (al menos), τ, por una tecnología de τ, θ, y por una teoría de θ, Θ. El total, indicado por $[T/\tau/\theta/\Theta]$, constituye una praxeología *puntual*, donde este último calificativo significa que se trata de una praxeología relativa a un único tipo de tareas, T. Una tal praxeología – u *organización praxeológica*- está pues constituida por un bloque práctico-técnico, $[T/\tau]$, y por un bloque *tecnológico-teórico* $[\theta/\Theta]$.

El bloque $[\theta/\Theta]$ se identifica habitualmente como *un saber*, mientras que el bloque $[T/\tau]$ constituye un *saber-hacer*. Por metonimia se designa corrientemente como "saber" la praxeología $[T/\tau/\theta/\Theta]$ *completa*, o incluso cualquier parte de ella. Pero esta manera de hablar estimula una *minoración del saber-hacer*, sobre todo en la producción y difusión de las praxeologías (p. 229).

Desde nuestro punto de vista la TAD representa una ruptura epistemológica dentro de los marcos teóricos usados en la didáctica, de profundas consecuencias en cuanto al enfoque y planteamiento de los problemas de investigación. Pero al mismo tiempo creemos necesario hacer un esfuerzo por clarificar las nociones introducidas por Chevallard, hacerlas operativas y poner de manifiesto las semejanzas, diferencias y relaciones con otras herramientas conceptuales usadas ampliamente en la actualidad, como son, por ejemplo, las de esquema, concepción y significado.

La distinción entre el dominio de lo personal y de lo institucional y de sus mutuas interdependencias es uno de los ejes principales de la antropología cognitiva. Pero un énfasis excesivo en lo institucional puede ocultar la esfera de lo mental, de los procesos de cognición del sujeto individual, de los que en un enfoque sistémico de la Didáctica no se puede prescindir y que quedan diluidos en la teorización de Chevallard. La consideración explícita de este dominio nos lleva a diferenciar entre objeto institucional, base del conocimiento objetivo y objeto personal (o mental), cuyo sistema configura el conocimiento subjetivo y proporciona una interpretación útil a la noción de concepción del sujeto (Artigue, 1990), así como a las de concepto y teorema en acto (Vergnaud, 1982).

Por otra parte, creemos necesario destacar que las prácticas y los objetos que intervienen en ellas, y los que emergen de las mismas, así como las relaciones a estos objetos, están organizados en torno de una finalidad: adoptar decisiones, actuar, resolver tipos de situaciones problemáticas o ciertas disposiciones del entorno. Por este motivo, como se desarrolla en el capítulo 3, creemos necesario tomar como noción primitiva la de situación-problema.

2.7. LA METÁFORA ECOLÓGICA EN EL ESTUDIO DE LA COGNICIÓN MATEMÁTICA

El análisis de la problemática que plantea el uso de las matemáticas en las distintas instituciones, las relaciones de los propios objetos matemáticos entre sí y con otros campos de conocimiento puede facilitarse comparándo esta problemática con la de la ecología, considerada como la disciplina científica que se interesa por las relaciones entre los organismos y sus entornos pasados, presentes y futuros. "Estas relaciones incluyen las respuestas fisiológicas de los individuos, la estructura y dinámica de las poblaciones, las interacciones entre especies, la organización de las comunidades biológicas y el procesamiento de la energia y la materia en los ecosistemas" (Revista "Ecology"; American Ecological Society)

Consideramos que en un enfoque unificado de la cognición matemática, en cuyo desarrollo estamos interesados, el empleo de herramientas conceptuales procedentes de la ecología pueden desempeñar un papel útil, en particular el concepto de *econicho* y la de *relación ecológica* entre objetos matemáticos. Un enfoque moderno de estos conceptos, basado en la teoría general de sistemas (Patten y Auble, 1980), permite aplicarlos a objetos no vivos, sustituyendo los criterios de "viabilidad", persistencia o existencia indefinida, por cualquier noción de utilidad, disponibilidad, acoplamiento o compatibilidad.

Hasta aquí hemos interpretado la *"ecología de los objetos matemáticos*" como una metáfora que ayuda a comprender la génesis, desarrollo y funcionamiento de dichos objetos (sistemas de prácticas, técnicas, conceptos, teorias, etc). Pero hay que resaltar que existe una corriente en epistemología y sociología del conocimiento que va más allá de un planteamiento metafórico para estas cuestiones. Toulmin (1977) introduce la expresión "*ecología intelectual*" para destacar las cuestiones de función y adaptación a las necesidades y exigencias reales de las situaciones problemáticas de los conceptos colectivos y los métodos de pensamiento. Asimismo, el trabajo de Morin (1992), "*Las ideas, su hábitat, su vida, sus costumbres, su organización*" constituye un ejemplo relevante. Este autor considera tan inadecuada la creencia en la realidad física de las ideas, como el negarles un tipo de realidad y existencia objetiva. Para este autor, las ideas en general (y por tanto las nociones matemáticas), además de constituir instrumentos de conocimiento, tienen una existencia propia y característica.

> "Los números son reales, aún cuando no existan en tanto que tales en la naturaleza. Su tipo de realidad, transcendente, cuasi pitagórica según un punto de vista, no ha dejado de atormentar al espíritu de los matemáticos" (Morin, 1992; p. 111).

Las creaciones del espíritu, aunque producidas por el hombre y dependientes de la actividad humana que las producen, adquieren una realidad y una autonomía objetiva; configuran lo que Popper denomina el "tercer mundo" y Morin (usando el término de Teilhard de Chardin) describe como *noosfera*. La noosfera emerge con vida propia a partir del conjunto de las actividades antroposociales. En consonancia con esta "nueva realidad" surge la posibilidad de una ciencia, la *noología*, que sería la ciencia de la vida de los "seres del espíritu", considerados como entidades objetivas.

> "Pero esto no excluye en absoluto considerar igualmente estas "cosas" desde el punto de vista de los espíritus/cerebros humanos que las producen (Antropología del conocimiento) y desde el punto de vista de las condiciones culturales de su producción (Ecología de las ideas)" (Morin, 1992; p. 115).

Todos estos puntos de vista son complementarios. Esta nueva perspectiva epistemológica lleva a distintos pensadores a considerar las ideas como entidades dotadas de una actividad propia y a plantearse las siguientes preguntas:

> "¿Cómo actúan unas ideas sobre otras? ¿Existe una especie de selección natural que determina la supervivencia de ciertas ideas y la extinción de otras? ¿Qué tipo de economía limita la multiplicación de ideas en una región del pensamiento? ¿Cuáles son las condiciones necesarias para la estabilidad (o la supervivencia) de un sistema o subsistema de este género" (Bateson, 1977)[7].

El *locus* o lugar de la realidad matemática es para White (1983) la tradición cultural, es decir, el continuum de conducta expresada por símbolos. Dentro del cuerpo de la cultura matemática ocurren acciones y reacciones entre los distintos elementos. "Un concepto reacciona sobre otros; las ideas se mezclan, se funden, forman nuevas síntesis" (White, 1983; p. 274).

La aplicación de la metáfora ecológica al estudio de la evolución de los saberes implica considerarlos como "organismos" u "objetos" que interaccionan y desempeñan un "role" en el seno de instituciones donde se reconoce su existencia cultural, las cuales vienen a ser su "habitat". Parece claro que no es posible pensar en los saberes independientemente de las personas que los piensan y usan. Pero la identificación de la existencia de un saber precisa de un reconocimiento colectivo, esto es, se trata de un emergente de un sistema de prácticas sociales reconocidas. Una tipificación de acciones habitualizadas por tipos de actores es una institución (Berger y Luckmann, 1968); las instituciones son, pues, los hábitat de los saberes.

---

[7] "Ecología del espíritu"; citado por Morín (1992), p. 112)

Una de las posibilidades que ofrece el paradigma ecológico consiste en su capacidad de dar sentido a nuevas cuestiones que de otro modo parecen evidentes o sin interés. Asimismo, lleva a centrar nuestra atención en aspectos contextuales e interacciones que con frecuencia pasan inadvertidos.

A título de ejemplo indicamos, a continuación, algunas de estas cuestiones.

a) ¿Cuáles son los hábitats que ocupan actualmente los saberes matemáticos? ¿Cuáles son los distintos usos que se hace de las matemáticas en dichos hábitats?

b) ¿Existen instituciones en las que las matemáticas podrían ser utilizadas más intensa y adecuadamente?

c) ¿Qué tipo de restricciones del entorno (factores limitativos) dificultan que las matemáticas ocupen los nichos ecológicos vacíos?

d) ¿Cómo se relacionan las matemáticas con los restantes saberes presentes en las distintas instituciones?

e) ¿Es posible identificar sub-especies (sub-saberes) como consecuencia de fenómenos de adaptación al entorno?

f) ¿Existen relaciones especiales de competición, simbiosis, de dominancia y control entre saberes y sub-saberes que condicionen la difusión idónea de las matemáticas?

g) ¿Qué tipo de dependencias (semióticas, instrumentales, de cooperación, simbiosis, subordinación, etc.) existen entre distintas praxeologías matemáticas y entre los componentes de una praxeología dada dada?

2.8. NECESIDAD DE UN ENFOQUE UNIFICADO SOBRE LA COGNICIÓN Y LA INSTRUCCIÓN MATEMÁTICA

En las secciones anteriores hemos descrito resumidamente las principales nociones y enfoques teóricos que han servido de fundamento y punto de partida para nuestras propias reflexiones acerca de la naturaleza de los objetos matemáticos, su enseñanza y aprendizaje. En esta última sección sintetizamos las conclusiones a las que hemos llegado y los criterios que consideramos necesarios adoptar para progresar hacia un modelo unificado de la cognición e instrucción matemática.

Las principales características que debemos atribuir a las matemáticas son las siguientes:

(a) Las matemáticas constituyen un quehacer humano, producido como respuesta a cierta clase de situaciones problemáticas del mundo real, social o de la propia matemática. Como respuesta o solución a estos problemas externos e internos, los objetos matemáticos (conceptos, procedimientos, teorías, etc, emergen y evolucionan progresivamente. Las acciones de las personas deben ser consideradas, por tanto, como la fuente genética de las conceptualizaciones matemáticas, de acuerdo con las teorías constructivistas Piagetianas.

(b) Los problemas matemáticos y sus soluciones son compartidos en el seno de instituciones o colectivos específicos implicados en el estudio de ciertas clases problemas. En algunos casos estas instituciones pueden ser extramatemáticas e incluso un problema particular surge inicialmente en una institución extramatemática, aunque posteriormente la comunidad matemática se interesa por su solución y la aplica a otros problemas o contexto. En consecuencia, los objetos matemáticos son entidades culturales socialmente compartidas.

(c) Las matemáticas crean un lenguaje simbólico en el que se expresan las situaciones problemas y sus soluciones. Los sistemas de símbolos, dados por la cultura, no sólo tienen una función comunicativa, sino un papel instrumental, que modifican al propio sujeto que los utiliza como mediadores.

(d) La actividad matemática se propone, entre otros fines, la construcción de un sistema conceptual lógicamente organizado. Por ello, cuando añadimos un nuevo conocimiento a la estructura ya existente, no sólo se aumenta dicha estructura, sino que el conjunto de relaciones existentes queda modificado.

Estas ideas son también comunes con las Piagetianas y además tienen en cuenta la realidad social del trabajo matemático, que se produce en comunidad. Cuando un objeto matemático ha sido aceptado como parte del sistema en una institución (matemática o extramatemática) o por una persona puede considerarse como una realidad textual y un componente de la estructura global. Puede ser manipulado como un todo para crear nuevos objetos matemáticos, ampliando el rango de herramientas matemáticas. Pero al mismo tiempo, introduce nuevas restricciones al lenguaje y el trabajo matemáticos.

En el conocimiento matemático es necesario distinguir, en consecuencia, dos dimensiones interdependientes: personal (subjetiva o mental) e institucional (objetiva, contextual). Dado que los sujetos se desarrollan y viven en el seno de diversas instituciones, su conocimiento estará mediatizado por las particularidades del conocimiento contextual correspondiente. Es importante reconocer que las matemáticas, como realidad cultural (Wilder, 1981), adoptan distintas "formas de estar" y de funcionar según los grupos humanos que las cultivan, aunque ello no significa que debamos reconocer el papel dominante y de control de la organización formal, lógico-deductiva, adoptada por las matemáticas en la institución "productora del saber", debido, entre otros motivos, a su "eficacia" en el planteamiento y resolución de nuevos problemas.

Esto aconseja concebir los objetos y su significado con un carácter esencialmente relativista, lo cual permitirá apreciar mejor las adaptaciones e influencias mutuas que sufren los objetos matemáticos al ser transmitidos entre personas e instituciones.

Consideramos que las nociones cognitivas que se están usando actualmente en educación matemática (representaciones, concepciones, esquemas, etc.) atienden a aspectos parciales de la cognición matemática. Pensamos que son insuficientes para analizar las distintas facetas implicadas en el estudio de las matemáticas.

El presupuesto anti-representacionista de Wittgenstein ha llevado a la aproximación antropológica a prescindir del uso de las palabras consistente en nombrar y representar otras entidades, y por tanto, es ciego respecto de los procesos de semiosis. De una posición filosófica en que todo era representacional se ha pasado a otra en que nada es representación, sino acción.

La ontología matemática que proponemos en nuestro enfoque unificado de la cognición e instrucción matemática, que desarrollamos en los restantes capítulos de esta Monografía, asocia al objeto -que es presentado como un emergente de los sistemas de prácticas ligadas a campos de problemas- tales sistemas de prácticas, lo que puede ser equivalente a ligar a una regla el sistema de actuaciones derivadas de su seguimiento en cada juego de lenguaje en que se usa.

Nuestra teoría de las funciones semióticas (capítulo 7) y la ontología pragmático-realista asociada trata de superar las limitaciones de los enfoques representacionistas y pragmatistas, aisladamente considerados.

Aportamos un instrumento para analizar el lenguaje matemático, identificar las dependencias entre partes y componentes de los textos y las conexiones con los diversos mundos puestos en juego en el trabajo matemático y las producciones derivadas del mismo.

El punto de partida de nuestra teorización es la formulación de una ontología de los objetos matemáticos que tiene en cuenta el triple aspecto de la matemática como actividad de resolución de problemas, socialmente compartida, como lenguaje simbólico y sistema conceptual lógicamente organizado, pero también la dimensión cognitiva individual.

Esbozo de una teoría instruccional

La investigación didáctica debe afrontar el problema del estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en toda su complejidad. Aunque una investigación particular tenga que centrarse en aspectos específicos (análisis epistemológico y/o cognitivo de un concepto, o un reducido campo de problemas), no se debe perder de vista la perspectiva sistémica -entendida en su versión débil- , y tratar de desarrollar modelos teóricos que articulen las facetas epistemológica, cognitiva e instruccional.

El foco de atención primario de una investigación didáctica debemos situarlo en el análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de los contenidos matemáticos en el seno de las instituciones educativas. Por tanto, se tratará de caracterizar la naturaleza y factores condicionantes de las relaciones entre un saber, los alumnos que tratan de apropiarse de dicho saber con la ayuda de un profesor, y bajo unas circunstancias contextuales determinadas. En su conjunto estos componentes definen un sistema dinámico, con diversas facetas, cuya evolución en el tiempo se puede modelizar (al menos metafóricamente) como un proceso estocástico, siendo necesario estudiar los estados del sistema y las trayectorias o secuencias de estados de cada uno de las facetas. En el capítulo 8 desarrollamos algunas nociones teóricas que constituyen el esbozo de una teoría interaccionista de la instrucción matemática coherente con el modelo cognitivo elaborado en los capítulos 3 a 7.

Capítulo 3

SIGNIFICADO INSTITUCIONAL Y PERSONAL DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS

3.1. Introducción
3.2. La teoría antropológica como punto de partida
3.3. Problemas matemáticos y campos de problemas
3.4. La noción de práctica
3.5. La noción de institución.
3.6. Los objetos matemáticos como emergentes de sistemas de prácticas.
3.7. Significados institucionales y personales de los objetos matemáticos
3.8. Síntesis e implicaciones

3.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo presentamos un nuevo constructo teórico, de naturaleza pragmática, que proponemos como herramienta clave del análisis cognitivo en educación matemática. Se trata de la noción de "sistema de prácticas operativas y discursivas de una persona ante un cierto tipo de situaciones-problemas". Junto a estos "sistemas de prácticas" postulamos la emergencia de objetos personales e institucionales, objetivados por un léxico común. Se obtiene de este modo un modelo de cognición matemática que podemos calificar de pragmático-realista.

De esta manera tenemos en cuenta el papel esencial de la actividad matemática, las acciones de las personas ante cierto tipo de tareas problemáticas, en la generación de las entidades matemáticas, en su doble versión de entidades culturales y mentales. El carácter inobservables de estas últimas nos lleva a proponer asignar como significado de un término o expresión matemática el correspondiente sistema de prácticas.

De esta manera los objetos matemáticos serán concebidos como entidades complejas, que se construyen progresivamente y se van enriqueciendo y completando a partir de la actividad reflexiva en la resolución de ciertos tipos o campos de problemas.

En contra de una posición absolutista o platónica, consideramos que los objetos matemáticos son fruto de la construcción humana, cambian a lo largo del tiempo y pueden ser dotados de significados diversos por personas e instituciones diferentes. Para analizar mejor los procesos de enseñanza y aprendizaje y utilizar un mismo lenguaje en el análisis de las posibles disfunciones y dificultades de los alumnos que participan en una institución de enseñanza, contemplaremos la idea de objeto matemático y su significado desde una doble faceta institucional y personal.

3.2. LA TEORÍA ANTROPOLÓGICA COMO PUNTO DE PARTIDA

El punto de partida de las nociones teóricas que describimos en este capítulo, que han sido objeto de diversas publicaciones previas (Godino y Batanero, 199; 1994; 1998), está en las primeras formulaciones de la teoría antropológica elaborada por Chevallard. La idea de objeto matemático, como emergente de un sistema de prácticas, parte del trabajo de Chevallard (1991), quien llamó praxema a los "objetos materiales ligados a las prácticas" y usó esta noción para definir el objeto como un "*emergente de un sistema de praxemas*", más concretamente como:

> "un emergente de un sistema de prácticas donde son manipulados objetos materiales que se desglosan en diferentes registros semióticos: registro de lo oral, palabras o expresiones pronunciadas; registro de lo gestual; dominio de la inscripción, lo que se escribe o dibuja (grafismos, formulismos, cálculos, etc.), es decir, registro de lo escrito" (p. 8).

También adoptamos del citado trabajo uno de los supuestos básicos de la antropología cognitiva, que es la relatividad del conocimiento respecto de las personas y las instituciones. Esto lo expresa Chevallard mediante las nociones de "relación personal e institucional con el objeto" (rapport à l'objet):

> "un objeto existe desde que una persona X o una institución I reconoce este objeto como un existente (para ella). Más precisamente, se dirá que el objeto O existe para X (resp., para I) si existe un objeto, que represento por R(X,O) (resp., R (O)) que llamo relación personal de X a O (resp., relación institucional de I a O)" (Chevallard, 1992, pag. 9).

En nuestra teorización hemos tratado de clarificar las nociones introducidas por Chevallard en su trabajo de 1991 y otros posteriores, hacerlas operativas y relacionarlas con otras herramientas conceptuales, como las de concepción y significado. Este esfuerzo de clarificación nos llevó a proponer, como unidad de análisis del conocimiento matemático, el sistema de prácticas operativas y discursivas ligadas a un campo de problemas, con el cual tratamos de operativizar el constructo "relación con el objeto".

La distinción entre el dominio de lo personal y de lo institucional y de sus mutuas interdependencias es uno de los ejes principales de la antropología cognitiva y de los enfoques socioculturales en educación matemática (Cobb, 1989). Pero, Chevallard se centra preferentemente en lo institucional y, a nuestro juicio, no es posible olvidar el componente mental y personal de los procesos de cognición humana. La consideración explícita de este dominio nos lleva a diferenciar en nuestro marco teórico entre *objeto institucional*, base del conocimiento objetivo y *objeto personal* (o mental), cuyo sistema configura el conocimiento subjetivo y proporciona una interpretación útil a la noción de concepción del sujeto (Artigue, 1990), así como a las de concepto y teorema en acto (Vergnaud, 1982).

Tomando como noción primitiva la de situación-problema, definimos a continuación los conceptos teóricos de práctica, objeto (personal e institucional) y significado con el fin de hacer patente y operativa la génesis personal e institucional del conocimiento matemático, así como su mutua interdependencia.

Para mayor claridad, usaremos como ejemplo un objeto matemático particularmente sencillo como es el caso de la mediana. No obstante, la teoría puede aplicarse a otros tipos de objetos matemáticos, por ejemplo, un teorema (significado del teorema de Thales), un conjunto de métodos (significado de los contrastes de hipótesis), capítulo (significado del cálculo diferencial) o rama de las matemáticas (significado del Algebra).

En trabajos previos hemos analizado otros objetos matemáticos, tales como los conceptos de *media aritmética* (Godino y Batanero, 1994), *asociación estadística* (Godino y Batanero, 1998). En el capítulo 11 describimos diversas investigaciones que se han realizado usando como marco teórico las nociones teóricas que describimos en este capítulo.

3.3. PROBLEMAS MATEMÁTICOS Y CAMPOS DE PROBLEMAS

Aunque, como hemos indicado, el desarrollo inicial de nuestro marco teórico ha estado fuertemente influido por las ideas de Chevallard, una diferencia importante es que nosotros asumimos que las prácticas, los objetos que intervienen en ellas, y los que emergen de las mismas, están organizados en torno de una finalidad: adoptar decisiones, actuar, resolver situaciones problemáticas. Por ello tomamos la noción de situación-problema como primitiva.

Entre las muchas posibles definiciones válidas de problema, nos han parecido particularmente adaptadas a nuestro trabajo las dos siguientes. Lester (1980) define un problema como:

> "una situación en la que se pide a un individuo realizar una tarea para la que no tiene un algoritmo fácilmente accesible que determine completamente el método de solución" (pag. 287).

A su vez, Simon (1978) describe que:

> "un ser humano se enfrenta con un problema cuando intenta una tarea pero no puede llevarla a cabo. Tiene algún criterio para determinar cuando la tarea ha sido completada satisfactoriamente" (pag. 198).

Estas definiciones se refieren a problemas de cualquier índole. Nosotros, sin embargo, estamos interesados por los problemas o situaciones de tipo matemático, es decir, aquellas situaciones y aplicaciones extramatemáticas o intramatemáticas que inducen la actividad matemática y a partir de las cuales han emergido los conceptos y teorías.

Consideraremos que, para una persona dada, una situación-problema es cualquier tipo de circunstancia que precisa y pone en juego actividades de matematización. Como ejemplos de actividades de matematización podemos resaltar:

- construir o buscar posibles soluciones que no son accesibles inmediatamente;
- inventar una simbolización adecuada para representar las situaciones y las soluciones encontradas y para comunicar dichas soluciones a otras personas;
- producir nuevas expresiones y enunciados significativos mediante manipulaciones simbólicas;
- justificar (validar o argumentar) las soluciones propuestas;

- generalizar las soluciones a otros contextos, situaciones-problemas y procedimientos.

Esta descripción de las actividades de matematización concuerda con la propuesta por Freudenthal (1991), y los tres tipos de situaciones didácticas propuestas por Brousseau (1986) (acción, formulación/comunicación, y validación)

En lo que sigue, para hacer más comprensible nuestro análisis, fijaremos la atención en el campo de problemas y de actividades de las que emerge el objeto matemático *"mediana"*. Un ejemplo es el siguiente:

Problema 1: Las calificaciones obtenidas por 7 amigos en Lengua han sido: Suficiente, Sobresaliente, Insuficiente, Notable, Bien, Insuficiente y Notable. ¿Qué calificación los representa?[1]

Este es un caso particular de un tipo de situaciones más general y abstracto, - el campo de problemas de reducción de datos ordinales-, común en muchas aplicaciones de la estadística, y, en particular, cuando queremos realizar comparaciones entre dos conjuntos de datos ordinales. En el Problema 1, la variable que queremos resumir viene medida en una escala ordinal y por tanto, incluso aunque codificásemos los datos como valores numéricos, los cálculos con los mismos, por ejemplo, para representar los datos por la media aritmética, serían inapropiados. Ello se debe a que la diferencia entre dos valores consecutivos (por ejemplo entre Insuficiente y Suficiente y entre Notable y Sobresaliente) no son iguales.

La solución al Problema 1 pasa por ordenar los datos y tomar como representante del conjunto de datos el valor de la variable que ocupa la posición central, es decir, ordenados los datos:

Insuficiente, Insuficiente, Suficiente, Bien, Notable, Notable, Sobresaliente,

Tomamos como *mejor representante* la calificación Bien, porque hay tantos alumnos con calificación inferior como superior a ésta. Aunque podría haberse utilizado también la moda como representante de este conjunto de datos (y en general, para toda variable ordinal), en el ejemplo del Problema 1, el conjunto de datos tiene dos modas. Además, la moda sólo tiene en cuenta la frecuencia de aparición de un valor de la variable,

[1] Matemáticas 3º ESO. Santillana, pp. 264 y 265.

pero no su ordenación. La mediana proporciona, por tanto una información más completa que la moda cuando es posible calcularla.

En el Problema 1 la variable es ordinal y no podemos calcular la media aritmética. En otro casos, la variable se mide según una escala de razón pero es asimétrica, o bien presenta valores atípicos (lo que haría poco representativa la media). Este es el caso del ejemplo que reproducimos a continuación.

Ejemplo 1[2]. Hay distribuciones para las que la media no sirve como resumen representativo de las mismas. Entonces, es preciso buscar otros parámetros que las representen. Esto ocurre para la siguiente situación.

- Los sueldos mensuales de los trabajadores de una empresa son los siguientes (en miles de pesetas):

80 80 80 80 80 100 100 200 340 450 500

La media de todos ellos es de 190.000 pts. Este sueldo medio no representa bien a los de la lista anterior, fíjate en que hay nada menos que siete sueldos mucho más bajos que la media; sin duda, los cinco trabajadores que ganan 80.000 pts no estarían muy de acuerdo en ser representados por el sueldo medio.

En estos casos es mejor utilizar la mediana *Me* para resumir la distribución. La mediana es igual a 100.000 ptas. *Me*= 100.000 pts.

Como se indica en el texto, la mediana es preferible a la media en distribuciones asimétricas de datos cuantitativos, por ser un estadístico robusto a las fluctuaciones de los valores extremos, ya que en el cálculo de la mediana los valores concretos de la variable no intervienen.

Un tercer tipo de problema es cuando se requiere estimar el valor representativo de un conjunto de datos cuya distribución es desconocida, a partir de una muestra pequeña y no conocemos con certeza la distribución de la población (proceso de muestreo de una población no paramétrica). Mientras que para un tamaño suficiente de muestra el teorema central del límite nos asegura que la distribución de la media de la muestra será aproximadamente normal, incluso en variables con distribución claramente asimétrica, esto no se cumple en las pequeñas muestras. Hemos de recurrir entonces a los métodos no paramétricos. Como se indica en Ríos (1967), p. 261:

"La teoría de los métodos no paramétricos adopta un punto de vista

[2] Matemáticas·4º ESO. Opción A. McGraw-Hill, pg 192

mucho más general ... no se pretende resolver el problema de estimación de parámetros de distribuciones pertenecientes a una familia bien definida (normal, Poisson, etc.), sino de características estocásticas (mediana, cuantiles) de una distribución de tipo general".

Estos métodos se basan en la mediana de la muestra y otros estadísticos de orden, porque no son sensibles a los valores atípicos.

Otros problemas que resuelve la mediana es la realización de contrastes de igualdad de poblaciones a partir de dos o más muestras de pequeño tamaño, tomados de poblaciones no paramétricas, la búsqueda de una recta que pueda representar la relación entre dos variables estadísticas medidas en escala ordinal o claramente no simétricas (regresión sobre la mediana), la búsqueda de un coeficiente que nos indique la intensidad y sentido de la asociación entre variables ordinales (correlación ordinal), etc. En general, por cada método estadístico paramétrico (univariante, bivariante o incluso multivariante) podemos encontrar métodos no paramétricos paralelos basados en la mediana y estadísticos de orden.

3.4. LA NOCIÓN DE PRÁCTICA

En los ejemplos de problemas propuestos, así como en su resolución, intervienen "objetos matemáticos" abstractos (números, operaciones, ...), y sus representaciones simbólicas.

También es característico de la actividad matemática extender las soluciones a otras situaciones, y generalizarlas al caso de un número arbitrario de valores o a otros contextos. Para ello, se busca dentro del campo de problemas lo común y esencial, que no depende del contexto. También se relaciona el problema y su solución con otras situaciones, problemas o procedimientos, tratando de generalizar, simbolizar, formular, validar: es lo que Freudenthal (1991) describe como "matematizar".

Una de las primeras nociones introducidas en nuestra teoría fue la de *práctica* (Godino y Batanero, 1994), con objeto de sintetizar mediante ella las características de la actividad de matematización:

Prácticas

En el trabajo citado llamamos *práctica* a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas. Esta noción permite tener en cuenta el principio Piagetiano de la construcción del conocimiento a través de la acción.

Es importante resaltar que en las prácticas matemáticas intervienen objetos materiales (símbolos, gráficos, etc.) y abstractos (que evocamos al hacer matemáticas) y que son representados en forma textual, oral, gráfica o incluso gestual. Las prácticas de una persona al resolver un problema pueden ser observables (por ejemplo, cuando un alumno escribe su solución a un problema o relata al profesor sus acciones para resolverlo). En otros casos algunas de estas prácticas son acciones interiorizadas no observables directamente.

En el estudio de las matemáticas, más que una práctica particular en un problema concreto dado, interesan los tipos de prácticas, esto es, los *invariantes operatorios puestos de manifiesto por las personas en su actuación ante situaciones problemáticas*. Llamaremos a estos invariantes *prácticas prototípicas*. En los problemas semejantes al Problema 1 una práctica habitual consiste en “ordenar los valores de la variable y tomar el valor que ocupa la posición central”. Aunque en cada problema concreto de búsqueda de un representante, la variable de interés, y sus valores concretos varíen, la práctica anterior es aplicable a cualquiera de estas situaciones. Otras prácticas prototípicas para el cálculo de la mediana se describirán en el Capítulo IV e incluyen el cálculo a partir de una tabla de datos o de una gráfica, que dependerá del tipo de variable, número par o impar de datos e incluso de la disponibilidad o no de un ordenador o calculadora.

Generalmente, para cada tipo de problemas podemos asociar un *sistema de prácticas prototípicas* o características. Puesto que algunas personas sólo conocen una parte de estas prácticas o incluso podrían inventar prácticas diferentes de las consideradas como adecuadas en una institución dada, supondremos que hay un conjunto de prácticas prototípicas para un objeto dado y una persona dada.

Prácticas significativas

La resolución de problemas matemáticos no es habitualmente un proceso lineal y deductivo. Por el contrario, se manifiestan intentos fallidos, ensayos, errores y procedimientos infructuosos que se abandonan. La noción de práctica significativa quiere tener en cuenta el proceso de aprendizaje y diferenciar los intentos que llevan al éxito y persisten – o incluso que persisten siendo erróneos, porque la persona cree que llevan al éxito, de aquellos que son descartados y olvidados.

Asociamos la idea de práctica con la de competencia, esto es, constituyen una *praxis* en el sentido de Morin (1977). Asimismo, el aspecto personal de las prácticas prototípicas significativas se corresponde con la noción de "schème" empleada por Vergnaud (1990): "*organización invariante de la conducta para una misma clase de situaciones dadas*" (p. 136).

Diremos que una práctica personal prototípica es significativa (o que tiene sentido) si, para la persona, esta práctica desempeña una función para la consecución del objetivo en los procesos de resolución de un problema, o bien para comunicar a otro la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas.

3.5. LA NOCIÓN DE INSTITUCIÓN

Como hemos indicado, las situaciones problemáticas y sus soluciones son socialmente compartidas, esto es, están vinculadas a instituciones.

Para nosotros una institución (I) está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas. Puesto que se comparte la misma problemática, las prácticas sociales son compartidas, y suelen tener rasgos particulares, generalmente condicionadas por los instrumentos disponibles en la misma, sus reglas y modos de funcionamiento, por lo que están ligadas a la institución, a cuya caracterización contribuyen. Por ejemplo, en la escuela primaria el cálculo de la mediana se reduce, generalmente, a aplicar la definición, ordenando los datos y tomando el valor central de la serie (o la media de los dos valores centrales) una vez ordenados. Los únicos instrumentos disponibles para los alumnos de este nivel educativo son sus conocimientos de los números y de la relación de orden, así como el conocimiento previo de la definición de media aritmética, y la definición dada de mediana. Prácticas mucho más complejas y variadas tienen lugar en otras instituciones de enseñanza.

Una institución particularmente importante en nuestro modelo es la institución matemática (M), formada por las personas comprometidas en la resolución de nuevos problemas matemáticos. Son los productores del "saber matemático" y en particular podemos incluir en ella a todos aquellos que están realizando investigaciones dirigidas a la producción de nuevo conocimiento matemático. En el caso del objeto "mediana" los investigadores sobre métodos no paramétricos en sus diferentes vertientes (univariantes, multivariantes) o sobre métodos de análisis exploratorio de datos producen nuevos conocimientos sobre la mediana y estadísticos de orden, incluyendo procedimientos, aplicaciones, propiedades y conceptos derivados de la misma.

Otras instituciones interesadas por "situaciones matemáticas" son los "utilizadores" del saber matemático (matemáticos aplicados; instituciones científicas, profesionales o comerciales que precisan del uso de las matemáticas). Para el caso particular del objeto que nos ocupa son innumerables las instituciones que hacen uso del objeto mediana desde el punto de vista de su aplicación a la resolución de problemas diversos.

Desde el punto de vista de la didáctica, estaremos interesados en las instituciones de enseñanza de las matemáticas en sus diversos niveles, los investigadores en educación matemática, diseñadores del currículo, etc. Por ejemplo, en la enseñanza primaria las prácticas asociadas al objeto "mediana" son muy elementales y pueden incluir entre otras:

- Disponer ordenadamente los datos en forma de listado (horizontal y vertical) (lo que permite visualizar la mediana como la posición central de la ordenación).
- Elaborar una tabla simple de frecuencias, generalmente de datos sin agrupar.
- Representar los datos mediante un diagrama de barras; ocasionalmente, aunque rara vez , mediante un diagrama acumulativo de frecuencias.
- Plantear el problema de búsqueda de un valor representativo de una colección de datos de una variable estadística cuantitativa con un valor atípico (con número impar y par de datos).

No serán tratados en este nivel educativo problemas o prácticas más complejas, tales como trabajo con datos agrupados en intervalos de clase, relacionar la mediana con la idea de percentil o decil ni incluso se trabajará con conjuntos numerosos de datos.

Estos ejemplos muestran que, en el seno de cada una de estas instituciones, se realizan prácticas diferentes, que son apropiadas para el fin de lograr la solución del correspondiente campo de problemas y que pueden variar de una institución a otra. Para comprender la naturaleza de la actividad matemática y de los objetos que de ella emergen interesa considerar el conjunto de tales prácticas desde una perspectiva sistémica, con el fin de indagar su estructura o principio organizativo.

Por este motivo en nuestro trabajo (Godino y Batanero, 1994) introdujimos la noción de *sistema de prácticas institucionales*, asociadas a un campo de problemas, *como el conjunto de prácticas significativas compartidas en el seno de la institución I para resolver un campo de problemas C.* Representaremos a este sistema por la notación $P_I(C)$ y señalamos que debido a su carácter social, pueden ser observables y descritas.

Las prácticas sociales dependerán de la institución y del campo o tipo de problemas. Sin embargo, podemos citar ejemplos típicos y comunes como: descripciones de problemas o situaciones, representaciones simbólicas, técnicas o procedimientos de solución, definiciones de objetos, enunciados de proposiciones y argumentaciones[3].

3.6. LOS OBJETOS MATEMÁTICOS COMO EMERGENTES DE SISTEMAS DE PRÁCTICAS

En las secciones anteriores hemos descrito una práctica significativa en la resolución del problema de búsqueda de un representante en un conjunto de datos ordinales (problema 1). También hemos indicado que la práctica – ordenar los datos y tomar el valor central- se ha encontrado eficiente por distintas personas a lo largo del tiempo en diversos tipos de situaciones problemáticas que hemos descrito brevemente.

Problemas, primero prácticos y luego teóricos, han llevado a lo que habitualmente se designa como el concepto de *mediana* y sus progresivas

[3] Una estructuración de estos sistemas de prácticas, propuesta en trabajos posterior por Chevallard (1997), puede ser agrupar por un lado las prácticas de tipo técnico o actuativo (ligadas a las tareas o problemas) que designa como *praxis*, y las prácticas de tipo discursivo (las cuales describen, regulan y justifican las técnicas) y que designa como *logos*. Al sistema de praxis y logos lo designa como praxeología.

generalizaciones. Así, por ejemplo, en vez de interesarnos por el valor de la variable estadística que ocupa el lugar central en la serie ordenada de valores, podríamos interesarnos por el valor que deja por debajo el *r*% de los datos (percentil del *r*%) o *n* décimas partes (decil *n*). Estos estadísticos (de orden) tienen nuevas aplicaciones en análisis exploratorio de datos. Por ejemplo, en la Figura 3.1 reproducimos una salida gráfica obtenida mediante el paquete estadístico *Statgraphics.* Los gráficos de cajas paralelos usan los conceptos mediana, cuartiles, máximo y mínimo para comparar dos distribuciones de datos visualmente (números de calzados de chicos y chicas en un proyecto desarrollado dentro de una asignatura optativa por estudiantes de magisterio, en el ejemplo).

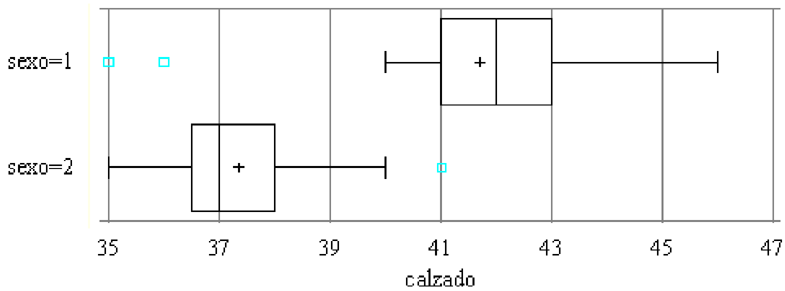


Figura 3.1. Gráficos de cajas paralelos

Al pasar del análisis exploratorio de datos al estudio de la probabilidad, podemos encontrarnos con una variable aleatoria discreta ξ con un número finito o ilimitado de valores x_i, los cuales ocurren con probabilidades p_i, (por ejemplo, la variable número de billetes de lotería que debo comprar hasta que me toque el primer premio, es teóricamente ilimitada). Tanto en el caso de las variables aleatorias discretas como continuas se generaliza sin problemas la idea de mediana como solución de la ecuación F(Me)=1/2, siendo F la función de distribución de la variable aleatoria. También para este caso se diferenciará la determinación en el caso de variables discretas o continuas.

Paralelamente, a la vez que se resuelven nuevos problemas, se extienden las soluciones y se generalizan los conceptos, se analizan y descubren nuevas propiedades o se pone en relación con otros objetos anteriormente definidos. Por ejemplo, una propiedad sencilla de la mediana es que siempre toma un valor comprendido entre los extremos de la variable. Por otro lado, la mediana se puede poner en relación tanto con la idea de valor central (y en consecuencia con media y moda) como con las de distribución, frecuencia acumulada, orden, rango etc. Posteriormente haremos un análisis más detallado de dichas propiedades.

Objeto institucional

En el ejemplo de la mediana es claro que el objeto matemático es un ente abstracto que emerge progresivamente del sistema de prácticas socialmente compartidas, ligadas a la resolución de cierto campo de problemas matemáticos. Tomamos en nuestro trabajo la idea de emergencia de Morin (1977), para quien los productos globales de la actividad de un sistema tienen cualidades propias, que retroactúan sobre las actividades mismas del sistema del que se vuelven inseparables.

En el caso de las matemáticas, unas prácticas particulares que se supone determinan los objetos matemáticos son las definiciones de los mismos o el enunciado de sus propiedades (teoremas, proposiciones). Con frecuencia estas definiciones y proposiciones describen el procedimiento constructivo del mismo (como en el caso de la mediana) o muestran claramente sus propiedades características. Pero, puesto que las prácticas (también las definiciones, proposiciones y teoremas) pueden variar en las distintas instituciones, hemos de conceder al objeto una relatividad respecto a las mismas.

Proponemos por tanto considerar el *Objeto institucional* O_I*: como emergente del sistema de practicas sociales asociadas a un campo de problemas, esto es, un emergente de* $P_I(C)$. Los elementos de este sistema son los indicadores empíricos de O_I.

Esta emergencia es progresiva a lo largo del tiempo. En un momento dado, se da un nombre y se reconoce explícitamente como tal objeto por la institución, pero incluso después de esta etapa sufre, transformaciones progresivas según se va ampliando el campo de problemas asociado. Es clara la variación y ampliación del campo de aplicaciones de la mediana en los últimos años, a partir de que Tukey (1962) publica su artículo pionero sobre análisis exploratorio de datos. En los últimos 40 años el número y rango de aplicaciones de la mediana ha crecido espectacularmente, así como las practicas asociadas con la misma.

Desde un punto de vista filosófico, el objeto institucional puede verse también como signo de la unidad cultural constituida por $P_I(C)$. Los objetos institucionales son los constituyentes del conocimiento objetivo, en el sentido de Ernest (1991).

Hay que destacar también que de un campo de problemas pueden emerger diversos objetos que, como consecuencia, están mutuamente relacionados. Vergnaud (1990) resalta este hecho así como la variedad de situaciones problemáticas en que un mismo concepto es aplicado:

> "Un concepto no toma su significado en un sólo tipo de situaciones y una situación no se analiza con ayuda de un sólo concepto" (p. 167).

Esto le lleva a proponer como elemento de análisis didáctico la noción de campo conceptual. Por otro lado, los mismos objetos institucionalmente reconocidos son fuente de nuevos problemas y pueden ser usados como herramientas en la resolución de otros. (Dialéctica útil-objeto formulada por Douady, 1986).

Con nuestra definición de objeto institucional estamos postulando la existencia (cultural) de distintos objetos, según la institución de referencia, en situaciones donde la concepción absolutista de las matemáticas ve un único objeto. Hemos llegado a esta formulación como consecuencia de los presupuestos pragmáticos que nos sirven de base, y con el deseo de obtener una conceptualización útil para el análisis antropológico de los fenómenos cognitivos y didácticos. Nuestra postura no es aislada, sino que es compartida por otros investigadores. Por ejemplo, Rotman (1988), al analizar la actividad matemática, afirma:

> "El teorema de Euclides 'dado cualquier número primo podemos encontrar otro mayor' no es el mismo que el teorema moderno 'existen infinitos números primos' puesto que, aparte de otras consideraciones, la naturaleza de los numerales griegos hace altamente improbable que los matemáticos griegos pensaran en términos de una progresión infinita de números" (p. 33).

Coincidimos plenamente con este autor, el objeto mediana nos parece único, como consecuencia de un fenómeno de apropiación regresiva de los múltiples “objetos mediana” surgidos a lo largo de la historia. Pero, sin embargo, este objeto cambia y se amplia a lo largo del tiempo.

Objeto personal

Nuestra teorización no se limita al estudio de los objetos institucionales, sino que nos interesamos por la comprensión de los sujetos, en particular por la de los estudiantes en una institución escolar y la forma en que ellos construyen su conocimiento. Desde nuestro punto de vista, el carácter progresivo de la construcción de los objetos en la ciencia tiene su paralelismo en el aprendizaje del sujeto y en la comprensión gradual de nuevas ideas matemáticas.

> "No sólo en sus aspectos prácticos, sino también en los teóricos, el conocimiento emerge de los problemas para ser resueltos y de las situaciones para ser dominadas. Es cierto en la historia de las ciencias y en la tecnología; también es cierto en el desarrollo de instrumentos cognitivos en los niños muy jóvenes" (Vergnaud, 1982, p. 31).

Esto nos lleva a proponer, en el plano personal, la introducción de las nociones de "sistema de prácticas personales" y de "objeto personal": Un *sistema de prácticas personales asociadas a un campo de problemas* está constituido por las prácticas prototípicas que una persona realiza en su intento de resolver un campo de problemas C. Representamos este sistema por la notación $P_p(C)$

Un *objeto personal* O_p es un emergente del sistema de prácticas personales significativas asociadas a un campo de problemas, esto es, un emergente de $P_p(C)$. La emergencia del objeto es progresiva a lo largo de la historia del sujeto, como consecuencia de la experiencia y el aprendizaje. Estos objetos son los constituyentes del conocimiento subjetivo en el sentido de Ernest (1991).

Podemos relacionar la noción de objeto personal (emergente de un sistemas de prácticas) con la de "tipo cognitivo" introducida por Eco (1999) (véase la sección 2.4.4) como "aquello que permite el reconocimiento de algo".

3.7. SIGNIFICADOS INSTITUCIONALES Y PERSONALES DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS

Como hemos indicado, los objetos son nombrados y descritos mediante sus definiciones y enunciado de propiedades, por lo que, a veces, se identifican con dichas definiciones o propiedades características mediante un fenómeno metonímico. Vergnaud (1990) considera, sin embargo, que el significado de un objeto matemático no puede quedar reducido a su mera definición desde un punto de vista didáctico y psicológico:

> "Un concepto no puede reducirse a su definición, al menos si nos interesamos en su aprendizaje y su enseñanza " (p. 135).
>
> "son las situaciones las que dan sentido a los conceptos matemáticos, pero el sentido no está en las situaciones ni en las representaciones simbólicas. Es una relación del sujeto con las situaciones y los significados. Más precisamente, son los esquemas evocados en el sujeto individual por una situación o un significante lo que constituye el sentido de esta situación o este significante para el individuo" (p. 158).

Partiendo de estas ideas, en nuestra primitiva teorización (Godino y Batanero, 1994) relacionamos el significado de los objetos matemáticos con las prácticas (operativas y discursivas) que realiza un sujeto en relación con dichos objetos o las realizadas en el seno de las instituciones. Así, respecto al objeto mediana:

1) En la "escuela elemental" encontramos que los currículos proponen:
    - la definición, en el caso más simple, empleando una notación sencilla;
    - algunos ejemplos de aplicación, limitados al cálculo manual o con calculadora de la mediana de un conjunto de datos;
    - discriminación respecto de otras medidas de tendencia central (media, moda).
2) En la "escuela secundaria" (o en la universidad), como puede verse en los textos correspondientes, el rango de cosas que se dicen y hacen con la mediana se amplía al enunciado y demostración de algunas propiedades y a su aplicación a situaciones problemáticas más realistas y complejas. Así, se calcula la mediana con datos agrupados, se introduce la noción de mediana de una distribución de probabilidad, se la relaciona con otros estadísticos de orden o con la dispersión, se distingue entre mediana de la muestra y mediana de la población, etc.
3) Los científicos emplean la mediana en el análisis de datos ordinales o en muestras pequeñas, así como cuando no se tiene una hipótesis clara sobre el tipo de distribución que siguen los datos, o este no es esencial. Lo importante en estas instituciones no son las propiedades matemáticas o definiciones de la mediana, sino su uso como herramienta de análisis y toma de decisiones en cierto tipo de situaciones problemáticas.

En estos ejemplos vemos que el término "mediana" es usado para referirse a unidades culturales (o institucionales) diferentes. Esto nos lleva a proponer el *significado de un objeto institucional O_I* como el sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge O_I en un momento dado[4]. Se trata de un constructo relativo a la institución y dependiente estocasticamente del tiempo. Simbólicamente, para un tiempo t y una institución I:

$$S(O_I) = P_I(C)$$

Si I = M, hablaremos del significado matemático de un objeto.

Esta noción de significado (sistémico) permite introducir en la problemática epistemológica y didáctica el estudio de la estructura de los sistemas de prácticas sociales de los que emergen los objetos matemáticos, así como de su evolución temporal y dependencia institucional. El análisis semiótico de los objetos institucionales incluye situaciones problemáticas y los objetos que intervienen en las actividades de resolución correspondientes.

Dimensión subjetiva del significado

En correspondencia con la noción de significado de un objeto institucional interesa introducir la noción de *significado de un objeto personal O_p* como sistema de prácticas personales de una persona *p* para resolver el campo de problemas del que emerge el objeto O_p en un momento dado. Depende, por tanto, del sujeto y del tiempo estocásticamente; se desarrolla progresivamente a medida que el sujeto se enfrente a tipos de problemas cada vez más generales.

Simbólicamente, $S(O_p) = P_p(C)$

En el caso del significado personal, una parte es observable, aunque no lo son directamente las prácticas constituidas por acciones interiorizadas.

[4] En realidad con esta definición nos referíamos en Godino y Batanero (1994) al significado enciclopédico o sistémico del concepto. Posteriormente hemos ampliado esta teoría y considerado otros tipos de significados elementales que describiremos en el capítulo 7.

3.8. SÍNTESIS E IMPLICACIONES

Las principales nociones y supuestos sobre la actividad matemática presentadas en este capítulo son las siguientes:

- Partimos de la noción de situación-problema como primitiva y de la idea que la variación sistemática de las variables que intervienen en las situaciones-problema da lugar a diferentes tipos y campos de problemas. La génesis del conocimiento personal se produce para nosotros como consecuencia de la interacción del sujeto con tipos de problemas, mediatizada por los contextos institucionales en que tiene lugar dicha actividad.
- Proponemos dos unidades primarias de análisis para estudiar los procesos cognitivos: la *práctica significativa*, y el *significado sistémico de un objeto*. Para ambas unidades postulamos dos dimensiones interdependientes: personal e institucional.

  La práctica significativa se concibe como una *forma expresiva situada*, implica una situación-problema, un contexto institucional, una persona (o una institución) y los instrumentos semióticos que mediatizan la acción.

Respecto de la naturaleza de los objetos emergentes de los sistemas de prácticas son compatibles posiciones aparentemente contrapuestas. Desde un punto de vista institucional el "objeto emergente" sería una metáfora cómoda para hablar de la globalidad y estructura de los sistemas de prácticas que permiten resolver ciertos tipos de problemas. Se materializa en el léxico institucional y en definiciones generales que permiten el reconocimiento de las situaciones de uso de tales técnicas.

Pero esto no implica rechazar que en la mente de los sujetos se construyen esquemas cognitivos (objetos personales) que se pueden considerar como los responsables de que los sujetos sean capaces de reconocer las nuevas situaciones como pertenecientes a un cierto tipo, y aplicarles los procedimientos pertinentes para resolverlas.

A título de ejemplo, en la figura 3.2, mostramos esquemáticamente la diversidad de objetos y significados asociados a un "objeto matemático", el "concepto de 1/2".

En dicho esquema se representa el relativismo socio-epistémico que hemos atribuido a las matemáticas, por el papel que asignamos a la variedad de sistemas de prácticas y objetos emergentes ligados a distintos contextos de uso. Esta posición contradice aparentemente el carácter absoluto y universal que habitualmente se atribuye a los objetos matemáticos en la "institución matemática". La solución que sugiere el esquema de la figura 3.2 es que el matemático identifica una misma estructura formal (gramatical, en el sentido propuesto por Wittgenstein) en la variedad de objetos y sistemas de prácticas, la cual considera como "el concepto matemático 1/2": El número 1/2 es un elemento del cuerpo ordenado y completo de los números reales.

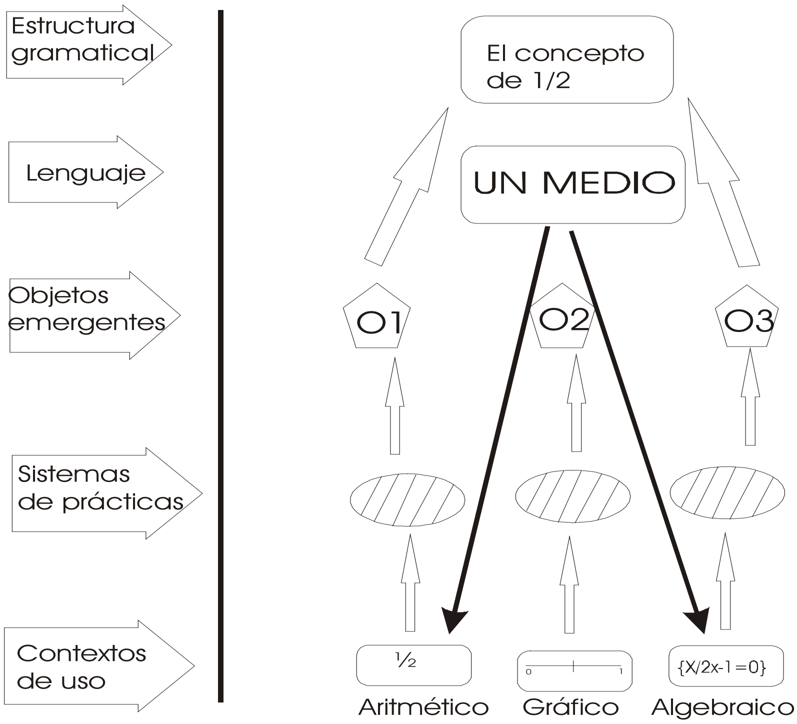


Figura 3.2: Objetos y significados asociados al concepto 1/2

Algunas consecuencias de estas primeras nociones, que pueden ser de interés para la investigación en didáctica de las matemáticas, son las siguientes:

- La investigación didáctica debería centrar la atención de modo preferente en el estudio de las relaciones entre los significados institucionales de los objetos matemáticos y los significados personales construidos por los sujetos. Los procesos de enseñanza y aprendizaje tienen lugar en diversas instituciones en las cuales el conocimiento matemático adopta significados específicos que condicionan dichos procesos. Sin duda existen procesos mentales que condicionan el aprendizaje de los estudiantes. Sin embargo, el centro de atención de la investigación didáctica no debería ser sólo las mentes de los estudiantes, sino también los contextos culturales e institucionales en que tiene lugar la enseñanza.

- La naturaleza sistémica del constructo que hemos llamado *significado de un objeto* nos permite orientar el proceso de selección de las situaciones de enseñanza y evaluación, usando la analogía del muestreo en estadística. Los significados institucionales juegan el papel de universo de referencia del cual deben seleccionarse muestras representativas para la enseñanza y evaluación.

Veremos en los próximos capítulos que el sistema teórico deberá ser enriquecido con nuevos elementos que permitirán articular diferentes aproximaciones cognitivas y epistemológicas. En el capítulo 9 desarrollamos las consecuencias del marco teórico emergente para formular o para reorientar algunas cuestiones de investigación en didáctica de las matemáticas.

Capítulo 4

COMPONENTES DE LOS SISTEMAS DE PRÁCTICAS: ELEMENTOS DE SIGNIFICADO

4.1. Introducción
4.2. Una interpretación del triángulo epistemológico
4.3. Situaciones - problemas
4.3. El lenguaje matemático
4.4. Las acciones del sujeto ante tareas matemáticas
4.5. Conceptos
4.6. Propiedades
4.7. Argumentos
4.9. Síntesis e implicaciones

4.1. INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior hemos introducido la idea de "significado de un objeto" (concepto, proposición, teoría) como entidad compuesta (en consonancia con ideas de Putnan, 1975 o Bunge, 1985), que incluye el conjunto de prácticas significativas relacionada con un cierto campo o tipo de problemas. Podríamos interpretar la noción de significado presentada en dicho capítulo como *enciclopédico,* puesto que incluimos en el mismo la 'enciclopedia de usos' (Puig, 1994) del término o expresión que denota el objeto –bien en sentido personal o institucional. Cada posible uso del mismo término sería una de las prácticas significativas englobadas en su significado.

Para efectos de análisis de protocolos, respuestas a tareas u otro tipo de datos en una investigación, o de un proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, interesa, sin embargo descomponer este significado global en entidades más elementales. Aunque el significado de un objeto matemático es una entidad compuesta, en un momento dado, realizamos un tipo de práctica particular, por lo que se establece relación o función entre una expresión y un contenido que puede no ser sistémico.

Por otro lado, no sólo las entidades conceptuales requieren interpretación en los procesos comunicativos puestos en juego en la educación matemática, sino que también los propios medios expresivos y las situaciones problemáticas desencadenan interpretaciones por parte de los destinatarios de los mensajes en un momento y circunstancias dadas. En estos casos, el significado tiene un carácter local y sincrónico: Es el contenido al que se refiere el emisor de una expresión, o el contenido que interpreta el receptor que se refiere el emisor. En otras palabras, lo que quiere decir uno, o lo que entiende el otro.

En otra serie de trabajos sobre la noción de significado (Godino y Recio, 1998; Godino, 1999a y b) hemos tratado de analizar los diferentes tipos de prácticas significativas con relación a un objeto matemático, describiendo y diferenciando diferentes categorías de *elementos en el significado sistémico de un objeto matemático.* Partiendo en dichos trabajos de una interpretación personal de los triángulos epistemológicos (Steinbring, 1997; Ogden y Richard, 1923) comenzamos por identificar tres tipos básicos de significados elementales a los que posteriormente hemos ido añadiendo otros hasta llegar a la formulación contenida en nuestros últimos trabajos (Godino, 1999a y b;, Godino, 2002; Godino, Batanero y Roa, 2002).

Esta diferenciación de elementos en el *significado sistémico del objeto* es opuesta y complementaria del carácter unitario del objeto. Pensamos que puede contribuir a enfocar desde un punto de vista semiótico la problemática del diseño de situaciones didácticas y la evaluación de los conocimientos del sujeto. En lo que sigue describimos estas ideas, comenzando con nuestra interpretación del triángulo epistemológico.

4.2. UNA INTERPRETACIÓN DEL TRIÁNGULO EPISTEMOLÓGICO

En el capítulo 2 hemos descrito la forma en que diversos autores han modelizado la relación entre los signos usados para codificar el conocimiento y los contextos que sirven para establecer el significado del mismo. También hemos visto que esta relación ha sido modelizada por diversos autores mediante esquemas de tipo triangular, entre los que destacan los propuestos por Frege, Peirce, Ogden y Richards. Steinbring

(1997) denomina *triángulo epistemológico* a esta modelización, incluyendo en ella el *concepto*, *signo/símbolo* y *objeto/contexto de referencia*.

Por otro lado, en la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud (1982), un concepto es una tripleta formada por

> "el conjunto de situaciones que hacen significativo el concepto, el conjunto de invariantes que constituyen el concepto y el conjunto de representaciones simbólicas usadas para presentar el concepto, sus propiedades y las situaciones a las que se refiere" (p. 36)

Basados en estas dos ideas (triángulo epistemológico y teoría de los campos conceptuales) nuestra primera clasificación incluyó los siguientes tipos de elementos en el significado sistémico de un objeto matemático:

- *Situaciones-problemas*, aplicaciones, tareas, que inducen actividades matemáticas.
- *Lenguaje*[1]*,* incluyendo en el mismo todo tipo de representaciones materiales ostensivas usadas en la actividad matemática (términos, expresiones, símbolos, gráficos, tablas, diagramas).
- *Generalizaciones,* ideas matemáticas, abstracciones (conceptos, proposiciones, procedimientos, teorías).

En el trabajo matemático, tanto las generalizaciones como las situaciones-problemas vienen dados por sistemas notacionales y en general por lenguaje que describe sus propiedades características. Ambas entidades son inseparables del lenguaje que le da corporeidad, pero que no es identificable con ellas:

> "El hecho enunciado debe ser distinguido del enunciado del mismo" (Searle, 1997; p. 21).

Concebimos las generalizaciones matemáticas y las situaciones-problemas en términos similares a como describe Freudenthal (1982) los *noumena* y *phainomena*. Para este autor los objetos matemáticos son noumena, o sea, objetos de pensamiento (ideas) como los números, por ejemplo. Los conceptos matemáticos, en general las estructuras matemáticas sirven para organizar los fenómenos tanto del mundo concreto como del matemático. Nosotros consideramos que el estudio matemático de tales fenómenos pone a las personas ante situaciones-problemáticas, y

[1] Puesto que la palabra "representación" tiene un sentido particular tanto en didáctica, como en las teorías de significado, hemos preferido usar un término diferente. Como veremos en el capítulo 5, nuestro modelo amplia notablemente la noción de representación mediante la noción de función semiótica.

de aquí la conexión que establecemos entre ambas nociones.

Las ideas de Dörfler (1991) nos sirven también de punto de partida para interpretar las generalizaciones matemáticas (noumena) como los productos resultantes de los procesos de generalización de las acciones de los sujetos ante cierta clase de situaciones-problemas. No se trata, por tanto, de meras abstracciones empíricas de los rasgos comunes a objetos o situaciones, sino de generalización de esquemas o invariantes de sistemas de acciones, así como de las condiciones de realización y los resultados de tales acciones, apoyados por el uso de sistemas de signos y lenguaje.

Progresivamente hemos ido desarrollando estas ideas. Además de los tres tipos de elementos citados, nos pareció necesario tener en cuenta explícitamente las acciones de los sujetos en la resolución de problemas (algoritmos, estrategias, procedimientos) y los argumentos empleados para justificar, tanto las acciones, como las propiedades de los objetos y la solución de los problemas. Todos estos tipos de elementos son objetos explícitos de enseñanza para cada objeto matemático y como tal, no sólo es necesario analizar su naturaleza y características, así como la mejor forma de introducirlos en la enseñanza, sino que también podemos encontrar dificultades y errores de los alumnos para cada uno de ellos. Nos ha parecido también importante diferenciar entre las definiciones de los objetos matemáticos y otro tipo de elementos teóricos (propiedades, relaciones con otros objetos), puesto que las definiciones se toman con frecuencia como caracterizaciones del objeto.

A continuación describimos y ejemplificamos estas ideas para el caso de la mediana.

4.3. SITUACIONES-PROBLEMAS

Como hemos expuesto en el capítulo 3, nuestro modelo teórico parte de la idea de situación-problema como noción primitiva e interpreta esta noción en un sentido amplio, incluyendo tanto problemas simples como situaciones complejas y tanto problemas puramente matemáticos como extramatemáticos.

En nuestro desarrollo de las primitivas ideas del significado de un objeto como conjunto de prácticas, hemos incluido los problemas y campos de problemas de donde emerge un objeto como parte de su significado y cada uno de dichos problemas y situaciones como un elemento de significado. Ello concuerda con nuestra visión del significado de un objeto como conjunto de prácticas significativas asociadas al mismo, puesto que el planteamiento de problemas es una práctica común en la actividad matemática.

En dicho capítulo también hemos presentado abundantes ejemplos de problemas asociados al objeto mediana. Posteriormente aparecerán otros ejemplos en el resto del trabajo. Consideramos suficiente la descripción de este tipo de elementos del significado de un objeto matemático, por lo que no ampliamos nuestro análisis sobre el mismo. Sí conviene tener en cuenta que los problemas "no vienen solos", sino que se agrupan en tipos, clases o campos de problemas, de modo que el paso de un tipo puntual a otro más amplio es el determinante del progreso o avance del conocimiento matemático, tanto individual como institucional.

4.4. EL LENGUAJE MATEMÁTICO

Para resolver los problemas matemáticos, para generalizar su solución o para describirlos a otra persona necesitamos usar elementos del lenguaje, tales como términos, expresiones, notaciones, gráficos, etc.. Así, en el capítulo 3, en la descripción de ejemplos de problemas asociados al objeto mediana y de algunas de las prácticas que empleamos en su resolución el apartado anterior hemos usado palabras como *mediana, estimador, media, variable, escala de medida, orden, ordinal, distribución, valor atípico, simétrica / asimétrica.*

Asimismo, la notación simbólica, nos permite representar tanto objetos abstractos (en el ejemplo 1 del capítulo 3 *Me* representa a la mediana; el símbolo de igualdad, los numerales, que representan números) como situaciones concretas (los numerales también remiten a sueldos concretos de trabajadores imaginarios).

Otros útiles de carácter lingüístico son las disposiciones tabulares (las tablas de frecuencia o las tablas de doble entrada en estadística serían un caso típico), gráficos (todos los gráficos estadísticos serían asimismo ejemplos prototípicos), grafos, esquemas, ilustraciones, etc. que formarían parte del lenguaje gráfico.

Es frecuente presentar los datos estadísticos en una *tabla de frecuencias*. En este caso, incluso en el más sencillo (datos discretos y con un número impar de datos), se suele calcular las frecuencias acumuladas para hallar la mediana. El cálculo de la mediana se suele hacer en este caso gráficamente a partir del diagrama acumulativo de frecuencias (véase la Figura 4.1).

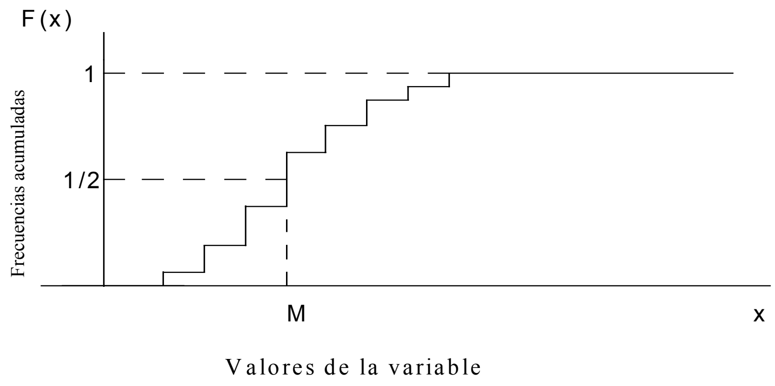


Figura 4.1. Cálculo de la mediana a partir de las frecuencias acumuladas en una variable discreta. Número impar de datos

El gráfico tiene, en este caso, una función instrumental. Una vez realizada la gráfica, para calcular la mediana, se busca en el diagrama acumulativo el valor x tal que su frecuencia acumulada es igual a $n/2$, o bien, que la frecuencia relativa acumulada es igual a ½. En general, la ecuación F(x) = 1/2 no tiene solución, puesto que la función F(x) varía por saltos.

Si el número de datos es impar, se considera como valor de la mediana el valor x_i tal que:

$F(x_i - 0)<1/2<F(x_i + 0)$,

es decir tal que $n_1 + n_2 + ... + n_{i-1} < n/2 < n_1 + ... + n_i$

Para un número impar de datos el valor 1/2 corta al diagrama acumulativo precisamente en el salto que tiene la curva de distribución para uno de los valores de la variable. Ello es debido a que, en este caso, todos los valores de la variable comprendidos entre el lugar n_{i-1} y n_i son iguales a x_i y uno de ellos ocupa exactamente el lugar $n/2$. Por tanto este valor x_i cumple la definición de mediana y es el único valor que la cumple (Calot, 1974).

Vemos en este ejemplo que las expresiones y símbolos desempeñan frecuentemente el papel de "sistemas de representación", esto es de estar en lugar del objeto matemático, de los datos del problema o de la situación real a que se refiere dicho problema. Por otro lado, el lenguaje no sólo tiene una valencia representacional sino que también es instrumento de la actividad matemática.

Además, en nuestra modelización, este papel de representación no es exclusivo del lenguaje. Como veremos en el capítulo 7 al introducir la idea de función semiótica y sus tipos, también las abstracciones matemáticas, las situaciones-problemas, las acciones y los argumentos pueden estar en lugar de, o representar otras entidades. Es por ello que conscientemente preferimos reservar la palabra *representación* para el original (o expresión) de la función semiótica, usando aquí el término lenguaje.

El papel relevante del lenguaje - sistemas de signos, dados por la cultura- como mediadores entre los estímulos del medio y las respuestas del sujeto es resaltado por Vygotsky (1934), quien presenta, asimismo, la actividad como elemento esencial de su teoría del aprendizaje. Estos sistemas de signos no sólo tienen una función comunicativa sino un papel instrumental que modifica al propio sujeto que los utiliza como mediadores. El análisis semiótico de la actividad matemática realizado por Rotman (1988) apoya también la íntima interdependencia entre el pensamiento y el lenguaje matemático:

> "Los números son objetos que resultan de una amalgama de dos actividades, pensar (imaginar acciones) y simbolizar (hacer marcas), las cuales son inseparables: los matemáticos piensan sobre marcas que ellos mismos han imaginado en una existencia potencial" (Rotman, 1988, p. 32)

En los ejemplos presentados, y en general, en un texto matemático, todos estos elementos vienen dados en forma escrita o gráfica pero en el trabajo matemático pueden usarse otros registros (oral, gestual; por ejemplo, en el caso de un alumno sordo que utiliza la lengua de signos, o áptico en el caso de un ciego).

4.5. LAS ACCIONES DEL SUJETO ANTE TAREAS MATEMÁTICAS

Para resolver los problemas propuestos se pueden aplicar diversas operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, procedimientos y estrategias que llegan a automatizarse, se hacen específicos del tipo de problema y se convierten en objeto de enseñanza. En los apartados anteriores hemos visto dos algoritmos específicos de cálculo, para resolver los problemas planteados según los datos estén o no agrupados:

- *Caso de número impar de datos no agrupados:* Se ordenan de los datos. A continuación, se identifica el valor central *Me* en la serie ordenada. Este valor de la variable tiene la propiedad que la mitad tiene un valor menor o igual que *Me*, y la otra mitad mayor o igual que *Me*.

- *Caso de un número impar de datos agrupados en una tabla de frecuencia en una variable discreta.* Se determinan las frecuencias acumuladas en la tabla de frecuencias relativas. Se representa gráficamente el diagrama acumulativo de frecuencias F(x). Se busca gráficamente la solución de la ecuación F(x) = ½. Si no hay un valor exacto (lo que es el caso habitual) se toma el valor x_i tal que $F(x_i - 0)<1/2<F(x_i + 0)$.

Estos son sólo algunos de los posibles algoritmos de cálculo, ya que pueden presentarse otras situaciones, cada una de las cuales tiene su propia técnica de resolución:

- *Caso de número par de datos no agrupados.*
- *Caso de un número par de datos agrupados en una tabla de frecuencia en una variable discreta.*
- *Caso de datos continuos agrupados en una tabla de frecuencias.*
- *Cálculo a partir de datos dados en un gráfico del tallo y hojas.*
- *Caso de datos introducidos en un ordenador cuando se tiene un programa de cálculo disponible.*

Cada una de estas técnicas aporta elementos diferenciados en el significado del objeto mediana, que también dependerá de los instrumentos disponibles en la resolución. Consideremos el siguiente problema propuesto para ser resuelto con la ayuda del programa estadístico Statgraphics y la respuesta escrita de una alumna.

> **Problema 2:** En el fichero MMF20 (referido a datos sobre capacidad lectora de niños de 6 años), ¿Cuál es el número mediano de errores?

Respuesta: "*He usado la opción STATS del menú principal del programa y luego he elegido DESCRIPTIVE METHODS y PERCENTILES. Puse el nombre de la variable en la ventana de entrada de datos, escribiendo: MFF20.errorpalab. Después puse 50 en el cuadro de porcentaje y obtuve 5. El número mediano de errores de los niños es 5*".

Tras esta concisa respuesta, podemos seguir el procedimiento de la estudiante, que resolvió correctamente el problema, eligiendo el método estadístico adecuado (cálculo de percentiles). Vemos que la alumna no necesita conocer el algoritmo de cálculo de la mediana ni de los percentiles, en el cual debemos diferenciar entre datos agrupados y no agrupados y entre número par e impar de datos. El algoritmo se ha "encapsulado", transformándose en una herramienta disponible (una opción del programa), un operador que se aplica a un vector de datos (la variable *errorpalab*) y asigna a cada rango (en este caso 50) un valor numérico de la variable.

Se añaden los siguientes pasos que no existen en el algoritmo tradicional:

1. Elegir DESCRIBE, dentro del menú, reflexionando que necesitamos un método descriptivo de análisis de datos.
2. Escoger PERCENTILES, dentro de ONE VARIABLE NUMERICA que supone otros dos niveles de menús de opciones y requiere la identificación del tipo de variable (numérica), número de variables (una) y el procedimiento a usar (percentiles) dentro de los métodos descriptivos.
3. Identificar la variable *MFF20.errorpalab* dentro del fichero y asignarla en la ventana de entrada de datos. Requiere un conocimiento de la forma de operar el programa y la interpretación de la estructura del fichero de datos, así como relacionar lo anterior con el enunciado del problema.
4. Identificar el rango (50), es decir el valor necesario de los parámetros para ejecutar correctamente el procedimiento e identificar la mediana como percentil del 50 por ciento.
5. Interpretar los resultados.

Esta actividad es muy diferente de la realizada en los otros dos algoritmos presentados anteriormente. Añade nuevas propiedades y relaciones entre los conceptos, pero también suprime otras. Por ejemplo, en la solución dada, la alumna no utiliza explícitamente la idea de orden ni tampoco la de frecuencia acumulada o su representación gráfica.

4.6. CONCEPTOS[2]

En las descripciones anteriores de la actividad matemática hemos visto que el sujeto, al resolver el problema, no sólo realiza acciones sobre los símbolos u objetos materiales con los que opera, sino que en dicha actividad necesita evocar diferentes conceptos o nociones matemáticas que previamente conoce y en los que se apoya para resolver el problema, mediante sus definiciones o descripciones características. Ejemplos de conceptos (interpretados aquí como reglas) empleados en la resolución de los problemas anteriores son:

- En el problema 1 se usan las nociones de orden, valor central, variable, distribución, conjunto de datos y representante de un conjunto de datos.
- En el cálculo de la mediana a partir de una tabla de datos discretos agrupados se usan las nociones de orden, frecuencias, frecuencia acumulada, polígono acumulativo, desigualdad, ejes de coordenadas, variable, valor de la variable, solución de una desigualdad, valor central.
- En la solución del problema 3 la alumna ha usado la idea de mediana, percentil y sus rangos, tanto por ciento, variable numérica, fichero de datos y método descriptivo.

Estos y otros conceptos contribuyen progresivamente a la emergencia del *objeto mediana* como generalización de las acciones realizadas y solución de los problemas propuestos. En consecuencia, surgen diferentes definiciones que progresivamente contribuyen a caracterizar al nuevo objeto que surge como resultado de la realización de ciertos tipos de acciones o prácticas significativas en la resolución de un cierto tipo de problemas. Ejemplos de sucesivas definiciones de la mediana que se encuentran en los libros de texto son los siguientes:

- *Definición como valor central: "*La mediana de una distribución es el valor que ocupa la posición central al ordenar los datos"[3].
- *Definición en función del número de datos mayor o menor que la mediana. "*La mediana de un conjunto de datos es un valor tal que la

[2] Los conceptos y propiedades son interpretados aquí como propone Wittgenstein, como "reglas gramaticales sobre el uso de símbolos y expresiones" para describir las situaciones y las acciones que realizamos ante dichas situaciones (Baker y Hacker, 1985, p. 285). Tales reglas cambian según la fenomenología, los juegos de lenguaje, las formas de vida, las instituciones. Otro uso habitual de 'concepto' es como sistema heterogéneo de objetos (situaciones, invariantes operatorios, representaciones) que se puede sustituir con ventaja por la noción de "sistema de prácticas". D'Amore (2001) estudia de manera exhaustiva la complejidad de la noción de concepto.

[3] Matemáticas 3º ESO. Casals, p. 270.

mitad de los datos son menores o iguales que él y la otra mitad son mayores o iguales”[4].

- *Definición combinando las dos anteriores:* “La mediana es el valor de la variable estadística que divide en dos efectivos iguales a los individuos de la población, supuestos ordenados por valor creciente del carácter”.[5].
- *Definición a partir de la curva de distribución:* “La mediana M es el valor de la variable estadística, tal que la ordenada de la curva de distribución es igual a ½” [4].

Así pues, no hay una única definición de mediana, sino diversas, adaptadas a las situaciones problemáticas, intenciones y herramientas semióticas disponibles en cada circunstancia. Cada definición proviene de un sistema de prácticas específicas y por tanto involucra una clase de situaciones problemáticas y lenguaje específico que puede dar lugar a un significado idiosincrásico (o sentido).

4.7. PROPIEDADES O ATRIBUTOS

Hacemos notar que, como en el caso de la mediana, es frecuente que libros o autores usen diferentes definiciones para un mismo objeto matemático, cada una de las cuales enfatizan propiedades específicas del mismo. Así, en las definiciones anteriores, podemos ver reflejadas las siguientes propiedades o atributos de la mediana, algunos de los cuales lo relacionan con otros conceptos o propiedades ya conocidas:

A1: Si los datos son ordinales la mediana existe, mientras que la media no tiene sentido.

A2: En el cálculo de la mediana no tenemos en cuenta los valores concretos de la variable, sino sólo su orden relativo.

A3: En el caso de valores atípicos, la mediana es mejor representante de los datos que la media, porque no es sensible a los valores extremos.

A4: La mediana es el valor de la variable tal que su frecuencia acumulada es exactamente igual a N/2, siendo N el número de datos y su frecuencia relativa acumulada es igual a ½.

[4] Matemáticas 3º ESO. Guadiel, p. 144.
[5] Calot (1988), p. 56

A5: La mediana puede no coincidir con ninguno de los datos originales, e incluso puede no pertenecer al mismo conjunto numérico al que pertenecen los datos.

Una vez que un objeto matemático se define y entra a formar parte de las herramientas matemáticas disponibles para la resolución de problemas, se convierte en objeto de estudio en sí mismo, para relacionarlo con otros objetos. En este estudio surgen nuevas propiedades, como, por ejemplo, en el caso de la mediana:

A7: La mediana es una medida de posición central, porque nos indica la tendencia de los datos.

A8: La mediana es el percentil del 50% ya que deja por debajo al 50% de los datos. De la misma forma la mediana es el segundo cuartil, porque deja por debajo dos cuartas partes de los datos.

A9: La mediana no es una operación numérica en el conjunto de datos dados. No tiene tampoco elemento neutro ni propiedad asociativa, aunque sí propiedad conmutativa.

A10: La mediana conserva los cambios de escala y origen que se efectúen a los datos.

A11: La suma de los valores absolutos de las desviaciones de los datos es mínima respecto a la mediana.

En los ejemplos anteriores vemos que las propiedades o atributos se refieren a condiciones de realización de las acciones, a características específicas de las situaciones y relaciones entre objetos. Cada propiedad de un objeto matemático lo relaciona con otros diferentes y contribuye al crecimiento del significado del objeto en cuestión. Asimismo, se plantea el problema de selección y secuenciación de las propiedades de un objeto que deben ser enseñadas en cada nivel educativo y qué tipo de situaciones problemas ponen en juego las propiedades.

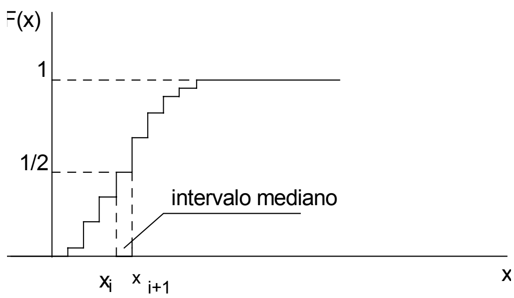
4.8. ARGUMENTOS

Finalmente, todas estas acciones y objetos se ligan entre sí mediante argumentos o razonamientos que se usan para comprobar las soluciones de los problemas, explicar y justificar la solución, justificaciones que pueden ser deductivas, o de otro tipo (Recio y Godino, 2001).

Por ejemplo, en los libros de texto encontramos una variedad de tipos de argumentos en el tema dedicado a la mediana. En el ejemplo 1 presentado en el capítulo 3 se usa la *comprobación de ejemplos* como técnica de argumentación para justificar el hecho de que en el caso de valores atípicos la mediana es mejor representante de los datos que la media.

En otros casos se usa la representación gráfica como elemento validativo, como en el ejemplo siguiente, para mostrar el caso de indeterminación de la mediana:

Ejemplo 2. *"Si uno de los valores x_i corresponde a $F(x_i) = 1/2$ lo que ocurre solamente si el total n de la población es par la mediana está indeterminada entre los valores x_i y x_{i+1}, El intervalo (x_i, x_{i+1}) se denomina mediano"* (Calot, 1988, p.57).



Determinación del intervalo mediano

La forma más característica de validación en matemáticas es de tipo deductivo y esta es la más extendida en los libros de nivel universitario. Por ejemplo en el libro de Calot (1974, pg. 61) podemos encontrar una demostración deductiva de que es respecto a la mediana que la suma de desviaciones absolutas de los datos tiene su mínimo. Este tipo de demostraciones es altamente especializado, hace uso abundante de los símbolos y convenios, así como de las definiciones y propiedades de los objetos matemáticos.

Este tipo de argumentación se completa o sustituye, dependiendo del nivel educativo, por otras como las mostradas, o bien por la búsqueda de contraejemplos, generalización, análisis y síntesis, simulaciones con ordenador, demostraciones informales, etc.

4.9. SÍNTESIS E IMPLICACIONES

Los ejemplos anteriores no han agotado la variedad de objetos elementales que forman parte del significado sistémico del objeto matemático mediana. Tan sólo hemos querido mostrar algunos ejemplos de la rica pluralidad de elementos posibles en este significado, agrupándolos en seis tipos o categorías funcionales.

Los seis tipos de objetos descritos aparecen asociados a cualquier otro objeto matemático, no sólo de un concepto, sino de una representación-significado del histograma- de un problema o campo de problemas –significado de los problemas de extremos de una función- de un procedimiento –significado del análisis de la varianza- de una propiedad o proposición –significado del teorema de Thales o de un tipo de argumentación – significado de la demostración por inducción completa. El modelo es- por tanto- general y recursivo.

Estos seis tipos de elementos que se ponen en juego en la actividad matemática, son los constituyentes primarios de otros objetos más complejos u organizaciones matemáticas, como los sistemas conceptuales, teorías, etc. Las entidades lingüísticas tienen un papel representacional – se ponen en lugar de las restantes- y también instrumental, por lo que deben contemplarse además como instrumentos de la actividad matemática.

Las situaciones-problemas matemáticos promueven y contextualizan la actividad matemática, y junto con las acciones constituyen el componente praxémico (o fenomenológico) de las matemáticas, por lo que podemos considerarlos como *praxis* según propone Chevallard (1997). Los otros tres componentes (conceptos-definiciones, proposiciones, argumentaciones) desempeñan un papel normativo en las matemáticas. Son el resultado de una actividad reflexiva y regulativa de la praxis; y constituyen el componente teórico o discursivo (*logos*).

Este agrupamiento de las entidades matemáticas en praxis y logos no supone su independencia mutua. El lenguaje está presente de manera intrínseca y constitutiva tanto en la praxis como en el logos; el logos encuentra su razón de ser en la praxis y ésta se desarrolla y rige por el logos.

El modelo ontológico que hemos descrito sitúa al lenguaje, en sus diversas manifestaciones, en el centro de atención de la didáctica, pero sin perder de vista la actividad matemática y los objetos culturales no lingüísticos emergentes de esa actividad. Los sistemas de prácticas (operativas y discursivas) que identificamos en el capítulo 3 continúan siendo objetos teóricos esenciales en el análisis de la cognición matemática. La nueva tipología de objetos aporta nuevas herramientas para operativizar tales sistemas de prácticas.

Capítulo 5

COMPETENCIA Y COMPRENSIÓN MATEMÁTICA

5.1. Introducción
5.2. La comprensión en Didáctica de la Matemática.
    5.2.1. Comprensión instrumental y relacional
    5.2.2. Actos y procesos de comprensión
5.3. Elementos para un modelo de la comprensión
    5.3.1.Dimensión personal e institucional
    5.3.2. Carácter sistémico y dinámico
    5.3.3. Acción humana e intencionalidad
5.4. Relación entre comprensión y competencia
5.5. Evaluación de la comprensión
    5.5.1. Problemática metodológica de la evaluación
    5.5.2. Validez y fiabilidad del proceso de evaluación
5.6. Síntesis e implicaciones

5.1. INTRODUCCIÓN

Una vez introducidas las ideas básicas de objeto matemático y significado sistémico de un objeto matemático, así como descritos los componentes elementales de este significado, estamos en condiciones de esbozar nuestra teoría de la comprensión matemática.

El término 'comprensión' tiene diversas interpretaciones, dependiendo del contexto, aunque predomina el enfoque psicológico, que enfatiza su faceta mental. Esta visión es abiertamente contestada por Wittgenstein:

> "¡No pienses ni una sola vez en la comprensión como 'proceso mental'! -Pues ésa es la manera de hablar que te confunde... En el sentido en el que hay procesos (incluso procesos mentales) característicos de la comprensión, la comprensión no es un proceso mental." (Wittgenstein, 1953, Investigaciones filosóficas, p. 155)

Asimismo, Vygotsky (1934) sugiere la prioridad analítica y genética de los factores socioculturales que influyen en los procesos psicológicos, Bruner (1990) propone una *psicología cultural* y Chevallard (1992) su *antropología cognitiva y didáctica*.

De acuerdo con estas tendencias, así como con los planteamientos expuestos en los capítulos anteriores, para nosotros la comprensión deja de tener un carácter absoluto y está además condicionada por los contextos institucionales.

El problema de la comprensión está íntimamente ligado a cómo se concibe el propio conocimiento matemático. Los términos y expresiones matemáticas denotan entidades abstractas, cuya naturaleza y origen tenemos que explicitar para poder elaborar una teoría útil y efectiva sobre qué entendemos por comprender tales objetos. Esta explicitación requiere responder a preguntas tales como:

- ¿Cuál es la estructura del objeto a comprender?
- ¿Qué formas o modos posibles de comprensión existen para cada objeto?
- ¿Qué aspectos o componentes de los objetos matemáticos es posible y deseable que aprendan los estudiantes en un momento y circunstancias dadas?
- ¿Cómo se desarrollan estos componentes?

En lo que sigue introducimos los elementos de una teoría de la comprensión matemática, analizamos la relación entre comprensión y otras nociones cognitivas como la de competencia y las implicaciones de nuestra visión de la comprensión sobre la evaluación, la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Interpretaremos la comprensión como correspondencia entre significados personales e institucionales, por lo que el proceso de comprensión será progresivo y estará compuesto de los mismos elementos que hemos postulado para el significado sistémico de los objetos matemáticos. Comenzamos con unas consideraciones sobre la relevancia de la idea de comprensión para la didáctica de las matemáticas.

5.2. LA COMPRENSIÓN EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

La importancia de la idea de comprensión para la Didáctica de las Matemáticas se pone de manifiesto en los trabajos de Sierpinska (1994), Pirie y Kieren (1994), Koyama (1993), Fennema y Romberg (1999), entre otros. Pero la caracterización de la comprensión:

> "de modo que clarifique su crecimiento, e identifique las acciones pedagógicas que la promuevan continúa siendo un problema" (Pirie y Kieren, 1994, p. 165).

Como afirman Hiebert y Carpenter (1992), una de las ideas más ampliamente aceptadas en la Educación Matemática es que los estudiantes deberían comprender las matemáticas. En términos similares comienza Sierpinska (1994) su libro sobre la comprensión en matemáticas, "¿cómo enseñar de modo que los estudiantes comprendan?, ¿qué es lo que no comprenden exactamente? ¿qué comprenden y cómo?". Pirie y Kieren (1994) mencionan el interés mostrado por las reformas curriculares promovidas en muchos países sobre la comprensión en matemáticas, así como el reflejado en las actas de congresos y artículos de revistas en el campo de la psicología y la inteligencia artificial.

5.2.1. Comprensión instrumental y relacional

En su trabajo clásico sobre la comprensión, Skemp (1976) describe ejemplos en los que el alumno cree que comprende un concepto si sabe aplicar una regla –aunque no sabe por qué se aplica la regla. En los propios libros de texto y en la práctica escolar se encuentra a veces esta concepción sobre lo que es conocer/ comprender las matemáticas.

Skemp se pregunta si es importante la distinción entre comprensión instrumental y relacional y si un tipo es preferible al otro. La respuesta que da es bien concluyente a favor de la comprensión relacional. El conocimiento instrumental implica la aplicación de múltiples reglas en lugar de unos pocos principios de aplicación general, y por tanto puede fallar en cuanto la tarea pedida no se ajuste exactamente al patrón estándar. Pero la existencia de una cantidad importante de profesores y textos que ponen en juego más bien la comprensión instrumental fuerza a pensar y a analizar más finamente la situación. Dado que tantos profesores enseñan unas matemáticas instrumentales se podría pensar que éstas podrían tener unas ciertas ventajas, o que al menos existan razones para dicha opción. Skemp menciona las siguientes:

- Dentro de su propio contexto, las matemáticas instrumentales son usualmente más fáciles de aprender; a veces mucho más fáciles. Algunos temas, como la multiplicación de dos números negativos, o la división por una fracción son difíciles de comprender relacionalmente. “Menos por menos, más”, y “para dividir por una fracción, multiplicas por la fracción inversa” son reglas que se recuerdan con facilidad.
- Las recompensas son más inmediatas y más aparentes. Resulta agradable proporcionar las respuestas correctas; también se debe valorar

positivamente el sentimiento de éxito que el alumno puede obtener si es capaz de superar las pruebas.

- Debido a que se requieren menos conocimientos, se puede proporcionar la respuesta correcta de manera más rápida y fiable mediante un pensamiento instrumental que relacional.

Para las matemáticas relacionales Skemp cita las cuatro ventajas siguientes:

- Son más adaptables a nuevas tareas. La comprensión relacional, el saber no sólo qué método funciona sino también por qué, permite adaptar los métodos a los nuevos problemas. La comprensión instrumental necesita controlar qué método se aplica a cada problema y cuál no, y aprender un método diferente para cada nueva clase de problemas.
- Las matemáticas relacionales son más fáciles de recordar. Aquí hay una paradoja aparente, ya que son más difíciles de aprender. Ciertamente es más fácil que los alumnos aprendan que “la mediana de un número impar de datos no agrupados es el valor central de la serie ordenada de valores”. Pero tienen que aprender reglas de cálculo diferentes para el número par de datos, las variables discretas agrupadas con un número par o impar de valores y las variables continuas agrupadas. Es deseable conocer las reglas separadas; no se tienen que obtener en cada caso que se tengan que aplicar. Pero si se sabe cómo están interrelacionadas facilita el recordarlas como partes de un todo conectado. Hay más cosas que aprender –las conexiones y las reglas separadas- pero el resultado, una vez aprendido, es más duradero.
- Los esquemas relacionales tienen la cualidad de ser orgánicos, lo que quiere decir que parecen actuar como agentes de su propio crecimiento.

El trabajo de Skemp ha sido seguido por otros autores que también diferencian tipos o niveles de comprensión. Nosotros queremos ir más allá de la diferenciación entre comprensión instrumental y relacional y diferenciar diferentes tipos de comprensión que se corresponden con los elementos de significado definidos en nuestro modelo de cognición matemática.

5.2.2. Actos y procesos de comprensión

Desde nuestro punto de vista, una teoría de la comprensión conceptual que sea útil para la Didáctica no puede limitarse a decir, que "comprender la mediana es reconocer el objeto mediana, ser capaz de dar su definición o ser capaz de calcularla". Como hemos visto en los capítulos anteriores, el término 'mediana' designa un sistema de prácticas de gran complejidad, que, además, depende de la institución de referencia. Es por ello que, para poder saber qué es comprender el concepto de mediana o para evaluar la comprensión de este concepto, hemos necesitado clarificar previamente qué es este objeto.

El libro de Sierpinska (1994) supuso un paso importante, al discernir entre acto y proceso de comprensión, y ligar la "buena" comprensión de una situación matemática dada (concepto, teoría, problema) a la secuencia de actos de superar obstáculos específicos de esta situación. La comprensión sería así no un estado dicotómico (se comprende/ no se comprende), sino un proceso creciente y continuo que se desarrolla mediante actos de comprensión.

La complejidad sistémica que postulamos para el significado de los objetos matemáticos -interpretados desde una perspectiva pragmática- está bien ilustrada por la lista de problemas que Sierpinska (1994, p. 21) esboza sobre el significado del término 'función', expresado por su uso:

¿Qué puede ser una función? O, qué adjetivos podemos usar con el nombre 'función' (Definida/ no definida, definida en un punto/ en un intervalo/ en todo punto; creciente, decreciente, invertible, continua en un punto/ en un intervalo; diferenciable en un punto/ en un intervalo; integrable ..., etc) *¿Qué* puede tener una función? (Ceros, valores, una derivada, un límite en un punto/ en el infinito, etc.) *¿Qué* se puede hacer con las funciones? (Representar, calcular valores en puntos ..., calcular una derivada, una integral, combinar funciones, construir sucesiones, o series de funciones, etc.). ¿Cómo verificamos que una función es ... (continua, diferenciable ... en un punto; creciente en un intervalo ...)? ¿Para qué se pueden usar las funciones? (Representar relaciones entre magnitudes variables, modelar, predecir, interpolar, aproximar, ...)

En definitiva, para analizar los fenómenos ligados a la comprensión de los objetos matemáticos es preciso elaborar respuestas a dos cuestiones básicas: *qué* comprender, y *cómo* lograr la comprensión. Por tanto, un modelo de la comprensión tendrá dos ejes principales: uno descriptivo, que indicará los aspectos o componentes de los objetos a comprender, y otro procesual que indicará las fases, niveles, o medios necesarios en el logro de la 'buena' comprensión. En lo que sigue trataremos de aportar algunas ideas que pueden ser útiles para la construcción de dicho modelo.

5.3. ELEMENTOS PARA UN MODELO DE LA COMPRENSIÓN

Como consecuencia de nuestros planteamientos teóricos expuestos en los capítulos anteriores identificamos los siguientes elementos que deben tenerse en cuenta al elaborar una teoría sobre la comprensión en Matemáticas.

5.3.1. Dimensión personal e institucional

Si aceptamos la concepción pragmática y relativista de las matemáticas subyacente a nuestro modelo teórico, una teoría de la comprensión matemática que sea útil y eficaz para explicar los fenómenos de enseñanza y aprendizaje, debe reconocer para la misma la dualidad dialéctica entre la faceta personal e institucional del conocimiento.

La definición de comprensión de Sierpinska como la 'experiencia mental de un sujeto por medio de la cual relaciona un objeto (signo) con otro objeto (significado)' enfatiza uno de los sentidos en que es usado el término 'comprensión', bien adaptado para el estudio de los procesos psicológicos implicados. Pero en los procesos de evaluación del aprendizaje el término 'comprensión' debe tener en cuenta la institución escolar, en la que el significado de los objetos se fija culturalmente. En estas instituciones la tarea del profesor es ayudar a los estudiantes a construir las relaciones convenidas en la institución entre los términos y expresiones matemáticas y las abstracciones y técnicas correspondientes.

Puesto que cada persona nace en el seno de una familia y se desarrolla siendo miembro de distintas instituciones y contextos culturales, los procesos psicológicos involucrados en la comprensión, tanto de objetos lingüísticos como conceptuales, están mediatizados por los significados institucionales, esto es, por las situaciones-problemas, instrumentos semióticos, hábitos y convenciones compartidas. La noción de comprensión personal de un concepto que se deriva de nuestro modelo teórico es la de "construcción o *apropiación* del significado institucional de dicho objeto".

Por ello, la comprensión deja de ser meramente un proceso mental y se convierte en un proceso social e interactivo. Consideremos, como ejemplo, la presentación de la mediana que incluimos en el Anexo 1, y que utilizaremos a lo largo de este trabajo para ejemplificar nuestro modelo teórico. Este libro de texto ha sido utilizado durante una sesión de clase para introducir la mediana a un grupo de estudiantes de Magisterio.

Este grupo constituye una institución particular y el profesor que evalúa la comprensión de sus alumnos debe relativizarla al contenido presentado sobre la mediana en dicha sesión de clase. Considerará, por tanto que un alumno ha comprendido la idea de mediana cuando sea capaz de reproducir la definición mostrada, calcularla tanto para un número par como impar de valores no agrupados y para una tabla sencilla de frecuencias de una variable discreta. Incluso cuando el alumno no sea capaz de calcular la mediana a partir de datos presentados en un histograma o en un gráfico de la caja, todavía asumiremos que el alumno comprende la mediana, puesto que este tipo de presentaciones no han sido incluidas como parte del significado institucional.

La dependencia entre los significados personales e institucionales se observa porque el significado que el sujeto debe apropiarse depende de las informaciones y actividades propuestas por el profesor. Puesto que en el significado atribuido a la mediana no figura el ser el percentil del 50%, el significado del aprendiz tendrá esa carencia. Igual ocurrirá con otros elementos no incluidos en la enseñanza, como el desarrollo de la técnica de cálculo de la mediana en el caso de variables continuas agrupadas en intervalos de clase.

Además, la comprensión, en sentido subjetivo, no puede ser reducida meramente a una experiencia mental sino que involucra a toda la esfera de la persona. Como afirma Johnson (1987), nuestra comprensión:

> "es el modo que estamos significativamente situados en nuestro mundo por medio de nuestras interacciones corporales, nuestras instituciones culturales, nuestra tradición lingüística y nuestro contexto cultural" (p. 102).

5.3.2. Carácter sistémico y dinámico

Puesto que concebimos el "significado sistémico de un objeto" como una entidad compuesta de elementos y relativa a los contextos institucionales, la comprensión de un concepto por un sujeto, en un momento y circunstancias dadas, implicará la apropiación de los distintos elementos que componen los significados institucionales correspondientes. Para los alumnos que han seguido el texto mostrado en el Anexo 1 esperamos que adquieran los siguientes elementos, como parte de su comprensión:

- Las situaciones-problemas: reconocimiento de las situaciones prototípicas de uso del objeto. En el texto analizado se muestra a los alumnos dos clases de situaciones que se resuelven mediante el “objeto mediana": búsqueda de un valor representante de un conjunto de datos con valores atípicos y búsqueda de representante de un conjunto de datos ordinales.

- El lenguaje matemático: expresiones verbales, simbólicas y gráficas asociadas al objeto, las situaciones donde se usa y relación con otros objetos: El término 'mediana', y la notación 'Me', para referirse a la mediana, numerales y símbolos de operaciones, representación de datos en tablas de frecuencias para hacer referencia a los datos y operaciones con ellos.
- Los procedimientos y algoritmos empleados en la resolución de los problemas asociados al objeto: en este caso se presenta el algoritmo de cálculo con datos no agrupados y para una tabla de frecuencias de una variable discreta.
- Las definiciones características: mediana como valor que divide al conjunto de datos en dos efectivos de igual tamaño; mediana como valor para el que la frecuencia acumulada es inmediatamente superior a la mitad de los datos.
- Sus propiedades y relaciones con otros objetos: relación con el conjunto de datos, propiedad de mejor representante que la media en caso de valores atípicos.
- Los tipos de argumentos empleados en la comprobación y generalización de las soluciones de los problemas, en la comprobación de propiedades y en la puesta en relación con otros objetos. En el texto citado no se usan demostraciones formales, limitándose los argumentos a la comprobación de casos particulares y presentación de ejemplos.

El reconocimiento de la complejidad sistémica del significado del objeto implica, además, que su apropiación por el sujeto será un proceso dinámico, progresivo, y no lineal (Pirie & Kieren, 1994), como consecuencia de los distintos dominios de experiencia y contextos institucionales en que participa.

Como cualquier otro concepto, la mediana y otras medidas de tendencia central han tenido un lento desarrollo dentro de la matemática hasta el momento en que fueron reconocidos como conceptos matemáticos e incluidos en la enseñanza. Durante este desarrollo ha sufrido transformaciones progresivas según se ha ido ampliando el campo de problemas asociado. La didáctica de la matemática ha puesto de manifiesto cómo el aprendizaje del sujeto es también un proceso lento y progresivo que con frecuencia se asemeja a la construcción de los objetos en la ciencia.

Para las medidas de posición central no hay todavía un estudio comprehensivo del desarrollo a diversas edades, aunque el trabajo de Watson y Moritz (2000) es un primer paso en este estudio y muestra diferentes niveles progresivos de comprensión de los estadísticos de valor central que pasan desde el uso informal de las palabras como “promedio”, “media”, la comprensión de los promedios como propiedades del conjunto de datos en su totalidad y no de un elemento aislado, la resolución de problemas simples hasta el uso de las ideas de promedio en la comparación de diferentes conjuntos de datos y extracción de inferencias a partir de ellos.

Incluso reconociendo que los niveles descritos por Watson y Moritz (2000) indican una complejidad creciente en la comprensión de las ideas de promedio, pensamos que su descripción es aún muy limitada para reflejar la variedad y diversidad de matices en la comprensión del concepto de mediana y medidas de posición central. Como estamos mostrando a lo largo de este trabajo, en realidad estos conceptos son bastante elaborados y algunas investigaciones sobre la comprensión de los promedios han mostrado errores frecuentes de los alumnos (por tanto fallos en la comprensión) en cada una de las categorías de comprensión que hemos descrito. Sin pretender ser exhaustivos, citamos algunos de estos ejemplos a continuación:

- Carvalho (1998), al analizar las producciones escritas de los alumnos al resolver tareas estadísticas, describe como errores frecuentes en el cálculo de la mediana los siguientes (errores procedimentales): calcular el dato central de las frecuencias absolutas ordenadas de forma creciente; calcular la moda en vez de la mediana; tomar el valor central de la serie sin ordenar; no tener en cuenta las frecuencias en el cálculo de la mediana.
- Mokros y Russell (1995), al analizar las propiedades que comprenden los niños sobre las medidas de posición central indica que muchos de ellos no conciben el conjunto de datos como un todo, sino como un agregado de valores no relacionados entre sí. Ello les lleva a no comprender las ideas de promedios como resumen o representante de los datos, que se refiere al conjunto global y no a ninguno de sus valores aislados.
- Por otro lado, Batanero, Godino y Navas (1997) al plantear a estudiantes de Magisterio preguntas sobre la relación entre media, mediana y moda,

observan que los estudiantes tienden a situar la media en el centro del recorrido de la distribución, propiedad que es cierta para distribuciones simétricas. Pero cuando la distribución es muy asimétrica la media se desplaza hacia uno de los extremos y la moda o la mediana serían un valor más representativo del conjunto de datos. Esto no es siempre comprendido por algunos alumnos quienes invariablemente eligen la media como mejor representante de los datos sin tener en cuenta la simetría de la distribución o la existencia de valores atípicos, es decir estos alumnos no relacionan los conceptos entre sí.

- Respecto a la comprensión de la definición de mediana Barr, (1980) indica que los alumnos entienden que la mediana es el centro de "algo" pero no siempre comprenden a que se refiere ese "algo" porque no comprenden realmente que una tabla de frecuencia es sólo un resumen de los datos y no son capaces de pasar de la tabla a la lista de valores que es una representación alternativa de los datos. Incluso si se les da los datos en forma de lista no entienden por qué hay que ordenarlos para calcular la mediana, porque no entienden que la mediana es un estadístico que se refiere al conjunto ordenado de datos.
- Incluso se encuentran dificultades en la comprensión del lenguaje específico. Eisenbach (1994) plantea a estudiantes universitarios en un curso introductorio de estadística el significado de la frase: "*¿Qué quiere decir que el salario medio de un empleado es 3.600 dólares?"*. Obtiene respuestas como "*que la mayoría de los empleados gana alrededor de 3.600 dólares",* o que *"es el salario central; los otros trabajadores ganan más o menos de 3600 dólares",* que muestran la confusión terminológica entre las palabras "media", "mediana" y "moda".

5.3.3. Acción humana e intencionalidad

Nuestro modelo teórico parte de la noción de práctica prototípica significativa, definida como la actuación que la persona realiza en su intento de resolver una clase de situaciones-problemas y a la que reconoce o atribuye una finalidad (un para qué). Estas prácticas son formas expresivas situadas que involucran una situación-problema, un contexto institucional, una persona y los instrumentos semióticos que mediatizan la acción. Puesto que concebimos los objetos matemáticos (abstracciones o generalidades empírico-operatorias) como emergentes de los sistemas de prácticas prototípicas significativas, la comprensión del objeto[1], exige además que el sujeto identifique en el objeto un para qué, una intencionalidad (Maier, 1992) como base de la comprensión.

5.4. RELACIÓN ENTRE COMPRENSIÓN Y COMPETENCIA

Otro punto de interés para la didáctica es la relación entre comprensión y competencia matemática (Godino, 2002; 2003). El diccionario de uso del español de María Moliner se refiere a la persona 'competente' como al "conocedor de cierta ciencia o materia, o experto o apto en la cosa que se expresa o a la que se refiere el nombre afectado por 'competente'. La competencia se relaciona por tanto con la aptitud, capacidad, disposición, "circunstancia de servir para determinada cosa". Una persona apta, o capaz, quiere decir que es "útil en general para determinado trabajo, servicio o función". Igual sentido encontramos en el diccionario Penguin de Psicología que define "competencia" como "la capacidad de realizar una tarea o de finalizar algo con éxito". Pone en juego la noción de 'capacidad' (ability), que se refiere tanto al nivel general de inteligencia de alguien como a la cualidad o destreza que tiene esa persona para hacer una cosa particular.

El análisis que hemos citado del matemático y psicólogo Richard Skemp sobre la comprensión relacional e instrumental nos puede servir como punto de partida para discernir algunas características de las relaciones entre competencia, entendida como "saber hacer", y comprensión, que implica saber qué hacer y por qué. La noción de competencia, según la hemos descrito anteriormente, viene a ser asimilable a la "comprensión instrumental" según la describe Skemp, mientras que comprensión viene a ser equivalente a "comprensión relacional".

En la discusión que hemos hecho en la sección 5.2 hemos visto que, aunque a corto plazo y en un contexto limitado, las matemáticas instrumentales pueden estar justificadas, no pueden estarlo a largo plazo y en el proceso educativo del niño. Tanto la competencia como la comprensión, ponen en juego conocimientos. En el primer caso se trata de conocimientos de tipo procedimental, en el segundo conceptual y argumentativo. En el caso de las matemáticas, ambos tipos de conocimientos están íntimamente relacionados, aunque en la práctica de la enseñanza y el aprendizaje matemático puede haber una separación y descoordinación entre ambas facetas. ¿En qué medida el profesional

[1] en sentido integral o sistémico,

competente tiene también conocimientos conceptuales, lógicos y argumentativos. ¿Depende el saber hacer del saber qué?. La sociedad valora la acción; pero, ¿es posible o deseable la acción sin comprensión? Parece que la acción será más flexible y adaptable, generalizable, y por tanto, más eficaz si va acompañada de comprensión, de saber por qué se hacen así las cosas.

Aunque la competencia es un rasgo cognitivo y disposicional del sujeto, sus características serán distintas según el campo profesional, el objeto de saber o la destreza. En consecuencia, las expresiones del tipo, "A es competente para realizar la tarea T", indican que el sujeto A domina o es capaz de aplicar correctamente la técnica *t* que resuelve o permite hacer bien la tarea T. En esas circunstancias decimos que el sujeto tiene una capacidad o competencia específica, o también que "conoce cómo hacer" la tarea. En cambio, la expresión, "A comprende la técnica t que permite realizar la tarea T" se aplica si A conoce por qué dicha técnica es adecuada, su ámbito de validez y las relaciones con otras técnicas. Por tanto, nos parece que ambas nociones cognitivas se complementan mutuamente. La competencia atiende al componente práctico, mientras que la comprensión al componente teórico o relacional del conocimiento.

Por otro lado, en nuestro modelo teórico, estos componentes teórico y práctico, están a su vez desglosados en nuevos componentes y unidos por el lenguaje, que participa tanto de la teoría como de la práctica. En síntesis, podemos distinguir en un primer análisis tres facetas básicas en el conocimiento matemático:

- El componente práctico (praxis) ligado con la idea de competencia, que en nuestro modelo teórico se descompone todavía en dos subcomponentes: las situaciones-problemas y las técnicas de solución.
- El componente discursivo/relacional, ligado tradicionalmente a la idea de comprensión y formado por el sistema de reglas y justificaciones, que en nuestro modelo se descompone en argumentaciones, definiciones de conceptos y propiedades en las que se apoya.
- Ambos componentes se apoyan en el uso de recursos lingüísticos, por lo que el lenguaje matemático (en sus diversos registros) constituye un tercer componente sin el cual los anteriores no pueden desarrollarse.

Cada uno de estos seis tipos de elementos estaría para nosotros ligado tanto a la idea de competencia como a la de comprensión, puesto que para cada uno de ellos podemos diferenciar el saber hacer y el saber por qué se hace. Por ejemplo, un alumno puede ser capaz de calcular la mediana a partir de una tabla de frecuencias y esto es diferente de saber por qué se realiza el cálculo de una forma particular. Un alumno puede ser capaz de producir un argumento correcto y esto es diferente de comprender por qué el argumento es correcto. Podemos fácilmente poner ejemplos semejantes de competencia y comprensión para cada uno de los distintos tipos de elementos de significado.

En consecuencia comprensión y competencia están para nosotros íntimamente ligadas, constan de diferentes tipos de elementos y tienen además una dependencia de la institución desde la cual se evalúan.

5.5. EVALUACIÓN DE LA COMPRENSIÓN

Una institución de importancia particular para la didáctica es la clase de matemáticas. El profesor debe proporcionar al alumno un entorno de aprendizaje que tenga en cuenta las directrices curriculares, los libros de texto y materiales didácticos - que pueden ser considerados también como instituciones portadoras de aspectos parciales del significado de los objetos correspondientes-. Ello se traduce en que, para un objeto matemático el profesor realiza un proceso de selección de situaciones, notaciones, etc. que se traducirán en un significado restringido de dicho objeto. En el ejemplo que hemos comentado en la sección anterior el profesor, al seleccionar el libro de texto, presenta un significado restringido del objeto mediana.

Dentro de la clase de matemáticas un aspecto particularmente importante es la evaluación del aprendizaje del alumno por parte del profesor en la que es preciso confrontar el significado que se trata de transmitir con el efectivamente adquirido. La importancia de la evaluación para la investigación y la práctica de la educación matemática puede apreciarse en el "ICMI Study" dedicado al tema (Niss, 1993), y fue también planteado por Wheeler (1993) desde su dimensión epistemológica. Si necesitamos evaluar el conocimiento matemático de los estudiantes para una multiplicidad de fines, la primera cuestión que debe dilucidarse se refiere a la naturaleza del propio conocimiento. La razón que da este autor nos parece obvia: "¿Cómo podemos evaluar lo que no conocemos?" (p. 87).

Precisamente, una de las finalidades de la teoría que presentamos en esta Monografía sobre el conocimiento matemático es proporcionar criterios para la elaboración de una teoría de la evaluación del mismo. Podremos describir el proceso de evaluación indicando que el significado de un objeto O_I para un sujeto p desde el punto de vista de la institución I: *es el subsistema de prácticas personales asociadas a un campo de* *problemas que son consideradas en I como adecuadas y características para resolver dichos problemas*.

Puesto que un mismo campo de problemas C que en una institución I ha dado lugar a un objeto O_I con significado $S(O_I)$, en una persona puede dar lugar a un objeto O_p con significado personal $S(O_p)$, la intersección de estos dos sistemas de prácticas es lo que desde el punto de vista de la institución se considera prácticas correctas, esto es, lo que la persona "conoce" o "comprende" del objeto O desde el punto de vista de I. El resto de prácticas personales serían consideradas "erróneas", desde el punto de vista de la institución.

En una situación ideal, y en una institución dada, diremos que un sujeto "comprende" el significado del objeto O_I -o que se "ha apropiado del significado" de un concepto, - si es capaz de reconocer los problemas, procedimientos, argumentaciones, propiedades y representaciones características, relacionarlo con los restantes objetos matemáticos en toda la variedad de situaciones planteadas por la institución correspondiente.

La comprensión alcanzada por un sujeto en un momento dado difícilmente será total o nula, sino que abarcará aspectos parciales de los diversos componentes y niveles de abstracción posibles. Por ejemplo, si un alumno que ha usado el texto mostrado en el apéndice A durante su proceso de instrucción sobre la mediana, no ordena los datos para el cálculo de la mediana, se considera que este alumno no tiene una comprensión procedimental del objeto, aunque sea capaz de reproducir la definición, reconocer el lenguaje y propiedades de la mediana. Coincidimos con Glasersfeld (1989) cuando afirma:

> "El proceso de acomodación y ajuste del significado de las palabras y expresiones lingüísticas continua de hecho para cada uno de nosotros a lo largo de nuestras vidas. No importa durante cuanto tiempo hemos hablado una lengua, habrá aún la ocasión en que nos demos cuenta que, hasta cierto punto, hemos estado usando una palabra de tal modo que ahora resulta ser idiosincrásico en algún aspecto particular" (p. 133).

Es importante reconocer el carácter de *constructo inobservable* de la comprensión personal. En consecuencia, la comprensión personal de un individuo sobre un cierto objeto matemático, como la mediana, deberá ser inferida mediante el análisis de las prácticas realizadas por la persona en la resolución de tareas problemáticas o ítems de evaluación que sean características de la mediana (o el objeto cuya comprensión queramos evaluar).

Un problema que se plantea es que hay infinitas posibles situaciones de evaluación sobre la mediana (o cualquier otro objeto matemático). Por ejemplo, si planteamos al alumno el cálculo de la mediana de un conjunto de datos no agrupados, no sólo podemos cambiar el número de datos, sino su tamaño relativo, conjunto numérico (números enteros, decimales; positivos o negativos, o de signos mezclados), magnitud a que se refieren los datos, escala de medida de los datos (ordinal, intervalo o razón), y cada uno de estos cambios posiblemente afectaría a la dificultad de la tarea. También la dificultad dependería de la situación de evaluación (si el alumno puede consultar el libro; si trabajó sólo o con sus compañeros) si dispone de instrumentos, tales como una hoja electrónica que le permite ordenar los datos automáticamente, etc.

Debido a la diversidad de posibles tareas de evaluación para cada objeto matemático, será fundamental el análisis de las variables de dichas tareas (algunas de las cuales hemos mostrado para la tarea de cálculo de la mediana en un conjunto de datos sin agrupar). Este análisis proporcionará un criterio en la selección de los ítems para la construcción de los instrumentos de evaluación. Puesto que las tareas de evaluación no sólo deben referirse al cálculo – comprensión procedimental- sino a los diferentes elementos de significado que hemos descrito, el constructo, "significado sistémico de un objeto", en su vertiente personal e institucional, puede ser una herramienta conceptual útil para estudiar los procesos de evaluación de la comprensión y de los factores institucionales y evolutivos que la condicionan.

5.6. SÍNTESIS E IMPLICACIONES

En este capítulo hemos explorado algunos elementos a tener en cuenta en una teoría de la comprensión matemática, derivados de nuestras ideas expuesta en los capítulos anteriores sobre los significados de los objetos matemáticos y asimismo hemos analizado las relaciones entre comprensión y competencia matemática.

Proponemos considerar el funcionamiento mental y los contextos socioculturales en una interacción dialéctica y como aspectos de una unidad de análisis más global: *la acción humana*. Puesto que cada persona se desarrolla en diferentes contextos institucionales y culturales, los procesos psicológicos implicados en la comprensión de los objetos matemáticos están mediatizados por los significados institucionales, esto es, por las situaciones problemáticas, los instrumentos semióticos, los hábitos y convenciones compartidas. Reconocemos, no obstante, la prioridad del estudio de los significados institucionales.

Finalmente, la naturaleza sistémica del significado y la comprensión nos permite reconocer el carácter muestral de las situaciones de enseñanza y de evaluación, así como los problemas inferenciales ligados a su estudio. En consecuencia, en capítulos posteriores propondremos la caracterización de los significados personales e institucionales de los objetos matemáticos, así como su mutua interdependencia y desarrollo como una línea de investigación prioritaria para la Didáctica de las Matemáticas (Godino y Batanero, 1998).

Capítulo 6

FACETAS DUALES DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

6.1. Introducción
6.2. Facetas institucional y personal
  6.2.1. Un ejemplo de significado institucional de la mediana
  6.2.2. Significado local de la mediana. Comparación con el significado de referencia
  6.2.3. Significado personal construido por una estudiante
  6.2.4. Dialéctica entre significados institucionales y personales
6.3. Facetas elemental y sistémica
6.4. Facetas ostensiva y no ostensiva
6.5. Facetas ejemplar y tipo
6.6. Facetas expresión y contenido
6.7. Síntesis e implicaciones

6.1. INTRODUCCIÓN

En los capítulos anteriores hemos presentado la noción de significado sistémico de los objetos matemáticos y una primera categorización de las entidades constituyentes de tales sistemas. También hemos visto sus consecuencias sobre la comprensión y la competencia matemática.

Como hemos descrito, estas nociones fueron desarrolladas en una primera fase de nuestro trabajo en la que estábamos principalmente interesados por clarificar la naturaleza de los objetos matemáticos, todo ello con el propósito de fundamentar las investigaciones experimentales que se estaban desarrollando en el seno de nuestro grupo de investigación. El modelo desarrollado se mostró productivo para centrar y fundamentar algunas de las tesis realizadas, como por ejemplo las de Serrano (1996), Ortiz (1999) y Sánchez-Cobo (1999)[1].

En una segunda etapa de nuestro trabajo teórico nos hemos interesado por analizar con mayor detalle la actividad matemática, por ejemplo en resolución de problemas. En esta actividad, así como en la producción o interpretación de textos de matemáticas (tanto libros de texto, como producciones escritas de respuestas de alumnos a tareas de evaluación o transcripciones de sesiones de clases de matemáticas) se llevan a cabo una serie de procesos interpretativos que involucran a los objetos matemáticos y sus elementos de significado definidos en los capítulos anteriores.

El análisis de dichos procesos interpretativos nos llevó a la consideración de facetas o dimensiones para el conocimiento matemático, tanto referidos a los objetos y sus significados como un todo, como para cada elemento de significado en los tipos anteriormente definidos. Estas facetas se presentan agrupadas en parejas que se complementan de manera dual y dialéctica. Se consideran como atributos aplicables a los distintos objetos primarios y secundarios, dando lugar a distintas "versiones" de dichos objetos.

En este capítulo describiremos estas facetas desde las que pueden ser consideradas las entidades matemáticas, según el juego de lenguaje[2] en que participan. Las facetas consideradas son las siguientes:

- personal y institucional
- ostensiva y no ostensiva
- ejemplar y tipo
- elemental y sistémica
- expresión y contenido

Los procesos interpretativos en la actividad matemática se describirán en el capítulo 7 utilizando la noción de función de signo adoptada de Hjelmslev (llamada función semiótica por Eco). Las diversas facetas o dualidades cognitivas que describimos en este capítulo, así como los tipos

[1] También V. Font encontró de utilidad este marco teórico para estructurar su tesis doctoral (Font, 2000) sobre el estudio de la derivada en bachillerato, como se describe en el capítulo 11.
[2] Siguiendo a Baker y Hacker (1985, p. 96) consideramos "juegos de lenguaje" cualquier fragmento de nuestras prácticas lingüísticas efectivamente realizadas. Según esta interpretación de la noción de Wittgenstein, la transcripción de una interacción comunicativa en la clase, o un fragmento de un texto, constituyen juegos de lenguaje: en estas situaciones comunicativas específicas es donde debemos buscar el significado en uso de los términos y expresiones matemáticas.

de elementos de significado anteriormente introducidos nos permitirán definir diferentes tipos de funciones semióticas e introducir la técnica de análisis ontológico-semiótico, así como alguna de sus aplicaciones.

Las nociones teóricas introducidas hasta este momento (sistema de prácticas y las categorías funcionales de entidades primarias), junto con las cinco facetas duales desde las que se pueden considerar estas entidades, y la noción de función semiótica, que se introduce en el próximo capítulo, nos proporcionarán una gran capacidad analítica para estudiar la cognición matemática y su desarrollo.

6.2. FACETAS INSTITUCIONAL Y PERSONAL

En los capítulos anteriores ya hemos resaltado cómo, en nuestro modelo teórico de la cognición matemática, consideramos esta doble faceta del conocimiento. Al realizar una investigación didáctica o al reflexionar sobre la práctica docente, sobre las respuestas de un alumno a las tareas de evaluación, sobre la exposición de un tema en un libro de texto o en otras circunstancias en que estemos interesados en analizar la actividad matemática, podemos enfocarnos bien en la faceta personal del conocimiento, en la institucional, o en la interacción entre ambas.

Si nuestro interés se centra en el sujeto individual, en su aprendizaje, en sus respuestas a una prueba de evaluación, hablamos de objetos personales, puesto que pensamos que podrían ser portadores, al menos potencialmente, de rasgos idiosincrásicos de los conocimientos de este sujeto. Por el contrario si se trata de documentos curriculares, libros de texto, explicaciones de un profesor ante su clase, consideramos que se ponen en juego objetos institucionales al tener connotaciones normativas o convencionales, ya que los objetos son usados como referencia en el proceso de enseñanza y aprendizaje. La distinción entre las facetas personal e institucional de los conocimientos matemáticos nos parece fundamental para poder describir y explicar las interacciones entre el profesor y los alumnos en el aula. Se relaciona con la distinción habitual en epistemología y psicología de conocimiento subjetivo y objetivo.

La distinción entre cognición personal e institucional es habitual en las publicaciones usuales en educación matemática, aunque no siempre se conciben de la misma manera. La noción de relación personal e institucional con el objeto es clave en el enfoque antropológico propuesto por Chevallard (1992), como también es importante la distinción entre conocimientos institucionales y personales introducida en los enfoques socioculturales (Cobb, 1989).

Nosotros asumimos que la distinción entre persona e institución es esencial en el análisis de la actividad matemática y los procesos de enseñanza y aprendizaje. Esta distinción de "posiciones" en el sistema didáctico interesa que se refleje también en los propios objetos de enseñanza y de aprendizaje (objetos y significados personales e institucionales). Esto permite caracterizar el aprendizaje como "acoplamiento progresivo" entre significados personales e institucionales y explicar las dificultades y obstáculos en términos de conflictos semióticos y de la complejidad de los objetos matemáticos.

Tipos de significados institucionales y personales

En el análisis de los significados institucionales de un objeto matemático interesa distinguir cuatro tipos, que designamos como significado de referencia, pretendido, implementado y evaluado.

Cuando un profesor planifica un proceso de instrucción sobre un objeto matemático para un grupo de estudiantes, comienza por delimitar "lo que es dicho objeto para las instituciones matemáticas y didácticas". Acudirá, por tanto, a los textos matemáticos correspondientes, a la orientaciones curriculares, y en general a lo que "los expertos" consideran que son las prácticas operativas y discursivas inherentes al objeto, que se fija como objetivo instruccional. Asimismo, el profesor usará sus conocimientos personales previamente adquiridos. Con todo ello, construirá un sistema de prácticas que designamos como *significado institucional de referencia* del objeto. Por ejemplo, en el Anexo 2 incluimos una descripción del significado de referencia de la mediana construido por nosotros a partir de los textos universitarios de estadística y nuestra propia experiencia en la aplicación y enseñanza de la estadística.

A partir del significado de referencia, el profesor selecciona, ordena, y delimita la parte específica que va proponer a sus estudiantes durante un proceso de estudio determinado. Tendrá para ello en cuenta el tiempo disponible, los conocimientos previos de los estudiantes y los medios instruccionales disponibles. Denominaremos como *significado institucional pretendido* al sistema de prácticas que se planifican sobre un objeto matemático para un cierto proceso instruccional. El significado pretendido en nuestra experiencia de enseñanza de la mediana a un grupo de estudiantes de magisterio, usando el texto de secundaria incluido en el Anexo 1, son las prácticas operatorias y discursivas incluidas en dicho texto.

Después del tiempo asignado para el estudio de este texto por parte de los alumnos, y de la evaluación de los aprendizajes logrados tras dicho estudio, el profesor tuvo ocasión de aclarar algunas dudas, de proponer y resolver nuevos problemas, así como de continuar con el estudio del resto del tema de "Introducción a la estadística para maestros". Como consecuencia de estas nuevas intervenciones del profesor el significado institucional pretendido cambió de hecho, por lo que finalmente se implementaron un sistema de prácticas que puede diferir respecto de las planificadas. Con el fin de introducir como objeto de investigación estos procesos de cambio en los significados institucionales interesa hablar del *significado implementado*, como el sistema de prácticas (operativas y discursivas) que efectivamente tienen lugar en la clase de matemáticas, las cuales servirán de referencia inmediata para el estudio de los alumnos y las evaluaciones de los aprendizajes.

Un cuarto tipo de significado institucional se pone en juego en el proceso de evaluación. El profesor selecciona una colección de tareas o cuestiones que incluye en las pruebas de evaluación y pautas de observación de los aprendizajes. Serán una muestra (se espera que representativa) del significado implementado. Lo designamos como *significado institucional evaluado*.

Desde el punto de vista del estudiante, y en un momento dado, cabe hacer la distinción entre el significado personal global, el declarado y el logrado. El *significado global* corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencialmente el alumno, relativas a un objeto matemático; el *declarado* da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional; finalmente, el *significado personal logrado* corresponde a las prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida. La parte del significado declarado no concordante con el institucional es lo que habitualmente se consideran como errores de aprendizaje.

Se puede hacer una clasificación de los significados institucionales y personales complementaria a la descrita atendiendo al momento del proceso de estudio en que se determinan. Se hablará de *significados a priori* cuando los sistemas de prácticas se caracterizan antes de iniciar el proceso instruccional propiamente dicho y *significado a posteriori* cuando se hace después. Los tres tipos de significados personales descritos (global, declarado y logrado) pueden tener este carácter a priori o a posteriori. Los significados institucionales de referencia y pretendido tendrán el carácter de a priori, mientras que el implementado y el evaluado serán a posteriori.

La figura 6.1 resume los diversos significados institucionales y personales mencionados.

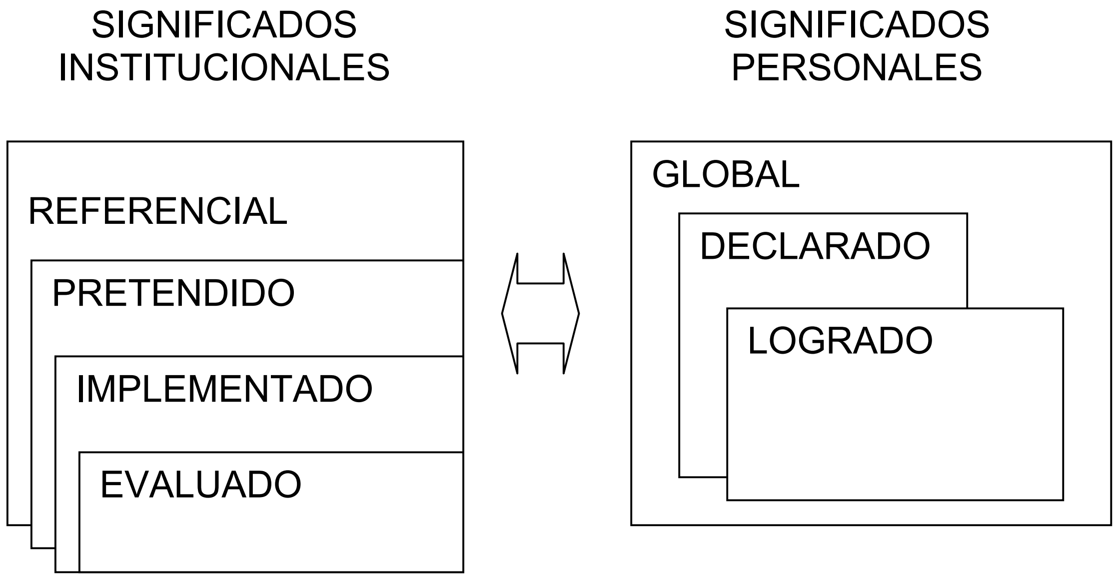


Figura 6.1: Tipos de significados

6.3. FACETAS ELEMENTAL Y SISTÉMICA

En el texto del Anexo 1, los conceptos estadísticos de media, mediana y medidas de tendencia central se están considerando como entidades compuestas, con una cierta organización o estructura. Por tanto pueden ser interpretados como conceptos-sistema. Las medidas de tendencia central están compuestas por la media y la mediana (la moda será estudiada después), y entre estos dos objetos hay una determinada relación. La media es algo que se calcula y en dicho cálculo se hace intervenir todos los datos.

La mediana se va configurando como un sistema complejo que incluye ciertos tipos de tareas específicas, técnicas de cálculo y la propiedad de ser mejor representante que la media en ciertos tipos de situaciones.

Sin embargo, en momentos dados nos referimos a un objeto como una unidad elemental indescomponible. Tal es el caso de la referencia a la mediana en las expresiones: "*la mediana de la edad de los 25 alumnos de la clase",* donde nos referimos a la medida de posición central para un conjunto particular de datos; o "*Mediana = 14"*, en que nos referimos a un número entero que es el valor particular que toma dicha mediana. En estos casos no nos referimos a todo el posible conjunto de prácticas relacionado con la mediana, sino que las expresiones toman un significado preciso e indescomponible.*

Esta distinción elemental - sistémico (o unitaria – compuesta) que hemos ejemplificado para el caso del concepto mediana es también aplicable a los otros tipos de elementos descritos. Por ejemplo, en el cálculo de la mediana la ordenación de una serie de números (problema) es una entidad elemental o unitaria, puesto que no se descompone en partes (ya que se supone que el alumno sabe cómo resolver ese problema). En cambio, en otras situaciones, cuando se estudia aritmética, la ordenación de números será analizada en sus componentes (mínimo, máximo, siguiente, etc.).

Con la faceta dual del conocimiento elemental y sistémica tratamos de tener en cuenta el carácter recursivo y complejo del conocimiento matemático. Cuando nos interrogamos por cualquier objeto (problema, lenguaje, acción, concepto, propiedad, argumento) aparece un sistema en el que de nuevo se ponen en juego los restantes tipos de objetos y la trama de relaciones que los relacionan.

6.4. FACETAS OSTENSIVA Y NO OSTENSIVA

Cualquier objeto matemático tiene una faceta ostensiva, esto es, perceptible, en cuanto que es reconocido como tal objeto por una institución, lo que implica que se habla de dicho objeto, se le nombra y se comunica sus características a otras personas, por medio del lenguaje oral, escrito, gráfico o simbólico. Esto ocurre con los conceptos (como la mediana) y también con los tipos de objetos que hemos descrito como parte del significado de la mediana (u otro objeto matemático). En el texto incluido como anexo 1 o en cualquier otro texto matemático donde se estudie la mediana, podemos encontrar ostensivamente problemas, algoritmos, representaciones de diversos tipos, definiciones, propiedades y argumentaciones.

Por otro lado, cualquiera de estos objetos tiene otra faceta no ostensiva, en cuando un sujeto es capaz de pensar e imaginar uno de estos objetos sin necesidad de mostrarlo externamente.

Mientras que las entidades lingüísticas se muestran por sí mismas directamente (mediante escritura, sonido, gestos), el resto de las entidades no son directamente perceptibles, sino que precisan de los elementos lingüísticos para su comunicación a otras personas y para su funcionamiento en la actividad matemática. El lenguaje es, por tanto, no sólo el medio por el cual se expresan los no ostensivos, sino también el instrumento para su constitución y desarrollo. Por ello lo consideramos como la faceta ostensiva de los objetos matemáticos.

Estas entidades lingüísticas tienen también una faceta no ostensiva, puesto que el sujeto individual puede pensar (sin mostrarlo exteriormente) en la palabra 'mediana', la notación Me, u otro cualquier recurso expresivo.

Bosch y Chevallard (1999) usan los términos ostensivo y no ostensivo para clasificar el mundo de los objetos en dos clases disjuntas: Los ostensivos, que tienen una cierta materialidad, y los no ostensivos, que no la tienen (conceptos, nociones, intuiciones, etc.). Estudian con detalle los diversos registros de los cuales están hechos los ostensivos, y sobre todo su papel esencial en el trabajo matemático.

En nuestro modelo consideramos la distinción ostensivo no-ostensivo como una faceta o dimensión dual aplicable a los distintos objetos primarios (y secundarios). El motivo es que un objeto ostensivo (una palabra escrita, un gráfico, etc.) puede ser también pensado, imaginado, por una persona, o puede estar implícito en un discurso matemático institucional (por ejemplo, el signo de multiplicar en la notación algebraica). Análogamente, un cálculo puede ser realizado por una persona de manera ostensiva, o mentalmente; un ordenador calcula "internamente" de manera no ostensiva. Es como si los objetos ostensivos también pudieran funcionar como no ostensivos. Esta paradoja la resolvemos hablando de objetos lingüísticos (lenguaje en sus diversos registros) como entidades funcionales primarias, las cuales pueden ser ostensivos o no ostensivos, tanto si son considerados como objetos personales o institucionales.

6.5. FACETAS EJEMPLAR Y TIPO

La distinción ejemplar - tipo es clásica en la teoría del lenguaje. Nosotros aquí la usamos para proponer una interpretación lingüística de la distinción concreto-abstracto, tan usual en el trabajo matemático, que se puede aplicar, no sólo a los objetos conceptuales, sino a cualquiera de los seis tipos de entidades primarias y a las secundarias. Se corresponde con lo que en otros trabajos hemos presentado como *objetos extensivos* (ejemplar) e *intensivos* (tipos o abstracciones). Consideramos que puede ser una noción útil para describir la disposición matemática hacia la generalización y explicar algunos conflictos en los procesos de enseñanza y aprendizaje matemático derivados de la confusión entre ejemplar y tipo.

En el estudio de las matemáticas estamos siempre interesados por generalizar los problemas, las soluciones que encontramos y el discurso con el que se describen y organizan. No nos conformamos con resolver un problema aislado sino que deseamos resolver tipos de problemas y desarrollar técnicas cada vez más generales. Además, tales soluciones son organizadas y justificadas en estructuras cada vez más globales. En el análisis de la actividad matemática, o de un proceso de estudio matemático particular, debemos precisar en cada circunstancia si nos referimos a un objeto concreto (algo que se pone en juego por sí mismo), o a dicho objeto como representante de una clase de objetos, como ejemplar de un cierto tipo, o componente de un sistema.

La consideración de un objeto como concreto o abstracto depende en cada momento del juego de lenguaje en que se usa. Cualquiera de las entidades descritas en los apartados anteriores pueden ser consideradas como concretas o abstractas. En el texto incluido en el Anexo 1 encontramos los siguientes ejemplos:

- *Lenguaje*: El término ‘mediana’, y la notación ‘Me’, son ejemplares concretos del tipo abstracto ‘representaciones de la mediana’ que incluye, entre otras, ‘percentil del 50%’, ‘segundo cuartil’, etc.
- *Situaciones:* Los ejemplos de problemas presentados en el texto son ejemplares concretos del tipo abstracto de situaciones ‘búsqueda de un

valor representante de un conjunto de datos con valores atípicos u ordinales'.

- *Acciones*: Los ejemplos concretos de cálculo de la media y la mediana para casos particulares pueden generalizarse a algoritmos generales de cálculo para las mismas condiciones.
- *Definiciones*: Se presentan definiciones particulares de la mediana, correspondientes a cuatro maneras de obtener el valor de la mediana en casos particulares. Estas definiciones son casos concretos de una definición más general como función que hace corresponder a una colección de datos el número real solución del sistema de inecuaciones, $F(x) \leq 1/2$, $F(x) \geq 1/2$, siendo $F(x)$ la función de distribución de la variable estadística que describe los datos.
- *Proposiciones:* Se afirma que la mediana es más representativa que la media cuando hay valores atípicos. Esta es una formulación particular de las posibles propiedades estadísticas, aritméticas y algebraicas de la mediana. Se podría formular en términos más generales haciendo mención a la asimetría de las distribuciones.
- *Argumentos:* Las justificaciones que se dan en el texto son de tipo "comprobaciones en un caso particular". Una definición más general tendría que probar que el valor central de la serie de datos es el más próximo a la mayoría de los datos, esto es, probar la propiedad de que la suma de las desviaciones absolutas respecto de un valor *a* de la serie de datos es mínima cuando $a = \text{Me}$.

6.6. FACETAS EXPRESIÓN Y CONTENIDO

La actividad matemática y los procesos de construcción y uso de los objetos matemáticos se caracterizan por ser esencialmente relacionales. Los distintos objetos descritos, con los diversos "apellidos" que les asignamos según su naturaleza y función, no se deben concebir como entidades aisladas, sino puestas en relación unas con otras.

La distinción entre expresión y contenido nos permite tener en cuenta el carácter esencialmente relacional de la actividad matemática. El uso que haremos de estos términos se describe con mayor detalle en el capítulo 7, donde introducimos la idea de *función de signo* tomada de Hjemslev (1943).

Por el momento, solo queremos hacer notar que añadiremos a esta noción de función semiótica la ontología matemática que hemos descrito y afirmaremos que cualquiera de las entidades consideradas puede desempeñar el papel de expresión o contenido en dicha función.

6.7. SÍNTESIS E IMPLICACIONES

En este Capítulo hemos diferenciado facetas bajo las que pueden considerarse los objetos matemáticos, tanto concebidos globalmente (un sistema de prácticas) como en lo que respecta a cada uno de los constituyentes elementales de tales sistemas. Esta diferenciación, no sólo enriquece las primeras versiones de nuestro modelo teórico sobre el significado de los objetos matemáticos, sino que nos permitirá tener una herramienta analítica de gran potencia para la investigación en Didáctica de las Matemáticas.

El esquema de la figura 6.2 resume el modelo ontológico-semiótico que hemos propuesto como instrumento de análisis de la actividad matemática y sus producciones epistemológicas y cognitivas y que se ha descrito en los capítulos 4 a 6. Las entidades lingüísticas ocupan un lugar central ya que las consideramos como el punto de entrada para indagar la presencia y el papel desempeñado por las restantes entidades.

Estamos ahora en condiciones de estudiar en el Capítulo 7 con mayor detalle la faceta o dimensión expresión - contenido, introduciendo la idea de función de signo (o función semiótica), analizando sus tipos y detallando ejemplos de sus diversas variedades. Ello nos permitirá modelizar la actividad matemática, tanto en los procesos de resolución de problemas, como en los procesos comunicativos en la enseñanza y aprendizaje, como secuencias de funciones semióticas e identificar conflictos semióticos potenciales o efectivos en la interacción didáctica.

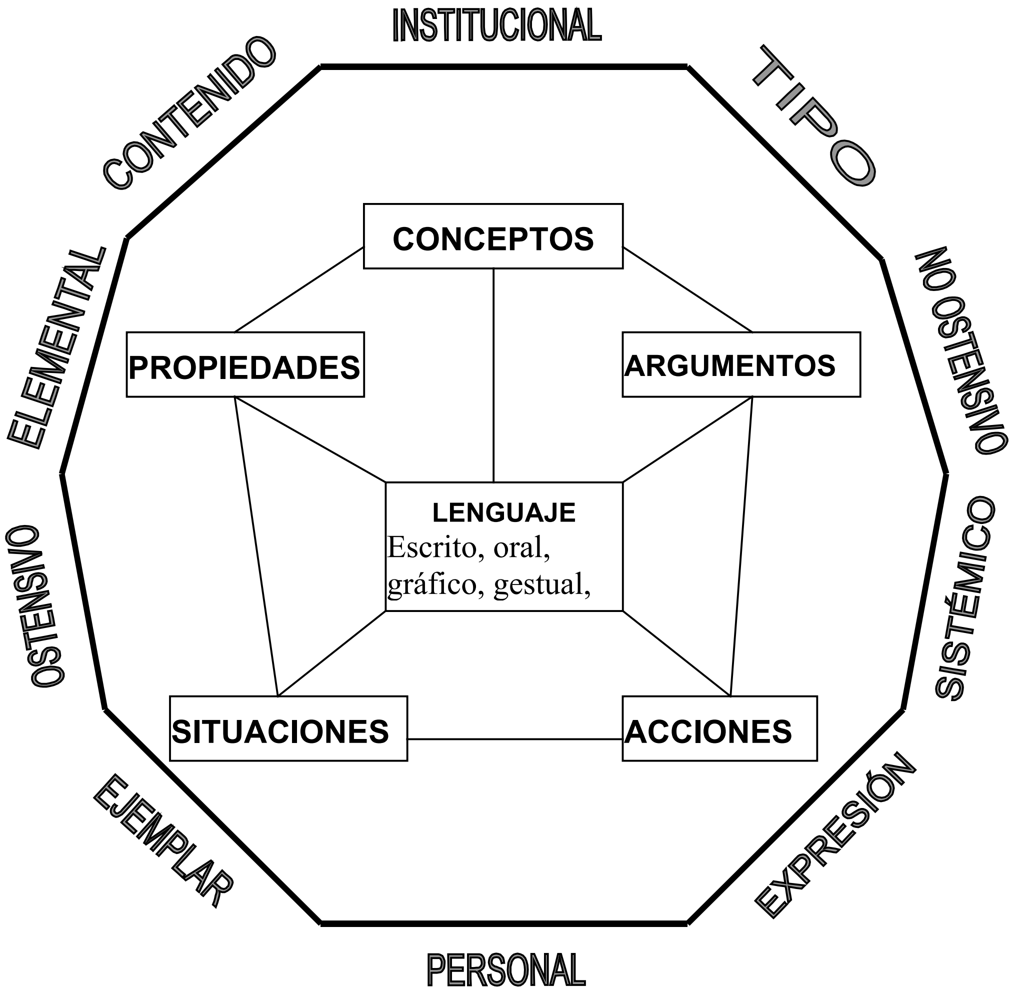


Figura 6.2: Componentes y facetas de la cognición matemática

Capítulo 7

FUNCIONES SEMIÓTICAS Y SUS TIPOS

7.1. Introducción
7.2. Funciones semióticas
7.3. Tipos de funciones semióticas
7.4. El análisis semiótico como técnica para determinar significados
7.5. Determinación de significados institucionales
    7.5.1. Unidades de análisis. Significados elementales
    7.5.2. Significado local de la mediana. Comparación con el significado de referencia
7.6. Determinación de significados personales
7.7. Dialéctica entre significados institucionales y personales
7.8. Síntesis e implicaciones

7.1. INTRODUCCIÓN

En los capítulos anteriores hemos presentado una teoría del significado de los objetos matemáticos, desde presupuestos antropológicos, considerando a tales objetos como el "*sistema de prácticas puestas en juego por las personas ante una clase de situaciones-problemas*". Aunque nuestra idea de objeto matemático es muy amplia[1], en la primera fase de desarrollo de la teoría nos centramos particularmente en describir el significado de los conceptos, atribuyéndole un carácter diacrónico, evolutivo, y dependiente de los contextos institucionales y circunstancias personales. Esta noción de significado puede ser útil para describir ciertos procesos interpretativos, particularmente en los escenarios de diseño, desarrollo y evaluación de planes de enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos.

[1] Asumimos la noción de objeto que propone el interaccionismo simbólico, "todo aquello que puede ser indicado, todo lo que puede señalarse o a lo cual puede hacerse referencia" (Blumer, 1982, p. 8), en nuestro caso, cuando hacemos, comunicamos o aprendemos matemáticas.

Ahora bien, no sólo las entidades conceptuales requieren *interpretación* en los procesos comunicativos puestos en juego en la educación matemática, sino también los propios medios expresivos y las situaciones problemáticas desencadenan interpretaciones por parte de los destinatarios de los mensajes en un momento y circunstancias dadas. En estos casos, el significado tiene un carácter local y sincrónico: Es el contenido al que se refiere el emisor de una expresión, o el contenido que interpreta el receptor que se refiere el emisor. En otras palabras, lo que quiere decir uno, o lo que entiende el otro.

En el trabajo matemático es habitual considerar que los símbolos (significantes) remiten o están en lugar de las entidades conceptuales (significados). El punto crucial en los procesos de instrucción matemática no está, sin embargo, en el dominio de la sintaxis del lenguaje simbólico matemático, incluso aunque ésta sea también importante, sino en su semántica, es decir, en la naturaleza de los propios conceptos y proposiciones matemáticas y su relación con los contextos y situaciones problemas de cuya resolución provienen. Además, es necesario elaborar modelos teóricos que traten de articular las dimensiones semiótica (en sus aspectos sintácticos, semánticos y pragmáticos), epistemológica, psicológica y sociocultural en educación matemática. Esta modelización requiere tener en cuenta, entre otros, los siguientes elementos y supuestos:

- Diversidad de objetos puestos en juego en la actividad matemática, tanto en el plano de la expresión como en el del contenido.
- Diversidad de actos y procesos de semiosis entre los distintos tipos de objetos y de los modos de producción de signos.
- Diversidad de contextos y circunstancias espacio-temporales y psicosociales que determinan y relativizan los procesos de semiosis.

Necesitamos, por tanto, disponer de un modelo semiótico más completo que el expuesto en los capítulos anteriores que tenga en cuenta la trama de objetos y procesos interpretativos puestos en juego en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. El modelo nos permitirá, asimismo, coordinar distintas aproximaciones epistemológicas a la educación matemática, en particular el enfoque conceptualista-idealista y el antropológico.

En las próximas secciones introducimos la noción de función semiótica y sus tipos, mostrando ejemplos en las diferentes categorías propuestas.

Describimos también la técnica que denominamos *análisis ontológico-semiótico* que se utilizará para determinar significados institucionales y personales, así como sus interacciones.

7.2. FUNCIONES SEMIÓTICAS

En lo que sigue haremos un uso más amplio que el realizado en capítulos anteriores del término 'significado', interpretando los triángulos epistemológicos (Steinbring, 1997; Ogden y Richard, 1923), aplicando algunos elementos de la teoría del lenguaje de Hjemslev (1943) de la que hemos presentado una síntesis en el Capítulo 2. En particular adoptaremos la noción de función de signo, llamada función semiótica por Eco (1979). Esto nos va a permitir identificar diversos tipos básicos de significados elementales, teniendo en cuenta la naturaleza diversa del contenido de la función semiótica.

El modelo semiótico de la cognición matemática que esbozamos requiere también tener en cuenta la noción pragmática de *contexto*, que concebimos en términos muy generales, como el conjunto de factores extra e intra lingüísticos que soportan y determinan la actividad matemática, y por tanto, la forma, la adecuación y el significado de los objetos puestos en juego en la misma. Incluye, por tanto, los diversos aspectos condicionantes de la actividad matemáticas, asumidos en la posición constructivista social (Ernest, 1993). Se puede describir como el marco o escenario en que se desarrolla la actividad matemática, y que viene caracterizado por,

- sus elementos interpretativos (convenciones, reglas) e instrumentales (recursos tecnológicos);
- su organización interna, esto es, la naturaleza sistémica de las relaciones entre sus elementos;
- su asociación a sistemas expresivos que requieren traducciones mutuas.

Habitualmente, en el trabajo matemático usamos unos objetos en representación de otros, en especial de los objetos abstractos o tipos de objetos, existiendo una correspondencia, con frecuencia implícita, entre el objeto representante y el representado:

> "Hay palabras, símbolos u otros objetos ostensivos que significan o expresan algo, representan o simbolizan algo que está más allá de ellos

mismos, y lo hacen de un modo que es públicamente comprensible" (Searle, 1997, p. 76).

Tanto los conceptos como las situaciones-problemas vienen expresados por el lenguaje, mediante el que se describen sus propiedades características. Palabras, símbolos, gráficos, e incluso objetos físicos, desempeñan frecuentemente el papel de "sistemas de representación", esto es, reemplazan otra cosa o uno de sus aspectos. Este es el uso *referencial* del lenguaje. Pero en nuestra modelización, este papel de representación no queda asumido en exclusividad por el lenguaje: los mismos objetos abstractos- en consonancia con la semiótica de Peirce- las situaciones-problemas, acciones, argumentos, pueden ser también signos de otras entidades.

Por otro lado, en algunas circunstancias un elemento del lenguaje, una definición, propiedad o acción puede formar parte de la fenomenología (situaciones - problemas) de uso para otro objeto matemático. Por ejemplo, la idea de "mediana" es un concepto cuando emerge de la acción de ordenar conjuntos de datos y tomar el valor central, pero es un caso particular –por tanto un ejemplo que forma parte de la fenomenología- cuando se considera el concepto de medida de posición central o el más amplio de resumen estadístico. Ello es debido a la característica de la actividad matemática de construir conceptos complejos a partir de otros previamente formados. Aquí la mediana, la media, la moda "cooperan" para componer "las medidas de posición central". De esta manera se establecen también dependencias (o funciones) de tipo operacional entre los objetos.

En el modelo semiótico que proponemos para describir la cognición matemática, las funciones semióticas se clasifican en dos grandes tipos: referenciales y operacionales, que responden a los dos tipos de teorías semióticas descritas en la sección 2.4 del Capítulo 2. Se trata de articular ambas maneras de ver el papel del lenguaje en la actividad y el pensamiento matemático, ya que, al igual que Ullmann (1962) pensamos que las teorías referenciales y operacionales (o pragmáticas) aportan puntos de vista complementarios.

Como hemos expuesto en el Capítulo 2, la teoría del lenguaje de Hjemslev concibe el análisis de los textos como progresión exhaustiva y deductiva de la clase al componente y al componente del componente, y como identificación de las dependencias entre las distintas partes, sus componentes y el texto en su conjunto.

Una noción clave en la teoría de Hjemslev es la de *función de signo* - que Eco (1979, p. 83) designa como *'función semiótica'*. Entre los posibles tipos de dependencias que se pueden identificar entre partes de un texto destacan aquellas en que una parte *designa* o *denota* otra cosa; la primera (*plano de expresión*) funciona o se pone en representación de la segunda (*plano del contenido*), esto es, señala hacia un contenido que hay fuera de la expresión. Pensamos que la noción de función semiótica se puede concebir, al menos metafóricamente, como "una correspondencia entre conjuntos", poniendo en juego tres componentes:

- un plano de expresión (objeto inicial, considerado frecuentemente como el signo);
- un plano de contenido (objeto final, considerado como el significado del signo, esto es, lo representado, lo que se quiere decir, a lo que se refiere un interlocutor);
- un criterio o regla de correspondencia, esto es, un código interpretativo que regula la correlación entre los planos de expresión y contenido, estableciendo el aspecto o carácter del contenido referido por la expresión.

Para Eco (1979) la correlación entre expresión y contenido se establece de modo convencional, lo que no quiere decir arbitraria, sino que es coextensiva de *vínculo cultural*. En el texto "Semiótica y epistemología del lenguaje", U. Eco resalta que

> "la correlación semiótica no debe ser entendida como sustitución de lo idéntico por idéntico, como equivalencia ciega. En cambio el signo es siempre lo que se abre a algo distinto. No existe interpretante alguno que, al aclarar el signo que interpreta, no desplace, al menos mínimamente, sus límites" (Eco, 1984, p. 72).

Con frecuencia las funciones semióticas vienen dadas por uno de sus tres componentes, quedando los otros dos implícitamente establecidos. Hablar de significado supone que hay, además, una expresión y un código interpretativo. El signo, por tanto, no supone mera correspondencia entre expresión y contenido; de un algo que está en lugar de otro algo, sino que alguien debe hacer una posible *interpretación*.

Consideramos necesario tener en cuenta que, además de estas dependencias representacionales, existen otras dependencias de naturaleza mas bien de tipo ecológico: unas partes del texto son usadas por otras como componentes o medios para formar unidades significativas nuevas. Entre los partes componentes y la unidad resultante se establecen relaciones de tipo operacional. Con las palabras no sólo se *dicen* cosas, sino que también se *hacen* cosas (Austin, 1971).

La noción de función semiótica nos permite proponer una interpretación del conocimiento y la comprensión de un objeto O (en cualquiera de las categorías definidas anteriormente) por parte de un sujeto X (persona o institución) en términos de las funciones semióticas que X puede establecer, en unas circunstancias fijadas, en las que interviene el objeto O. Puesto que cada función semiótica implica un acto de semiosis por un agente interpretante, constituye, para nosotros un *conocimiento* y hablar de conocimiento equivaldrá a hablar de significado, esto es, de función semiótica. En correspondencia con la diversidad de funciones semióticas que se pueden establecer entre las diversas entidades introducidas en los capítulos anteriores, derivaremos una variedad paralela de tipos de conocimientos.

Al comparar este modelo de conocimiento con otros modelos teóricos, un punto diferenciador será la descomposición analítica que proponemos para los conocimientos, tanto personales como institucionales, que amplían divisiones clásicas, como la de conocimiento procedimental y conceptual.

7.3. TIPOS DE FUNCIONES SEMIÓTICAS

Tanto el objeto inicial como final en una función semiótica pueden estar constituidos por uno o varios de los elementos primarios considerados en el Capítulo 4. Las entidades primarias consideradas pueden desempeñar el papel de expresión o de contenido en las funciones semióticas, resultando, por tanto, diferentes tipos de tales funciones, algunas de las cuales pueden interpretarse claramente como procesos cognitivos específicos (generalización, simbolización, etc.). Atendiendo al plano del contenido (significado) estos tipos se reducen a los siguientes:

(1) Significado linguístico: Cuando el objeto final, o contenido de la misma, es un término, expresión, gráfico u otro elemento linguístico. Los siguientes ejemplos muestran este tipo de significado:

- Cuando el símbolo *Me* se usa en lugar de la palabra "mediana".
- El símbolo Pn (o n!) representa la expresión simbólica (n-1)(n-2)...1
- En la frase siguiente, "En el histograma de la figura x, ¿cuál es la frecuencia absoluta del intervalo modal?", la palabra 'histograma' se refiere a un gráfico que se muestra en la figura. También las expresiones 'frecuencia absoluta', e 'intervalo modal' se refieren a objetos ostensivos observables en la figura (un número escrito sobre el eje de ordenadas, un intervalo identificable sobre el eje de abscisas.
- La expresión 'tabla de multiplicar' remite a la disposición tabular de los numerales correspondientes.

(2) Significado situacional: Cuando el objeto final es una situación-problema, como en los siguientes ejemplos:

- En general, la descripción verbal, gráfica o mixta de una situación-problema reemplaza o está en lugar de la situación problemática real. Este es el caso de todas las descripciones de problemas que hemos presentado en los ejemplos anteriores. Tal descripción es un objeto diferente de la propia situación.
- Cuando un fenómeno viene representado por una simulación (p.e., los modelos de urnas permiten representar una variedad de problemas probabilísticos).

(3) Significado conceptual: Diremos que una correspondencia semiótica es de tipo conceptual cuando su contenido es un concepto-definición, como en los ejemplos siguientes:

- En las definiciones de un concepto, por ejemplo, "un ángulo es un par de semirectas que tienen el mismo origen", la palabra 'ángulo' remite a al concepto-definición correspondiente.
- En expresiones tales como, " Sea μ la esperanza matemática de una variable aleatoria ξ", o "Sea f(x) una función continua". Las notaciones μ, ξ, f(x), o las expresiones 'esperanza matemática', 'variable aleatoria' y 'función continua', se refieren a conceptos matemáticos regulados por sus respectivas definiciones.

(4) *Significado proposicional*: Cuando el contenido es una propiedad o atributo de un objeto.

- Las descripciones de propiedades, tales como "la mediana es un estimador robusto" o "la mediana coincide con la media en distribuciones simétricas" remiten a relaciones entre conceptos.

(5) *Significado actuativo*: Diremos que una función semiótica es de tipo actuativo cuando su contenido es una acción u operación, tal como un algoritmo o procedimiento. En cualquier proceso de cálculo se establecen dependencias entre distintas partes de la secuencia que son de naturaleza actuativa u operatoria.

- Por ejemplo, la expresión (2/3)(12) está indicando (esto es, significa) "Multiplica por 2 el número 12 y divide por 3 el resultado".
- Un menú en un programa informático remite a un algoritmo de cálculo. Por ejemplo, en el programa Statgraphics, el menú "Percentiles", dentro de la opción "Describe, Numerical Variables, One variable analysis" remite al cálculo de percentiles. Cuando el alumno pulsa esta opción del menú está indicando que quiere realizar el cálculo de percentiles.
- También en los programas informáticos, un icono gráfico remite con frecuencia a procedimientos. Por ejemplo, los iconos de cortar y pegar en Word o los iconos de Histogramas y gráficos de caja en Statgraphics.

(6) *Significado argumentativo:* cuando el contenido de la función semiótica es una argumentación, como por ejemplo:

- En la frase "demostración del teorema central del limite", nos referimos a una argumentación.

Además de estos tipos básicos de funciones semióticas deducidos teniendo en cuenta los tipos de entidades primarias del contenido, podemos diferenciar variantes según la faceta desde las cuales se consideran dichas entidades:

- según el agente que interpreta el objeto (personal, institucional)
- según el grado de complejidad del objeto (elemental, sistémico)
- según el nivel de abstracción/concreción (extensiva, intensiva)
- según el carácter ostensivo /no ostensivo (ostensiva, no ostensiva)
- según el papel desempeñado por la expresión (referencial, instrumental)

Si atendemos a las entidades secundarias, como praxis, logos, praxeologías[2], hablaremos de significado praxémico, discursivo, praxeológico, etc.

7.4. EL ANÁLISIS ONTOLÓGICO - SEMIÓTICO COMO TÉCNICA PARA DETERMINAR SIGNIFICADOS

La noción de función semiótica y la tipología de objetos y facetas que hemos descrito en secciones previas nos servirán para desarrollar una técnica analítica que nos permitirá determinar o caracterizar significados que se ponen en juego en la actividad matemática y los procesos de enseñanza y aprendizaje. En síntesis consiste en realizar un análisis sistemático de los objetos y funciones semióticas que se ponen en juego en un segmento de actividad matemática.

Para aplicar esta técnica se requiere disponer de los textos con la planificación del proceso instruccional, transcripciones del desarrollo de las clases, entrevistas y respuestas escritas a las pruebas de evaluación aplicadas. En definitiva, el análisis se aplicará a un *texto* que registra la actividad matemática desarrollada por los sujetos participantes. Llamaremos *análisis ontológico-semiótico* (o simplemente, análisis semiótico) de un texto matemático a su descomposición en unidades, la identificación de las entidades puestas en juego y las funciones semióticas que se establecen entre los mismos por parte de los distintos sujetos.

El análisis ontológico-semiótico será pues, para nosotros, la indagación sistemática de los significados (contenidos de las funciones semióticas) puestos en juego a partir de la transcripción del proceso, y de cada una de las partes en que se puede descomponer dicho texto, para un interpretante potencial (análisis a priori). Cuando el texto corresponde al protocolo de respuestas de los sujetos en interacciones efectivas el análisis permitirá caracterizar los significados personales atribuidos *de hecho* por los emisores de las expresiones (análisis a posteriori). En ambos casos se pueden confrontar con los significados institucionales de referencia, lo que permite formular hipótesis sobre *conflictos semióticos* potenciales y contrastarlos con los efectivamente ocurridos. Algunos de estos conflictos

[2] Las entidades praxis y logos (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997) se pueden asimilar dentro de nuestra modelización cognitiva como agrupamientos secundarios de las entidades primarias, problemas y acciones (praxis) y conceptos, propiedades y argumentos (logos).

pueden pasar desapercibidos por el profesor y, por tanto, no tenidos en cuenta en el proceso de estudio.

El análisis semiótico ayudará a formular hipótesis sobre puntos críticos de la interacción entre los diversos agentes en los cuales pueden haber lagunas o vacíos de significación, o disparidad de interpretaciones que requieran procesos de negociación de significados y cambios en el proceso de estudio. El análisis se basará en descomponer el texto en unidades, que denominaremos semióticas. El criterio para definir las unidades de análisis será cuando se cambia de problema a estudiar dentro del campo de problemas considerado, se pasa del enunciado del problema al desarrollo de una acción, el empleo de una notación, al uso o identificación de una propiedad, o a la descripción, sistematización y validación de las soluciones. Es decir, tendremos en cuenta para delimitar las unidades de análisis los momentos en los cuales se ponen en juego alguno de los seis tipos de elementos introducidos en nuestro modelo teórico o también entidades mixtas derivadas.

En principio cada *unidad* se puede descomponer en tantas *subunidades* como términos y expresiones matemáticas contenga, o también varias unidades se pueden agrupar y constituir unidades semióticas más extensas. Esto puede hacer muy laborioso el análisis de las posibles interpretaciones. Será el profesor o investigador, dependiendo de los fines que pretenda, quién fijará el nivel de análisis necesario, teniendo en cuenta el *medio cognitivo* sobre el que se desarrolla el proceso, esto es, los conocimientos que se consideran transparentes en el proceso instruccional correspondiente.

Consideramos el análisis semiótico "a priori" como etapa previa e importante del análisis didáctico-matemático porque permitirá identificar el sistema de entidades que se ponen en juego en el estudio de un contenido matemático, los cuales requerirán procesos instruccionales específicos. Este análisis nos va a permitir describir el "significado institucional pretendido" del contenido estudiado y la distribución temporal de sus distintos elementos.

La valoración del carácter más o menos completo del significado pretendido requiere disponer de un patrón de comparación que denominaremos *significado (institucional) de referencia*. Esta comparación entre significados institucionales se puede describir como la "transposición didáctica" localmente implementada en el proceso de estudio. En el Anexo

2 incluimos un significado de referencia para la mediana, elaborado a partir del análisis de diversos textos y de la práctica del análisis estadístico.

En los siguientes apartados presentaremos algunos ejemplos de esta metodología, aplicados al análisis de los significados implementados en un proceso de estudio de la mediana propuesto en un libro de secundaria (Anexo 1). La experiencia se realizó en un curso de 1º de Magisterio con estudiantes que no habían estudiado antes estadística.

En la sección 7.5 aplicamos la técnica al análisis de una parte del texto considerada (Anexo 1), sin pretender hacer un análisis exhaustivo de todas las posibles interpretaciones que los diversos agentes pueden realizar de todas las unidades de análisis en que se puede descomponer la crónica.

El análisis semiótico del texto tomado como ejemplo, tiene el carácter de análisis a priori (o potencial) ya que se refiere a las interpretaciones (y los conflictos semióticos) que puede poner en juego un alumno hipotético que estudie la mediana en este "sistema didáctico". En consecuencia, los significados que aquí mencionamos son una muestra de los que efectivamente pudieran acontecer.

7.5. DETERMINACIÓN DE SIGNIFICADOS INSTITUCIONALES

Para ejemplificar las nociones teóricas que acabamos de introducir analizaremos en este apartado los conocimientos (entendidos como funciones semióticas) y conflictos semióticos potenciales identificables en una parte del texto presentado en Anexo 1. En la tabla 7.1 reproducimos la parte del texto que vamos a analizar y las unidades primarias de análisis; dada la extensión de un análisis completo analizaremos como ejemplo las unidades U1, U2, U3, U4 y U8. En la tabla 7.2 listamos las entidades matemáticas puestas en juego en el texto completo, que serán las unidades elementales del análisis. A continuación analizamos el texto, mostrando las funciones semióticas y conflictos semióticos potenciales.

7.5.1.Unidades de análisis. Significados elementales

Unidad U0:

El título de la lección "La mediana" es la primera unidad de análisis del texto y nos sirve para ejemplificar la faceta elemental-sistémico de los objetos matemáticos. Aquí el término 'mediana' no se refiere al concepto-definición correspondiente, sino a todo el sistema de prácticas operativas y discursivas que van a ser presentadas en el resto del texto. Este sistema de prácticas es lo que significa aquí, localmente, el término 'mediana' y puede diferir del sistema de prácticas desarrollado por otro libro de texto del mismo nivel educativo. También será diferente del significado que se le atribuye en el contexto institucional de los estadísticos profesionales.

Tabla 7.1: El texto y las unidades primarias de análisis

U0	<u>La mediana</u>
U1	Entre las medidas de centralización, la media aritmética es generalmente la que mejor representa a un conjunto de datos♦,
U2	ya que en el cálculo de la media intervienen todos los datos. ♦
U3	Sin embargo, hay casos en que la mediana representa mejor a un conjunto de datos, ♦
U4	como ocurre en el siguiente ejemplo:
...	*En una oficina, los sueldos de las cinco personas que trabajan en ella son 60.000 pts, 70.000 pts, 80.000 pts, 90.000 pts y 380.000 pts ¿Qué cantidad puede representar mejor estos cinco sueldos?* ♦
U8	***La mediana de un conjunto ordenado de datos de una variable es el valor que deja igual número de datos por encima de él que por debajo de él.*** ♦

Tabla 7.2: Entidades matemáticas (unidades elementales)

Praxis	Lenguaje	Logos
Situaciones: Búsqueda de un valor representativo de un conjunto de datos con valores atípicos *Acciones*: Cálculo de la media Obtención de frecuencias acumuladas Cálculo de la mediana con datos no agrupados; número par e impar de valores; Cálculo de la mediana con datos discretos agrupados en una tabla de frecuencias	*Términos y expresiones*: mediana, medidas de centralización, media aritmética, representa, conjunto de datos; ordenado, variable, valor *Notaciones*: $\bar{X} = (60.000 + ... + 380.000) : 5$ $Me = 136.000\ pts$ *Representaciones:* Tabla de frecuencias	*Conceptos*: mediana, medidas de centralización, media aritmética, representación, conjunto de datos; ordenación, variable, valor. *Propiedades*: La media mejor representante (1) La mediana, mejor representante que la media cuando existen valores atípicos" (2) En el algoritmo de cálculo de la media intervienen todos los datos *Argumentos*: Justificaciones de (1) y (2)

Unidad U1:

La propia expresión de U1 deberá ser interpretada globalmente constituyendo una unidad semiótica. A su vez se puede descomponer en otras subunidades:

U1-1: medidas de centralización; U1-2: media aritmética; U1-3: conjunto de datos;

U1-4: mejor representa a un conjunto de datos.

El autor del texto usa la expresión U1 como parte de la motivación o justificación del proceso de estudio de la mediana que se presenta en el texto analizado. La media se presenta en el libro de texto como una medida de centralización de un conjunto de datos inmediatamente antes de esta sección, resaltando su carácter de valor representativo. Mediante U1 quiere expresar que no siempre (aunque sí en la mayoría de los casos) la media es el mejor representante. El significado de este texto para el autor está ligado al texto precedente y también al texto que sigue (presentación de situaciones en que se debe elegir un representante diferente).

Para el profesor los términos y expresiones que componen U1 son transparentes, no precisan interpretación, funcionando de manera elemental. El alumno tiene que descomponer U1 en sus términos constituyentes para asignarle un significado e interpretar dichos elementos. En este momento del proceso de estudio, el alumno puede atribuir un significado a U1-2 (la media aritmética), ya que acaba de ser estudiada, pero, puesto que no lo ha estudiado, antes puede tener dificultades con U1-1, U1-3 y U1-4, ya que como medidas de centralización sólo conoce hasta este momento la media, y a la expresión "valor representante de una colección de datos" no se le ha asignado un significado (sólo se ha usado para afirmar que "la nota media 7 es la que mejor representa a las calificaciones 7, 8, 6, 5 y 9).

¿Qué significa para el alumno que un valor *represente* a otros? Desde el punto de vista matemático se afirma que la media es un representante de un conjunto de datos porque la suma de las desviaciones de los datos a la media es cero. Pero en otros casos para afirmar tal representación se requiere que el valor elegido no se vea afectado por valores extremos atípicos (mediana).

En U1 la media aritmética funciona intensionalmente (abstracta) cuando se dice que "la media representa a un conjunto de datos", ya que se habla de manera genérica, mientras que cuando se afirma que "la media es una medida de tendencia central", la media funciona de manera extensional (el objeto media como ejemplar o miembro de una colección). También vemos aquí que el concepto de “media” se pone en representación del concepto de “medidas de tendencia central”, lo que indica que en una función semiótica la expresión no tiene porqué ser una entidad lingüística.

Unidad U2:

El uso que hace el autor del texto de U2 es el de servir de justificación a la afirmación hecha en U1. Ambas unidades son interdependientes, U2 es el instrumento con que pretende validar U1. Para el alumno la comprensión de la expresión requiere recordar cómo se calcula la media e interpretar la subexpresión 'intervienen todos los datos' como el hecho de que se suman todos los valores de la variable estadística. Interviene una entidad actuativa (cálculo de la media) y una propiedad de dicha entidad.

Desde el punto de vista del investigador, U2 no puede servir como validación de U1. El hecho de que en el cálculo de la media intervengan todos los valores de la variable no es la razón por la cual la media “es generalmente” el mejor representante. Precisamente, en el ejemplo del conjunto de datos con un valor atípico que se estudia a continuación, esa característica es la razón por la cual la media deja de ser buen representante. Encontramos aquí un ejemplo de conflicto semiótico entre dos agentes institucionales.

Unidad U3:

Para el autor esta expresión forma parte de la secuencia que trata de justificar el estudio de la mediana, asignándole la propiedad de ser "mejor representante" en algunos casos. El estudiante puede tener dificultades para comprender la expresión, tanto por el término 'mediana' (al que aún no se ha asignado un significado) como por el término 'representa' según se ha indicado anteriormente.

Unidad U4:

Desde el punto de vista del autor, se trata de una expresión que designa un ejemplo particular de un tipo de problemas en los que se debe encontrar un valor representativo de un conjunto de datos en el caso de que exista algún valor atípico (380.000 pts). En este caso la media no se considera adecuada al ser un valor bastante diferente de la mayor parte de los datos de la colección (aunque estará más próxima al valor atípico). Aquí se está suponiendo que “el valor representativo” debe ser un valor próximo a la mayoría de los datos. Estas interpretaciones no son compartidas por el estudiante en este momento del proceso. ¿Qué es representar a una colección de datos? ¿En qué circunstancias se necesita representar una colección de datos por un único valor? Estas son cuestiones básicas para dotar de significado a la tarea propuesta y, por tanto, a todo el contenido pretendido.

La correspondencia semiótica entre ejemplar de tarea y el tipo correspondiente, así como entre el modo particular de actuar para resolverla y la técnica generalizada, no puede ser establecida por el estudiante, ya que la constitución de tales tipos no se contempla en el proceso. Parece poco probable que el alumno ordene de menor a mayor el conjunto de datos y proponga el "valor central" de la serie ordenada como representante. La presentación de esta técnica por parte del profesor parece inevitable dado el carácter convencional de la expresión "mejor representante" y su dependencia de las características de la variable estadística.

<u>Unidad U8:</u>

Para el autor del texto esta expresión es la definición del concepto de mediana, una nueva medida de centralización de una colección de datos estadísticos que se caracteriza por dividir la colección de datos, supuesta ordenada, en dos partes de igual tamaño.

Desde la posición del investigador la definición dada no es válida en general ya que las desigualdades que se indican en el enunciado no son estrictas sino mayor o igual (menor o igual). En el caso de haber valores repetidos la definición dada no caracteriza la mediana. En el ejemplo propuesto en U19 y U20 (datos repetidos) la mediana es 14. Pero datos inferiores a 14 hay 4, y datos por encima de 14 hay 8. La aplicación de esa regla requiere una formulación diferente para aceptar que 14 es la mediana.

Para el alumno que se enfrenta por primera vez a esta clase de problemas, la comprensión de la expresión U8 requerirá atribuir significado a las dos subexpresiones siguientes: U8-1: ‘conjunto ordenado de datos de una variable'; U8-2: 'valor que deja igual número de datos por encima de él que por debajo de él'.

No es suficiente con entender los términos y expresiones del enunciado de la regla. También hay que dominar las técnicas de su aplicación y, además, discriminar las diversas circunstancias en que se usa.

El texto desarrolla tres prácticas actuativas distintas para calcular la mediana: U9 (identificación del valor central de la serie ordenada cuando el número de datos es impar), U12 (cálculo de la media de los dos datos centrales cuando el número de datos es par) y U23 (identificar el primer valor de la variable que corresponde a la frecuencia absoluta acumulada inmediatamente superior a la mitad del número de datos). La forma de expresar el resultado de las prácticas, *la mediana es ...*, hace que el estudiante se encuentre aquí con tres nuevas definiciones de la mediana cuya equivalencia con la caracterización inicial no es evidente ni inmediata. Esto puede explicar algunos de los errores encontrados en diversas investigaciones sobre la mediana. Si decimos que la mediana "es el valor central de la serie de datos", el alumno, ante una tabla de frecuencias puede dudar si el valor central a que se refiere "la definición" es el que corresponde a las frecuencias, o a la serie de valores de la variable. Cada definición de mediana produce un "sentido" diferente.

7.5.2. Significado institucional pretendido de la mediana. Comparación con el significado de referencia

El análisis realizado muestra la complejidad de cualquier noción matemática. El término 'mediana' designa a un sistema de prácticas (operatorias, discursivas) que progresivamente se va enriqueciendo a medida que avanza el proceso de estudio de un campo de problemas, en este caso, la búsqueda de un valor representante de un conjunto de datos, cuando tal conjunto tiene valores atípicos, se distribuye asimétricamente, o la escala de medida es ordinal.

El análisis también nos permite caracterizar los elementos del significado (institucional) local del contenido matemático pretendido en un proceso de estudio que tome exactamente como referencia el texto, como en el caso de la enseñanza efectuada a alumnos de Magisterio en nuestra experiencia. Estos significados pueden ser confrontados con el significado de referencia (Anexo 2) que hemos elaborado a partir de textos de estadística y teniendo en cuenta la práctica del análisis de datos. A continuación listamos estos elementos.

Lenguaje (específico):

- 'Mediana', Me.
- Disposición ordenada de datos en forma de listado (horizontal y vertical) (lo que permite visualizar la mediana como la posición central de la ordenación).
- Tablas de frecuencias

No se han empleado otras representaciones como percentil 50%; 2º cuartil; 5º decil, abscisa del punto del gráfico acumulativo de frecuencias absolutas (relativas) cuya ordenada es n/2 (0.5), diagramas acumulativos o gráfico de cajas.

Situaciones:

Se presentan ejemplos de los siguientes tipos de problemas:

- Búsqueda de un valor representativo de una colección de datos de una variable estadística cuantitativa con un valor atípico (con número impar y par de datos).
- Búsqueda de un valor representativo de una colección de datos de una variable estadística medible en escala ordinal.

No se estudian otro tipo de situaciones, como la estimación o contraste en pequeñas muestras.

Acciones:

Se presentan ejemplos de las siguientes técnicas:

- Cálculo de la mediana para un número impar de valores en datos no agrupados.
- Cálculo de la mediana para un número par de valores en datos no agrupados.
- Cálculo de la mediana en la tabla de frecuencias acumuladas de variables discretas.

No se presentan ejemplos de cálculo con datos agrupados en itervalos, a partir de representaciones gráficas o mediante uso de calculadora u ordenador.

Definiciones:

Se presentan cuatro caracterizaciones de la mediana (incluyendo la formulación como valor central):

- Valor que deja igual número de datos por encima de él que por debajo.
- El dato central de una colección de datos en número impar supuestos ordenados de menor a mayor.
- La media de los dos datos centrales de una colección de datos en número par, supuestos ordenados de menor a mayor.
- El primer valor de la variable que corresponde a la frecuencia absoluta acumulada, inmediatamente superior a la mitad del número de datos.

No se presenta la definición como caso particular de percentil o decil o a partir de la curva de distribución.

Propiedades

- Propiedad estadística: la mediana es un valor más representativo que la media en el caso de existir un valor atípico.
- La mediana es una medida de centralización.

No se estudian la mayoría de las propiedades de la mediana (a excepción de la mención a su carácter representativo de la colección de datos en algunos casos). Esto es lógico, debido al nivel para el que está previsto el libro.

Argumentos:

Se justifica el uso de la mediana como valor más representativo que la media mediante un ejemplo (cuando la serie de datos tiene un valor atípico). Es un tipo de argumentación informal, a partir de la comprobación de la propiedad para casos particulares.

No se incluyen demostraciones deductivas, ni se hace uso de los gráficos o del simbolismo algebraico.

En definitiva, en el texto se incluyen algunos elementos de lo que podría describirse como una "teoría matemática de las medidas de tendencia central de una variable estadística": definiciones de mediana y alguna propiedad característica. Pero dado el nivel de enseñanza no se sistematizan los conceptos y propiedades ni se incluyen sus correspondientes justificaciones. El componente teórico básico sería, en este caso, la demostración de que la mediana es el valor *a* de la variable estadística que hace mínima la suma de las desviaciones absolutas de los distintos valores respecto de *a*.

La elaboración de la relación de entidades puestas en juego en un proceso de estudio particular, agrupadas en las categorías que proponemos, es un recurso metodológico que permite hacer comparaciones entre significados institucionales diversos, e identificar posibles limitaciones y sesgos de las transposiciones didácticas.

Se aprecia en el autor del texto (Anexo 1) una preferencia por presentar elementos discursivos antes que los correspondientes elementos praxémicos (problemas y técnicas de solución). Primero se define el objeto y se le atribuyen propiedades y después se introducen los modos de actuar para resolver las tareas problemáticas. Dado que la "razón de ser" de las entidades discursivas se encuentra en los modos de resolver las clases de situaciones-problemáticas parecería recomendable invertir el orden del estudio. Incluso, en el nivel de enseñanza en que tiene lugar este proceso instruccional se podría prescindir del énfasis en presentar definiciones rigurosas, invirtiendo más tiempo en justificar (hacer razonable) la consideración del valor mediano como representativo.

Parecería deseable que se introdujera en este nivel de enseñanza recursos gráficos tales como el 'polígono acumulativo de frecuencias' y el 'diagrama del tallo y las hojas', los cuales permiten *visualizar* y calcular de manera complementaria la mediana.

7.6. DETERMINACIÓN DE SIGNIFICADOS PERSONALES

Aplicaremos la técnica descrita en la sección 7.5 al análisis del protocolo de respuesta de una estudiante a una prueba de evaluación tras el proceso de estudio de la mediana realizado mediante el texto del Anexo 1. A un grupo de alumnos de 1er curso de magisterio se les entregó copia de las dos páginas del manual en que se describe la mediana. Después de estudiado el tema individualmente durante un tiempo aproximado de 45 minutos se les aplicó la prueba que se indica en la tabla 7.3; incluimos, además las respuestas dadas por una estudiante. En el capítulo anterior hicimos un primer análisis que ahora completamos y presentamos también una síntesis del significado personal de la alumna respecto a la mediana.

Análisis de la Cuestión 1:

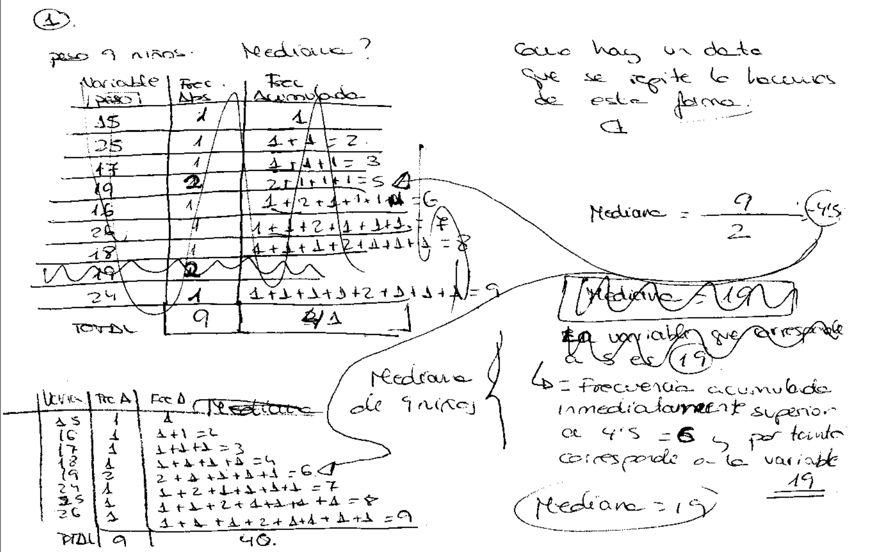
U1: Isabel da la misma definición presentada por el libro para la mediana, que exige que el conjunto de datos sea ordenado, “La mediana de un conjunto ordenado de datos de una variable es el valor que deja igual número de datos por encima de él que por debajo de él”. La mediana funciona en la respuesta de Isabel bajo su faceta intensional, esto es, como una generalidad regulada mediante una definición precisa, una regla que debe ser seguida fielmente.

En realidad la condición de que el conjunto de datos sea ordenado no es una exigencia del concepto de mediana, sino del procedimiento de cálculo. En el libro utilizado por Isabel no se menciona que si los datos no están ordenados, la mediana también es aplicable pero para determinar el valor que designamos como mediana el conjunto de datos se debe ordenar previamente.

Parece que el fallo de la estudiante en el 2º ejemplo que propone (Tabla 7.3) en U5, no es debido al olvido de la definición del concepto que se da, sino carencias del proceso de estudio seguido. Isabel ha hecho una interpretación literal de la definición y no ha tenido en cuenta que las expresiones ‘por encima’ y ‘por debajo’ quieren decir ‘mayor’ y ‘menor’, respectivamente.

Tabla 7.3. Prueba de evaluación sobre la mediana y protocolo de respuesta de Isabel

	1. Explica qué es la mediana y para qué se usa.
U1	Mediana: Es el valor que deja igual número de datos por encima de él que por debajo de él.
U2	Representa el número al que más se acercan un número de datos, es decir, la media más representativa que la media aritmética.
U3	Hay dos tipos de medianas: • Mediana de un nº impar de datos, la mediana sería el dato central. Ejemplo,
U4	80.000 $\boxed{60.000}$ 40.000
U5	• Mediana de un nº par de datos, la mediana es la media de los dos datos centrales. Ejemplo, 80.000 60.000 50.000 suma de ambos : 2 = x 90.000
	2. ¿En qué tipo de datos estadísticos es preferible usar la mediana en lugar de la media?
U6	En datos como por ejemplo: los sueldos de personas de una empresa, ya que hay sueldos que son más elevados que otros y habría mucha diferencia entre éstos.
	3. El peso en kilos de 9 niños es: 15, 25, 17, 19, 26,16, 18, 19, 24.

	a)¿Cuál es la mediana del peso de los 9 niños. **b)¿Cuál es la mediana si incluimos el peso de otro niño que es de 43 kg?** **c)En este caso, ¿sería la media aritmética un buen representante de los 10 datos? Razona la respuesta**
U7	a) 
U8	
U9	b) Si incluimos el peso de 43 kg. Frec Ab Frec. Acum. Total 10 41 M = 10/2 = 5 La frecuencia acumulada inmediatamente superior a 5 es 6 y por tanto corresponde a la variable 19
U10	c) La media aritmética no sería un buen representante de los 10 niños ya que hay un peso (43 kg) muy superior a los otros y por tanto la media aritmética que saldría no sería buena representativa

U2: La explicación que da Isabel “el número al que más se acercan un número de datos” es adecuada desde el punto de vista del significado institucional local implementado, aunque 'número de datos' tiene aquí el sentido de 'conjunto de datos'. En el texto usado en el estudio, para descartar el uso de la media en el ejemplo de los sueldos, se afirma que los sueldos de cada una de las cinco personas están bastante alejados de las 136.000 pts. En realidad, ese acercamiento se debe referir a la globalidad del conjunto de datos, no de cada valor en relación a la mediana (la suma de las desviaciones a un promedio para el conjunto de datos es mínima para la mediana).

Trata de caracterizar la mediana mediante una propiedad referida al mejor acercamiento del conjunto de datos. Este mejor acercamiento es su interpretación personal de la representatividad de las medidas de tendencia central.

En la expresión usada por Isabel, la mediana "representa al número que más se acerca ..." observamos la dificultad de la noción de representante.

Aquí usa la acción de representar para indicar que la palabra 'mediana' se refiere al número que cumple una cierta condición. Por el contrario, el uso de 'representación' en el texto relaciona el número mediana con el conjunto de datos.

U3: *la media más representativa que la media aritmética e*s una expresión incoherente; posiblemente quiere decir ‘medida de posición central más representativa que la media’, afirmación que en general es acorde con el significado de referencia. En el texto se afirma sólo que hay casos en que la mediana representa mejor a un conjunto de datos; en realidad la mediana siempre “optimiza” la representación. Sin embargo, en muchas situaciones se utiliza la media porque si las distribuciones son simétricas ambos estadísticos coinciden, y la media se calcula con procedimientos aritméticos más eficaces.

U4: *Hay dos tipos de medianas:* El uso de dos técnicas de cálculo diferentes de la mediana, según que en la situación dada intervenga un número impar o par de datos, lleva a Isabel a considerar como dos “tipos de medianas”. Desde el punto de vista del significado referencial de la mediana ambos tipos de medianas se consideran como ejemplares del concepto más general de mediana, ya que cumplen los requisitos exigidos a la definición general de mediana. Este nuevo y más general nivel de abstracción no se implementa en el proceso de estudio local propuesto en el libro.

Es cierto que hay razones para que el alumno considere que los dos números obtenidos por los procedimientos descritos son diferentes “objetos mediana”; en el segundo caso el número que se obtiene no coincide con ninguno de los datos propuestos, mientras que en el primero sí coincide. Su unificación vendrá identificando una propiedad común: la minimización, en ambos casos, de la suma de las desviaciones.

En la resolución de los problemas propuestos en la evaluación se observa la dificultad que supone para Isabel el paso de una tabla de frecuencias con valores repetidos a una serie ordenada; la reconstrucción ordenada del conjunto de datos es una técnica que requiere un tratamiento específico.

U5: Aquí vemos el conflicto semiótico que supone para Isabel la ordenación de las colecciones de datos. En el segundo caso, el ejemplo es incorrecto ya que no ordena los datos previamente.

Utiliza el recurso expresivo de trazar un recuadro alrededor del número que desea presentar como 'mediana'.

Análisis de la Cuestión 2:

U6: Se pretende que el sujeto manifieste sus conocimientos situacionales o fenomenológicos sobre la mediana, pidiéndole que describa el tipo de situaciones en las que, a la luz de la información dada en el texto, son específicas de venir representadas por la mediana (distribuciones asimétricas o cuando los datos son ordinales). Es claro que la demanda es excesiva para Isabel: se limita a dar un ejemplo de situación similar a la que se presenta en el texto. La justificación que propone, "ya que hay sueldos que son más elevados que otros y habría mucha diferencia entre éstos" no menciona la circunstancia que la distribución es asimétrica. La asimetría de la distribución, o el carácter ordinal de los datos son las dos características de las situaciones que obligan a usar la mediana en lugar de la media.

Análisis de la Cuestión 3a:

U7: La solución del problema propuesto es practicamente inmediata aplicando la técnica de la ordenación de la serie de datos: 15, 16, 17, 18, 19, 19, 24, 25, 26. Sin embargo, Isabel ha adquirido la técnica, bastante más compleja en este caso, de construir una tabla de frecuencias acumuladas. La traducción o paso de una a otra técnica y la discriminación de las situaciones óptimas de uso de cada una de ellas no ha sido trabajada de manera suficiente en el proceso de estudio. El hecho de que haya un dato repetido le lleva a preparar una tabla de frecuencias acumuladas como en las unidades U21, U22 y U23 del texto.

El proceso de estudio no ha enfatizado de manera suficiente la técnica de la ordenación de la serie de datos con valores repetidos y la relación entre esta técnica y el uso de la tabla de frecuencias acumuladas.

Ha sido capaz de transformar la colección de datos en una tabla de frecuencias absolutas y absolutas acumuladas, así como de aplicar la regla descrita en la unidad U23 del texto para determinar el valor de la mediana.

En U7 vemos las dudas de Isabel respecto a la condición de que los datos deben ordenarse previamente. Hace un primer cálculo de la mediana sin ordenar los valores, que en este caso particular concluye con un valor correcto (19).

U8:Vuelve a aplicar la misma técnica, esta vez ordenando la serie de valores. Muestra un dominio seguro de esta acción, aunque con una rigidez fuerte y el empleo de notaciones y cálculos innecesarios (expresión del recuento de frecuencias acumuladas y la suma de las frecuencias acumuladas, que en este caso es impertinente).

Análisis de la Cuestión 3b:

U9: Se muestra la rigidez de la técnica seguida, acorde con la definición del libro en el caso de datos repetidos: "primer valor que corresponde a la frecuencia absoluta acumulada inmediatamente superior a la mitad del número de datos". En efecto, 10/2 = 5, 5+1 = 6, que se alcanza al llegar al valor 19.

Tanto en U8 como en U9 se pone de manifiesto que Isabel confunde la noción de variable con la de valor: "variable 19".

U10: Se requiere hacer una interpretación de la propiedad de representatividad de las medidas de tendencia central que no ha sido formulada de manera explícita en el texto. El ejemplo de situación particular que se le ha propuesto es similar al estudiado en el proceso instruccional: la distribución de los datos es asimétrica porque hay un valor atípico. Este tipo de situación ha sido reconocido por Isabel en la situación dada.

Síntesis de conocimientos personales de Isabel sobre la mediana

A partir del análisis anterior, podemos inferir algunas características del significado personal que Isabel atribuye a la mediana, que, por supuesto, debemos interpretar con precaución, teniendo en cuenta las limitaciones de la prueba escrita realizada.

<u>Situaciones:</u> Isabel reconoce el uso de la mediana en situaciones en las cuales existe un valor atípico y también resolvió correctamente un problema en el que los datos eran ordinales (calificaciones categóricas de

puntuaciones escolares), que es mencionado en el texto, sin que se desarrolle un ejemplo.

Lenguaje: Usa correctamente términos y notaciones específicas del tema como 'mediana', 'M'. Introduce un elemento ostensivo original para designar la media: el recuadro del valor correspondiente. La disposición tabular de los datos ha resultado un recurso poco flexible en este caso.

Acciones: Selecciona el valor central de la serie de datos, pero no los ordena previamente. Calcula el promedio de los dos datos centrales cuando el número de datos es par. Conoce la técnica de cálculo de la mediana con datos repetidos y número total elevado de datos: Tabulación del conjunto de datos; cálculo de frecuencias absolutas y frecuencias acumuladas; cálculo de la mitad del número de datos; identificación del valor de la variable que corresponde a una frecuencia acumulada igual o inmediatamente superior a la mitad del número de datos. Sin embargo, la escritura del cálculo de las frecuencias acumuladas ha resultado un recurso innecesario.

Conceptos: Usa los conceptos[3] de mediana como dato central, media aritmética, frecuencia acumulada. Confunde las ideas de variable y valor.

Propiedades: Usa las propiedades de mediana como valor de la variable estadística, mediana como número al que más se acercan un número de datos y número más representativo que la media aritmética

Argumentaciones: Justifica que la mediana se debe aplicar en la distribución de los sueldos de las personas, "ya que hay sueldos que son más elevados que otros y habría mucha diferencia entre éstos". Justifica el uso de la técnica de cálculo de la mediana mediante las frecuencias acumuladas "porque hay un dato que se repite". No ha tenido en cuenta la justificación que se da en el texto, "cuando el número de datos es grande". Son justificaciones informales no deductivas, acordes con las presentada en el texto.

7.7. DIALÉCTICA ENTRE SIGNIFICADOS INSTITUCIONALES Y PERSONALES

El análisis del razonamiento de la alumna en la resolución de las tareas de evaluación nos permite tomar conciencia tanto de la complejidad

[3] En el sentido de conceptos - regla o definición.

semiótica de dicha prueba, como de las relaciones dialécticas entre los significados institucionales (puestos en juego en el texto) y los significados personales (correspondientes al sujeto que aprende).

La complejidad se manifiesta por el hecho de que cada término o expresión debe ser interpretado al menos implícitamente por el aprendiz, y que en unos casos tal interpretación puede requerir recordar un convenio establecido previamente ('medidas de centralización' es un nombre común a la media, la mediana y la moda), pero en otros es necesario movilizar un significado sistémico previamente elaborado (por ejemplo, la media aritmética).

La dependencia entre los significados personales e institucionales se observa porque el significado de las expresiones y entidades de las que el sujeto debe apropiarse son consecuencia de las informaciones y actividades propuestas por el profesor. Si entre el significado atribuido a la mediana no figura el ser el percentil del 50%, por ejemplo, el significado del aprendiz tendrá esa carencia. Igual ocurrirá si entre las tareas problemáticas propuestas no figura el caso de variables asimétricas sin valores atípicos (componente situacional), o el desarrollo de la técnica de cálculo de la mediana en el caso de variables continuas agrupadas en intervalos de clase (componente actuativo), etc.

Por otra parte, el proceso de apropiación progresiva de los significados por parte del aprendiz condiciona, a su vez, a los significados pretendidos e implementados y su secuenciación. La forma y el orden de presentación de las informaciones y tareas debe adaptarse a los conocimientos del aprendiz en cada momento, ya que tales conocimientos serán los códigos que permiten establecer las correspondencias pretendidas por el profesor entre expresiones y contenidos. Si el receptor de la información no dispone de los códigos necesarios para interpretar un mensaje, o el emisor no aporta claves explícitas para la activación del código pertinente, se producirá un conflicto semiótico y, por tanto, una discontinuidad en el proceso instruccional. El análisis semiótico del proceso puede permitir identificar los momentos en los cuales tienen lugar tales conflictos.

En nuestro ejemplo, una expresión crítica nos parece que es '*representación*' de una colección de datos por un valor de la variable, que es usada de manera sistemática en el proceso, pero de la que el aprendiz no ha tenido ocasión de apropiarse mínimamente. ¿Qué significa una tal representación? ¿En qué circunstancias se requiere que una colección de datos sea representada por un valor de la variable?

Otro conflicto semiótico potencial que encontramos en el ejemplo se refiere a la secuenciación entre las entidades conceptuales y proposicionales (componente discursivo del conocimiento) y las actuativas y situacionales (componente praxémico). En el texto se tiende a anticipar propiedades de la mediana (ser mejor representante que la media) y establecer la definición general, antes de presentar la práctica que constituye la razón de ser de tal definición. Se deja bajo responsabilidad del aprendiz responder a las delicadas cuestiones, ¿por qué se regula el uso de la palabra mediana de este modo? ¿qué utilidad tiene hacerlo así y no de otra manera?, pero cuya respuesta permite dotar de sentido al proceso instruccional en su conjunto.

También es conflictiva la existencia de distintos algoritmos de cálculo para la mediana según los tipos de datos y la propia noción de distribución de frecuencias.

7.8. SÍNTESIS E IMPLICACIONES

La idea de función semiótica presentada y la técnica de análisis semiótico se apoyan en la noción de *función de signo* de Hjemslev y en una interpretación personal de los triángulos epistemológicos descritos en la bibliografía, así como en nuestra teoría de los significados sistémicos de los objetos matemáticos. Su aplicación al análisis de textos y respuestas de alumnos nos ha permitido mostrar la complejidad ontológica y semiótica de la actividad matemática, incluso ante tareas elementales como las estudiadas. Pensamos que esta clase de análisis puede ayudar a superar una cierta ilusión de trasparencia ante los procesos de abstracción y razonamiento en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, al mostrar la multiplicidad de códigos que se ponen en juego. Esto nos permitirá identificar los puntos críticos, los factores condicionantes de los actos de semiosis y prever acciones didácticas para afrontarlos.

A nivel local, el análisis de las actuaciones de alumnos y profesores en el aula permite fijar la atención en procesos interpretativos específicos y en las dificultades inherentes a los mismos. A nivel global el análisis de estos campos de problemas y las prácticas operativas y discursivas que se requieren en su solución es un elemento esencial en el diseño, desarrollo y evaluación de procesos de enseñanza y aprendizaje, donde se debe orientar la selección de muestras representativas de los elementos descritos que caracterizan la competencia y comprensión matemática en cada contexto institucional.

Capítulo 8

ANÁLISIS DE PROCESOS DE INSTRUCCIÓN MATEMÁTICA: HACIA UNA TEORÍA DE LA INSTRUCCIÓN MATEMÁTICA SIGNIFICATIVA

8.1. Introducción
8.2. Modelización de la instrucción mediante procesos estocásticos
    8.2.1. Dimensiones de un proceso de instrucción matemática. Trayectorias muestrales
    8.2.2. El tiempo didáctico
    8.2.3. Trayectoria epistémica
    8.2.4. Trayectoria docente
    8.2.5. Trayectoria discente
    8.2.6. Otras trayectorias
8.3. Interacciones didácticas
    8.3.1. Interaccionismo simbólico y teoría de situaciones
    8.3.2. Configuraciones y trayectorias didácticas
    8.3.3. Configuraciones didácticas de referencia
    8.3.4. Análisis de las configuraciones didácticas empíricas
    8.3.5. Patrones de interacción, técnicas didácticas y contrato didáctico
    8.3.6. Criterios de idoneidad de las configuraciones y trayectorias didácticas
8.4. Síntesis e implicaciones

8.1. INTRODUCCIÓN

En los capítulos 3 a 7 hemos desarrollado un conjunto de nociones teóricas que configuran *un enfoque ontológico-semiótico* de la cognición matemática, en el que asignamos un papel central al lenguaje, a los procesos de comunicación e interpretación y a la variedad de objetos que se ponen en juego en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. La motivación inicial para la elaboración de las nociones introducidas (significados institucionales y personales entendidos como sistemas de prácticas, objetos emergentes, dualidades cognitivas, función semiótica) ha sido progresar en la articulación de diversos modelos teóricos existentes en Didáctica de las Matemáticas, tales como la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1986, 1997), Teoría de los Campos Conceptuales (Vergnaud, 1990), Teoría Antropológica (Chevallard, 1992, 1999).

Aunque en diversos trabajos se ha mostrado la utilidad de este modelo teórico para analizar los conocimientos matemáticos, tanto institucionales como personales, aún no se ha abordado el análisis de sus implicaciones sobre el problema verdaderamente didáctico, esto es, el estudio de los procesos organizados de generación y comunicación de los conocimientos matemáticos en el seno de una institución escolar. Nos referimos con la expresión *instrucción matemática* (o proceso de estudio dirigido) a dichos procesos de enseñanza y aprendizaje organizados, en los cuales intervienen unos determinados sistemas de prácticas matemáticas (conocimientos institucionales), unos sujetos (estudiantes) cuyo compromiso es la apropiación personal de dichas prácticas, el profesor o director del proceso de instrucción y unos recursos o medios instruccionales.

En el enfoque epistemológico de la Didáctica de la Matemática (Gascón, 1998) disponemos de la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) (Brousseau, 1997) que proporciona herramientas para analizar los procesos de instrucción matemática y valorar la idoneidad de tales procesos en términos de los aprendizajes matemáticos logrados. La asunción, por dicha teoría, de la hipótesis del aprendizaje matemático en términos de adaptación a un medio a-didáctico puede orientar de manera consistente la construcción de situaciones didácticas mediante las cuales los alumnos construyan los conocimientos matemáticos de manera significativa.

Ahora bien, en la práctica no todos los objetivos de aprendizaje matemático se pueden lograr mediante procesos de adaptación en situaciones a-didácticas. Esto es así, no sólo porque la re-invención de todos los conocimientos matemáticos por parte de los alumnos requeriría un tiempo didáctico ilimitado, o porque exigiría unas capacidades intelectuales excepcionales por parte de los alumnos, sino porque el componente discursivo, normativo y cultural de los conocimientos matemáticos requiere la implementación de momentos de institucionalización, en los que la enseñanza directa del profesor juega un papel esencial.

La articulación entre las situaciones a-didácticas y didácticas, entre los conocimientos y saberes que pueden ser estudiados mediante una "enseñanza directa" y los que podrían ser abordados mediante una construcción a-didáctica está lejos de ser obvia. Schneider (2001) ha planteado este problema de manera clara y directa: ¿Qué peso conceder al constructivismo? (p. 53). Esta autora analiza las tensiones entre la teoría de situaciones y la teoría antropológica con relación al concepto de adidacticidad, el axioma de existencia de las situaciones fundamentales, así como el diseño de organizaciones matemáticas y didácticas idóneas desde el punto de vista matemático. En este trabajo, Schneider sugiere también el interés de examinar "otros proyectos del mismo tipo que analicen las relaciones entre praxeologías didácticas y praxeologías matemáticas" (p. 54).

El foco de atención preferente de la Teoría de Situaciones ha sido la caracterización de la dimensión a-didáctica de las situaciones de aprendizaje matemático, pero esto no ha implicado que se olvide, dentro de este marco, el estudio del papel del profesor como constructor y gestor del medio en el que el alumno interactúa para construir el conocimiento matemático. Por ejemplo, Bloch (1999) se plantea como problema las modalidades de intervención del profesor: "¿Cuándo y cómo inducir conocimientos o saberes en el medio" (p. 138). Esta autora, sin salirse del marco de la teoría de situaciones, trata de desarrollarla en una dirección que considera productiva para el estudio de la contingencia: "trataremos de identificar un poco mejor el rol del profesor, los conocimientos que necesita para gestionar una situación de enseñanza/ aprendizaje, incluso en los niveles a-didácticos" (p. 139).

Margolinas (1992) se ha interesado por delimitar el campo de validez de la Teoría de Situaciones Didácticas: "Se trata de una teorización de las posibilidades del alumno comprometido en el juego matemático, y no de una descripción de las acciones efectivas del alumno en la resolución del problema, ni de una descripción de lo que pasa efectivamente en la clase, y esto en ningún momento del funcionamiento de la clase" (p. 120). Esta reflexión le lleva a formular su tesis nº 2: "El estudio del papel del profesor requiere la creación de conceptos y métodos específicos" (Margolinas, 1992, p. 120).

Nosotros consideramos que la Teoría de las Situaciones Didácticas proporciona un marco en el que es posible estudiar la articulación de las teorías mencionadas y analizar la interacción entre las funciones del profesor y los alumnos a propósito de un contenido matemático específico.

Para ello, ha sido necesario desarrollar nuevas herramientas e incorporar otras nociones de marcos teóricos relacionados que permitan describir de una manera detallada las interacciones que ocurren en el aula de matemáticas. Las nociones de patrón de interacción, negociación de significados, normas sociomatemáticas, aportadas por el *interaccionismo simbólico* (Bauersfeld y Cobb, 1995; Voigt, 1984; Godino y Llinares, 2000) son sin duda herramientas útiles para abordar esta problemática. Así mismo, nos parece necesario tener en cuenta nociones aportadas por teorías psicológicas del aprendizaje, como la "zona de desarrollo próximo" (Vygotsky, 1979) y los supuestos del aprendizaje verbal significativo basado en la recepción (Ausubel, 2000). Todos estos modelos teóricos pueden parecer incompatibles entre sí, pero una aproximación al estudio de los problemas didácticos desde un paradigma de complejidad sistémica, como el que propone Morin (1994), es posible encontrar complementariedades por encima de las divergencias aparentes[1]. La Teoría de las Funciones Semióticas (junto con la ontología matemática asociada) y las nociones teóricas que vamos a describir en este trabajo pueden permitir establecer conexiones y complementariedades entre las teorías mencionadas.

La idea principal de este Capítulo consiste en identificar en un proceso de instrucción matemática seis dimensiones o facetas que interactúan entre sí, cada una de las cuales se puede modelizar como un proceso estocástico, con sus respectivos espacios de estados y trayectorias. La interacción entre los distintos estados y trayectorias se describe mediante los constructos *configuración didáctica* y *trayectoria didáctica*, que nos proporcionan herramientas para identificar los *patrones de interacción* de una manera sistemática, así como hacer operativas las nociones de cronogénesis y topogénesis introducidas por Chevallard (1991).

Mostraremos también, con el análisis detallado de una configuración didáctica, cómo la Teoría de las Funciones Semióticas permite realizar análisis de tipo microscópico de episodios instruccionales que complementa el nivel intermedio de la teoría de situaciones.

El Capítulo lo hemos estructurado de la siguiente manera:

Comenzamos en la sección 8.2 indicando que un proceso de instrucción comprende distintas dimensiones interconectadas: epistémica (significados

[1] "Así es que, habría que sustituir al paradigma de disyunción /reducción /unidimensionalización por un paradigma de distinción /conjunción que permita distinguir sin desarticular, asociar sin identificar o reducir" (Morin, 1994, p. 34)

institucionales), docente (funciones del profesor), discente (funciones de los alumnos), mediacional (recursos materiales), cognitiva (significados personales), emocional (sentimientos y afectos). Cada una de estas dimensiones se puede modelizar como un proceso estocástico, para cuyos estados proponemos una categorización. En la sección 8.3 introducimos las nociones de interacción y configuración didáctica (tanto teórica como empírica). Finalmente, concluimos con una síntesis e implicaciones para la investigación y la práctica docente.

Aplicamos las nociones introducidas al análisis de una clase de matemáticas sobre cálculo de derivadas (1º curso de Bachillerato, alumnos de 16-17 años), cuya transcripción parcial se incluye en el Anexo 3. El ejemplo corresponde a una clase que no ha sido especialmente preparada, sino que es una sesión que se imparte de la manera habitual por un profesor que es reconocido entre sus colegas como "buen profesor". Nos parece que es representativa de una manera muy extendida de enseñar matemáticas en el nivel de bachillerato. Aunque el fragmento de clase es pequeño (solo hemos incluido en el Anexo 3 la transcripción de 13 minutos) se ponen en juego los diversos componentes o facetas de un proceso de instrucción matemática, permitiendo ejemplificar el tipo de análisis que consideramos útil para identificar fenómenos didácticos ligados a la implementación de los significados institucionales, identificación de conflictos semióticos, patrones de interacción didáctica y sus consecuencias en la génesis de los significados personales de los estudiantes.

8.2. MODELIZACIÓN DE LA INSTRUCCIÓN MEDIANTE PROCESOS ESTOCÁSTICOS

8.2.1. Dimensiones de un proceso de instrucción matemática. Trayectorias muestrales

Como hemos indicado, un proceso de instrucción comprende distintas dimensiones interconectadas: epistémica (significados institucionales), docente (funciones del profesor), discente (funciones de los alumnos), mediacional (recursos materiales), cognitiva (significados personales), emocional (sentimientos y afectos). Cada una de estas dimensiones se puede modelizar como un proceso estocástico.

En cada uno de dichas dimensiones podemos identificar un conjunto de elementos, (funciones, tareas, acciones, etc.), los cuales se secuencian en el tiempo. En cada realización de un proceso de instrucción matemática sobre un objeto matemático pretendido se pondrán en juego una muestra de elementos del significado pretendido del objeto (Godino, 2002), así como una muestra de las funciones docentes y discentes. También se seleccionarán unos recursos instruccionales específicos. Parece natural modelizar esta distribución temporal de funciones y componentes mediante procesos estocásticos[2], considerando tales funciones o componentes como sus estados posibles.

En cada realización del proceso instruccional (cada experiencia particular de enseñanza de un contenido matemático) se producen una serie de estados posibles y no otra. Es decir, se produce una *trayectoria muestral* del proceso, que describe la secuencia particular de funciones o componentes que ha tenido lugar a lo largo del tiempo. Distinguiremos seis tipos de procesos y sus correspondientes trayectorias muestrales:

(1) Trayectoria epistémica, que es la distribución a lo largo del tiempo de la enseñanza de los componentes del significado[3] institucional implementado. Estos componentes (problemas, acciones, lenguaje, definiciones, propiedades, argumentos) se van sucediendo en un cierto orden en el proceso de instrucción.

(2) Trayectoria docente: distribución de las funciones/tareas/acciones docentes a lo largo del proceso de instrucción.

(3) Trayectorias discentes: distribución de las funciones/acciones desempeñadas por los estudiantes (una para cada estudiante).

(4) Trayectoria mediacional, que representa la distribución de los recursos tecnológicos utilizados (libros, apuntes, manipulativos, software, etc.).

(5) Trayectorias cognitivas: cronogénesis de los significados personales de los estudiantes.

[2] Familia de variables aleatorias que depende del tiempo. La modelización mediante procesos estocásticos es parcial ya que no pretendemos definir un espacio de probabilidad para los sucesos implicados. Nos limitamos a identificar los espacios de estado de los procesos.

[3] Aquí el "significado" lo interpretamos dentro del marco de la TFS como "sistema de prácticas operativas y discursivas"

(6) Trayectorias emocionales: distribución temporal de los estados emocionales (actitudes, valores, afectos y sentimientos) de cada alumno con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido.

Cada una de estas trayectorias es una realización (un caso posible) de un proceso estocástico, puesto que el proceso de instrucción tiene unas características no deterministas. Incluso aunque la planificación haya sido cuidadosa, siempre hay elementos aleatorios que producen cambios en cada una de las trayectorias anteriores, por la necesidad de adaptar la enseñanza planificada a las características y requerimientos de los alumnos.

Al observar un proceso instruccional, las secuencias en el tiempo de los estados posibles constituyen trayectorias muestrales empíricas. Desde un punto de vista teórico y a efectos de disponer de elementos de referencia sobre su representatividad interesa indagar las características potenciales de las trayectorias instruccionales. En las secciones 2.3 a 2.5 indicamos los principales estados posibles de las tres primeras trayectorias mencionadas (epistémica, docente y discente). La categorización de los estados de las restantes trayectorias será objeto de otros trabajos.

8.2.2. El tiempo didáctico

Las actividades de enseñanza y aprendizaje tienen lugar en el aula, espacio usual de la interacción entre profesor y alumnos, y también fuera del aula (espacio asignado para las tutorías, la biblioteca y el domicilio del alumno). Estas actividades tienen además una duración temporal: el currículo prevé un tiempo en el que se marca el comienzo y el final del proceso de estudio de un tema matemático (una sesión de clase, una semana a razón de 3 horas a la semana, etc.). Pero esta medida temporal apenas indica la duración que el profesor y los alumnos dedican efectivamente a las diversas actividades que se designan con los términos 'enseñanza' y 'aprendizaje'. La duración efectiva que el profesor dedica a las actividades de enseñanza y la duración que los alumnos dedican efectivamente a realizar las actividades propuestas por el profesor, y en particular, el tiempo que invierten en el estudio individual del contenido pretendido son factores determinantes del aprendizaje finalmente logrado. En consecuencia, el *tiempo didáctico* debemos concebirlo como un vector cuyas componentes son los valores de las duraciones temporales de las diversas actividades docentes y discentes que tienen lugar en un proceso de estudio.

Tenemos que ser conscientes de que excepto la duración de las interacciones profesor-alumno que tienen lugar en la clase, las restantes duraciones son difícilmente accesibles a la observación externa, en particular el tiempo que cada alumno dedica al estudio personal del contenido pretendido. Este tiempo es, sin duda, un factor crucial para el aprendizaje.

El *tiempo de aprendizaje* podemos definirlo como la duración que un alumno requiere para lograr los objetivos de aprendizaje relativos a un contenido dado. Esta duración temporal es obviamente diferente del tiempo de enseñanza, tendrá un desfase temporal respecto de la enseñanza y será específica de cada estudiante. La estimación de estas duraciones presenta dificultades importantes, no sólo por las dificultades de determinar el tiempo de estudio personal, sino también por su dependencia de los criterios de evaluación de los aprendizajes, cuando estos no se refieren meramente a aspectos algorítmicos. Cuando el significado de los objetos matemáticos se modeliza en términos de "sistemas de prácticas operativas y discursivas ligadas a campos de problemas" la evaluación de los significados personales que construyen los alumnos en el proceso de estudio debe hacerse según ese enfoque. Pero en este caso, los juicios sobre el aprendizaje, el conocimiento, la comprensión y la competencia matemática presentan un nuevo nivel de complejidad: todas estas nociones dejan de ser dicotómicas. ¿Cuándo podemos afirmar que un alumno ha aprendido el objeto *derivada*?

La problemática del tiempo didáctico, de la cronogénesis y topogénesis (Chevallard, 1991), puede hacerse operativa mediante la modelización que proponemos de la enseñanza y el aprendizaje como un proceso estocástico. Permitirá, asimismo, identificar nuevos aspectos y enfoques para los fenómenos didácticos ligados a la gestión del tiempo didáctico.

La modelización del proceso de estudio como proceso estocástico supone la distribución en el tiempo de los distintos elementos del significado sistémico de un objeto y la distribución temporal de los estados docentes, discentes, recursos materiales, así como los estados cognitivos y emocionales. Nosotros vamos a interpretar la *cronogénesis didáctica* del saber[4] como la generación en el tiempo del saber matemático escolar como consecuencia de la interacción didáctica. El profesor es quien decide el orden en que se tratan los distintos objetos (y distintos elementos que componen su significado sistémico) y va introduciendo progresivamente nuevos objetos a medida que progresa el tiempo didáctico.

Interpretaremos la *topogénesis del saber* como la distribución de la responsabilidad principal del estudio de los distintos elementos del significado sistémico de los objetos matemáticos entre el profesor y el alumno. El profesor decide qué elementos del significado de los objetos matemáticos estarán bajo la responsabilidad total o parcial de los alumnos y cuáles toma a su cargo. "Enseñante y enseñado ocupan distintas posiciones en relación con la dinámica de la duración didáctica: difieren en sus relaciones respectivas con la *diacronía* del sistema didáctico, con lo que podemos denominar la *cronogénesis*. Pero también difieren según otras modalidades: según sus lugares respectivos en relación con el saber en construcción, en relación con lo que podemos llamar la topogénesis del saber, en la sincronía del sistema didáctico" (Chevallard, 1991, p. 83).

Las decisiones crono y topogenéticas que adopta el profesor fijan los significados implementados en la clase y lo que finalmente tienen oportunidad de aprender los estudiantes. Por esta razón son nociones útiles para el análisis didáctico.

La modelización que proponemos del proceso de instrucción en términos de trayectorias y estados va a permitir describir con detalle los fenómenos crono y topogenéticos. Por ejemplo, los segmentos instruccionales (1-13) y (14-41) del Anexo han comenzado a estar primero bajo la responsabilidad del alumno, como tarea para casa; pero en la sesión están bajo la responsabilidad del profesor, que es quien hace la modelización y aplica las técnicas. El ejercicio del segmento (42-44) queda completamente bajo la responsabilidad del alumno, debido a que después del segmento anterior el profesor considera que es un ejercicio de aplicación fácil (rutinaria) para los estudiantes. Pero incluso dentro del segmento (14-41), y debido al patrón de interacción que implementa el docente, el cálculo de las derivadas de x^2+1 y $\sqrt{x}$ están bajo la responsabilidad discente durante un corto intervalo de tiempo, antes que el

[4] En la TFS el *saber* se interpreta como *significado institucional de referencia*, y por tanto en términos de sistema de prácticas operativas y discursivas, mientras que los *conocimientos* se conciben como significados personales (sistemas de prácticas personales). Esta modelización epistémico-cognitiva difiere de la propuesta en la teoría de situaciones, pero consideramos que puede ser un desarrollo coherente de la misma.

profesor decida presentar la solución en la pizarra. Estas decisiones topogenéticas modifican los significados implementados y por tanto los aprendizajes.

8.2.3. Trayectoria epistémica

En esta sección desarrollamos lo que denominamos *análisis epistémico* de un proceso de instrucción. Se trata de descomponerlo en unidades de análisis con el fin de caracterizar el tipo de actividad matemática que se implementa efectivamente. Esto requiere identificar los objetos matemáticos puestos en juego, las relaciones entre ellos, los modos de organización en que se agrupan y las relaciones ecológicas que se establecen entre los mismos. Con este fin consideramos útil introducir las nociones de configuración epistémica (matemática), trayectoria epistémica y estados potenciales de dichas trayectorias.

La Teoría de las Funciones Semióticas distingue seis categorías de entidades primarias como constituyentes de los sistemas de prácticas: lenguaje, situaciones, acciones, conceptos, proposiciones y argumentos. La trayectoria epistémica es la distribución en el tiempo de estos componentes en un proceso de estudio. Distinguiremos, por tanto, en ella seis estados posibles, según el tipo de entidad que se estudia en cada momento.

E1: Situacional: se enuncia un ejemplar de un cierto tipo de problemas.

E2: Actuativo: se aborda el desarrollo o estudio de una manera de resolver los problemas.

E3: Lingüístico: se introducen notaciones, representaciones gráficas, etc.

E4: Conceptual: se formulan o interpretan definiciones de los objetos puestos en juego.

E5: Proposicional: se enuncian e interpretan propiedades.

E6: Argumentativo: se justifican las acciones adoptadas o las propiedades enunciadas.

Estos estados se suceden a lo largo del proceso instruccional relativo a un tema o contenido matemático.

La clasificación de las entidades matemáticas en las categorías que hemos definido no es absoluta, sino que, al tratarse de entidades funcionales, depende del nivel de análisis elegido y de los juegos de lenguaje en los cuales se generan. Podríamos entonces pensar que la identificación de los estados de las trayectorias tiene un carácter subjetivo. Sin embargo, si dos personas participan en el mismo juego de lenguaje y adoptan el mismo punto de vista, progresivamente llegarán a un acuerdo en la categorización de una cierta unidad de análisis.

El análisis de la trayectoria epistémica de un proceso instruccional permitirá caracterizar el significado institucional efectivamente implementado y su complejidad onto-semiótica. Para analizarla, su desarrollo o crónica será dividido en unidades de análisis de acuerdo a las distintas situaciones-problemas (o tareas) que se van proponiendo. Llamaremos "*configuración epistémica*" al sistema de objetos y funciones semióticas que se establecen entre ellos relativos a la resolución de una situación-problema[5]. Se trata, por tanto, de un segmento de la trayectoria epistémica. El análisis epistémico será la caracterización de las configuraciones epistémicas, su secuenciación y articulación. La atención se fija en la cronogénesis del saber matemático escolar, y en la caracterización de su complejidad onto-semiótica. Dentro de cada configuración se definen unidades de análisis más elementales según los estados de la trayectoria, que llamamos *unidades epistémicas*. Las distintas oraciones que componen la crónica de un proceso de estudio son numeradas correlativamente para su referencia y las denominamos *unidades naturales* de análisis.

En la tabla 8.1 se muestra la trayectoria epistémica de una parte del proceso de estudio sobre el "Cálculo de derivadas en bachillerato" (Anexo 3). Para cada una de las unidades epistémicas en que se divide dicho texto, hacemos una breve descripción de dicha unidad, e identificamos el estado de la trayectoria epistémica.

Tabla 8.1: Trayectoria epistémica del proceso instruccional (Anexo 3)

Unidad Natural	Conf. Epist. (tiempo)	U. Epist.	Descripción	Estado
0	CE1 (2.01)	0	Enunciado del ejercicio de cálculo de la velocidad de un móvil	E1:situacional

[5] Si bien el origen de la configuración será una situación-problema, en algunas circunstancias puede ser más operativo tomar en consideración otro de los estados potenciales de la trayectoria para delimitar la configuración epistémica.

1-3		1	Aplicación de la técnica de solución	E2:actuativo
6-7		2	Enunciado de reglas de derivación (proposiciones)	E5:proposicional
8-12		3	Aplicación de las reglas de derivación	E2:actuativo
13		4	Descripción de la técnica de solución	E5:proposicional
14-16	CE2 (4.29)	5	Enunciado de otro problema: cálculo de la derivada del producto de funciones	E1:situacional
17-20		6	Descripción de una acción futura para derivar un producto de funciones	E2: actuativo
21-24		7	Recuerdo de la regla de cálculo de la derivada de un producto de funciones	E5:proposicional
25-26		8	Introducción de una notación, f(x) y g(x)	E3:lingüístico
27-39		9	Aplicación de la regla E6 al problema E5 usando la notación E7	E2:actuativo
40-41		10	Simplificación de notaciones	E3: lingüístico
42-44	CE3 (0.33)	11	Ejercicio de aplicación similar al anterior	E1:situacional
46-50	CE4 (6.3)	12	Enunciado del problema de hallar una fórmula para derivar la función seno x	E1:situacional
52-53		13	Evocación de una técnica general de solución	E5:proposicional
54		14	Aplicación de la regla general, limite cociente incremental al caso de la función seno	E2:actuativo
55		15	Reconocimiento de la indeterminación 0/0	E5:proposicional
56		16	Planteamiento del problema de solución de la indeterminación	E1:Situacional
59-82		17	Solución de la indeterminación 0/0 y cálculo del límite	E2:actuativo

Hay que tener en cuenta que cada configuración epistémica, globalmente considerada, desempeña una función específica en el proceso de instrucción. En este ejemplo, las configuraciones CE1 y CE2 tienen un carácter esencialmente *actuativo*, ya que se pretende que los estudiantes ejerciten y dominen unas técnicas de cálculo de derivadas determinadas. En cambio en la CE4 predomina el carácter *argumentativo*: se trata de justificar que la derivada del seno es el coseno. La breve configuración CE3 queda limitada al enunciado de una tarea, por lo que tiene un carácter *situacional.*

Ahora bien, para conocer lo que ocurre en el interior de cada configuración epistémica, tendremos que analizarla con más detalle y por tanto reconocer nuevas entidades y estados en el segmento de trayectoria correspondiente. Esta complejidad, de naturaleza hologramática (en el sentido que describe Morin, 1990), es consecuencia del modelo epistemológico y cognitivo que propone la Teoría de las Funciones Semióticas para el conocimiento matemático.

A lo largo del tiempo se distribuye el planteamiento y resolución de una colección de situaciones-problemas, alrededor de los cuales se construyen configuraciones epistémicas. La secuencia de estas configuraciones constituyen finalmente el “sistema de prácticas matemáticas” que fijan el significado institucional implementado para el objeto “cálculo de derivadas”.

En los 13 minutos de la clase, cuya transcripción hemos incluido en el Anexo, identificamos 4 configuraciones epistémicas empíricas (o efectivamente implementadas) que analizamos a continuación.

Configuración epistémica 1

El proceso de estudio se inicia con un estado “situacional”, esto es, con el planteamiento de un *ejemplo* de un *tipo de problema* de modelización matemática: la determinación de la velocidad de un móvil mediante su interpretación como derivada de la función que expresa la relación entre el espacio recorrido y el tiempo transcurrido.

El enunciado del problema pone en juego los objetos conceptuales, velocidad, derivada, y función espacio-tiempo, así como una función semiótica entre la derivada y la velocidad.

La realización de la tarea requiere, en primer lugar, una acción de modelización, lo que implica establecer una correspondencia entre dos sistemas de prácticas: el ligado al objeto velocidad (y su relación con el espacio y el tiempo), y el correspondiente a la derivada, como límite del cociente incremental. Se debe establecer una función semiótica entre la derivada y la velocidad que relacione ambos objetos conceptuales. Este sistema de objetos e interpretaciones es el que se pone en juego en la primera oración expresada por el profesor.

Una vez realizada la modelización se procede a aplicar la técnica general de derivación de funciones polinómicas al caso particular dado, a sustituir el valor de t por 1 y a realizar los cálculos aritméticos. El valor numérico obtenido, 5, tiene que ser interpretado como la medida de una velocidad: 5 metros por segundo.

Configuración epistémica 2

Se propone calcular la derivada de una función producto de otras dos, el polinomio x^2+1, y la función $\sqrt{x}$, aplicando la regla general de la derivada de un producto de funciones: (f.g)' = f.g + f.g'. La técnica a aplicar requiere recordar el enunciado de dicha regla, atribuir a f y g los valores particulares x^2+1 y $\sqrt{x}$, calcular las derivadas de dichas funciones y aplicar la regla general. El tipo de actividad matemática requerida aquí es el recuerdo, interpretación y seguimiento de reglas que se suponen previamente aceptadas y conocidas; se propone con la finalidad de asegurar el dominio de tales reglas y se apoya en el conocimiento de las reglas de cálculo de derivadas de funciones potenciales y polinómicas.

Esta configuración es independiente de la anterior, pero ambas cooperan para construir el sistema de prácticas que el currículo designa como "derivada" (concepto, aplicación y cálculo).

Configuración epistémica 3

Esta configuración se organiza a partir de una breve intervención del profesor en la cual asigna a los alumnos la realización de un ejercicio similar al que acaba de resolver. Aunque no sabemos el ejercicio particular encomendado consideramos relevante el papel que desempeña esta actividad en el proceso de estudio. Es un problema o tarea similar a la que se acaba de realizar que aparentemente no aporta nada nuevo; pero cumple la función cognitiva de ejercitación a fin de retener el conocimiento por parte de los estudiantes, de asegurar más el dominio de la técnica de cálculo de derivadas del producto de funciones.

Configuración epistémica 4

La obtención de una fórmula para calcular la derivada del seno a partir de la definición general de derivada de una función es el objetivo básico de esta configuración. El primer paso es el recuerdo de la regla que define la derivada como límite del cociente incremental cuando el *h* tiende a 0, seguido de su interpretación y aplicación al caso particular de la función seno.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Para ello debe asignar a f(x) el valor sen x y a continuación aplicar la técnica de cálculo de límites por sustitución (que se supone conocida por los alumnos).

Pero en este caso, la aplicación de esta regla conduce a la indeterminación 0/0. Hasta ahora las indeterminación de este tipo se han resuelto básicamente transformando el numerador y el denominador como producto de factores. Sin embargo, en este caso las técnicas conocidas por los alumnos no son válidas para resolver la indeterminación (factorización, multiplicación por el conjugado en el caso de funciones irracionales). Ahora es necesario, según la transcripción, recordar y aplicar la identidad trigonométrica, sen (x + h) = sen x cos h + sen h cos x, así como las equivalencias entre infinitésimos:

cosh-1 es equivalente a $-\frac{h^2}{2}$, y que $\lim_{h\to 0}\frac{senh}{h}=0$

La simplificación de la expresión que se obtiene finalmente después de estas sustituciones conduce a la solución buscada: D(senx) = cosx.

Globalmente considerada, la sesión de clase que hemos observado es compleja por la variedad de objetos matemáticos y conocimientos que se ponen en juego. Se comienza con la aplicación de la derivada a una modelización externa a las matemáticas (cálculo de la velocidad de un móvil), se continúa con una modelización interna (cálculo de la derivada de un producto de funciones), y la deducción de las reglas de derivación de las funciones sen x. La sesión, cuya transcripción no se incluye por razones de espacio, continúa con la deducción de las reglas de derivación de las funciones cos x, $y=\frac{1}{x+k}$ y $y=\frac{1}{x-k}$. La clase finaliza con el planteamiento de otro problema de modelización interna, la determinación de la pendiente de la recta tangente a la parábola y = x^2+x+1, en el punto de abscisas x =2.

Podemos observar que las configuraciones epistémicas constituyen “micro sistemas de prácticas” que se van agrupando y construyendo progresivamente el “significado sistémico” institucional del objeto *derivada*.

En la figura 8.1 representamos esquemáticamente un fragmento de la trayectoria muestral del proceso epistémico observado.

La enseñanza del cálculo de derivadas, o de cualquier otro contenido matemático, no es un hecho que tenga lugar una sola vez, sino que se repite "indefinidamente" en circunstancias similares (el mismo profesor "repite" la lección a grupos diferentes, o en cursos sucesivos). En estas repeticiones habrá ciertas regularidades, pero también variaciones imprevisibles. Cada proceso de instrucción implementado con ocasión de la impartición del curso en cuestión dará lugar a una trayectoria epistémica que puede representarse sobre el sistema cartesiano de la figura 1. Si hemos observado N clases podremos representar sobre el mismo sistema cartesiano N trayectorias epistémicas y estamos en condiciones de asignar probabilidades de ocurrencia de cada estado, probabilidades de paso de un estado a otro, así como plantearnos preguntas sobre las frecuencias de ocurrencias de sucesos en intervalos de tiempo (estadísticas de recuento) y sobre los tiempos de permanencia en cada estado (estadísticas de tiempos).

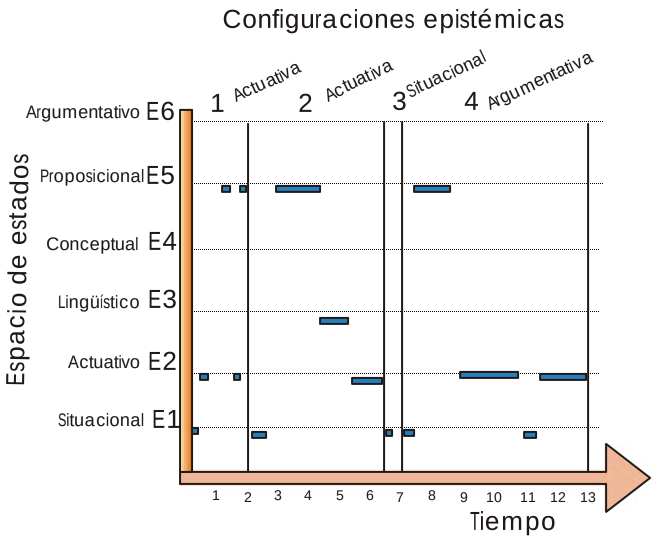


Fig. 8.1: Trayectoria epistémica

Estas técnicas cuantitativas, aunque sin duda muy laboriosas, podrían ser de interés para caracterizar las técnicas didácticas de los profesores y estudiar relaciones con otras variables. En este trabajo nos limitamos a esbozar esta posibilidad.

8.2.4. Trayectoria docente

Usaremos la expresión 'trayectoria docente' para referirnos a la secuencia de actividades que realiza el profesor durante el proceso de estudio de un contenido o tema matemático. Cuando tales actividades se circunscriben a una situación-problema (o tarea) específica hablaremos de 'configuración docente', la cual irá asociada a un configuración epistémica. Estas actividades o acciones del profesor son su respuesta o manera de afrontar las tareas o funciones docentes, para las cuales proponemos la siguiente categorización[6].

Funciones docentes:

P1: Planificación: diseño del proceso, selección de los contenidos y significados a estudiar (construcción del significado pretendido y de la trayectoria epistémica prevista).

P2: Motivación: creación de un clima de afectividad, respeto, y estímulo para el trabajo individual y cooperativo, a fin de que se implique en el proceso de instrucción.

P3: Asignación de tareas: dirección y control del proceso de estudio, asignación de tiempos, adaptación de tareas, orientación y estímulo de las funciones del estudiante.

P4: Regulación: fijación de reglas (definiciones, enunciados, justificaciones, resolución de problemas, ejemplificaciones), recuerdo e interpretación de conocimientos previos necesarios para la progresión del estudio, readaptación de la planificación prevista.

P5: Evaluación: observación y valoración del estado del aprendizaje logrado en momentos críticos (inicial, final y durante el proceso) y resolución de las dificultades individuales observadas.

P6: Investigación: reflexión y análisis del desarrollo del proceso para introducir cambios en futuras implementaciones del mismo, así como la articulación entre los distintos momentos y partes del proceso de estudio.

La trayectoria docente del proceso de estudio del "cálculo de derivadas" (Anexo 3) se describe en la tabla 8.2.

Tabla 8.2: Trayectoria docente del proceso de estudio sobre el "cálculo de derivadas"

Unidad natural	Conf. Epist.	U. Doc.	Descripción	Estado
0	CE1	1	Asignación de la tarea (ejercicio del libro)	Asignación
1-3		2	Presenta la resolución del ejercicio	Regulación
4		3	Evaluación interrogativa colectiva	Evaluación
6-12		4	Explica/justifica la técnica que ha mostrado	Regulación

[6] Esta relación es una propuesta inicial que puede ser refinada y completada, pero ello no resta validez al tipo de análisis que proponemos.

13		5	Sintetiza el sistema de prácticas descrito	Regulación
14-16	CE2	6	Progresión del tiempo didáctico	Asignación
17-19		7	Evaluación de significados personales	Evaluación
21-24		8	Recuerdo de proposiciones previas (derivada del producto de dos funciones)	Regulación
25-27		9	Introducción de notaciones	Regulación
28-29		10	Asignación de la tarea de derivar	asignación
30-31		11	Evaluación interrogativa colectiva	Evaluación
32		12	Orientación (coger los apuntes, o el libro)	Asignación
33		13	Motivación (despabilar con las derivadas, ..)	Motivación
33bis		14	Detención del tiempo didáctico (realización personal del ejercicio)	Asignación
34-39		15	Enseña la solución del ejercicio	Regulación
40-41		16	Adaptación de la tarea (no simplificar)	Asignación
42-43	CE3	17	Evaluación interrogativa colectiva	Evaluación
44		18	Motivación y orientación	Motivación
45		19	Evaluación interrogativa colectiva	Evaluación
46-49	CE4	20	Planteamiento del problema de hallar la derivada del seno	Asignación
50		21	Evaluación interrogativa colectiva	Evaluación
51		22	Motivación, "No os cortéis, ..."	Motivación
52		23	Aplicamos la definición	Regulación
53		24	Evaluación interrogativa colectiva	Evaluación
54		25	Recuerdo e interpretación de reglas conceptuales	Regulación
55		26	Planteamiento de problemas (indeterminación 0/0)	Asignación
56-82		27	Presenta la resolución del ejercicio	Regulación

Configuración docente 1

El trabajo del profesor comienza recordando el enunciado de una tarea asignada para casa el día anterior. La unidad P2 refleja la actividad docente de institucionalización o regulación de la técnica de cálculo de la derivada de una función polinómica, suponiendo que el alumno ha debido de indagar la solución del problema, y en su caso, resolverlo por sus propios medios. Ahora es el momento de fijar la “manera de resolver” este tipo de problemas.

El trabajo de modelización que hace el profesor requiere el *recuerdo e interpretación de las reglas* conceptuales y procedimentales que se ponen en juego: velocidad, derivada, reglas de derivación de funciones polinómicas.

La unidad 4) *¿De acuerdo?* Responde a la función docente de *evaluación* de los conocimientos aprendidos. Aquí se trata más bien de una evaluación que podemos calificar de colectiva y retórica, que utiliza como recurso para hacer avanzar el tiempo didáctico (y pasar a otra actividad). Pero en este caso ha permitido la intervención del alumno y modificar la trayectoria epistémica.

El profesor ha considerado como "transparente" el proceso de modelización. Pero dada su complejidad podemos ver, por la pregunta del alumno y la respuesta que da el profesor, que se generó un conflicto semiótico que permanece latente. El alumno ha preguntado "al derivar *qué* hemos hecho", y el profesor responde *cómo* se ha derivado.

El segmento correspondiente a la primera configuración termina con la unidad 13), *Vas aplicando las reglas que hemos deducido estos días.*

Esta frase describe de manera genérica el tipo de actividad matemática que se ha realizado: *aplicar las reglas deducidas.* El profesor está transmitiendo un aspecto importante de las matemáticas: una parte necesaria de la actividad matemática es cuestión de aplicar las reglas previamente conocidas.

Configuración docente 2

La segunda configuración docente comienza con la elección de una nueva tarea entre las asignadas para casa el día anterior, que pide calcular la derivada de un producto de funciones. La elección se basa en una evaluación genérica que le permite reconocer la existencia de una dificultad en esa tarea. La resolución es asumida por el profesor que la presenta ante los alumnos. A lo largo de la presentación trata de dar una cierta participación a los alumnos, intentando transferir a los alumnos una parte de la tarea, aunque finalmente es el docente quien hace todo el trabajo. También hay un momento en el que trata de motivar el trabajo discente, atribuyendo "un valor fundamental" al cálculo de derivadas: *Despabilar con las derivadas, que ya veis que es fundamental que las hagáis.* Implícitamente les está informando que las derivadas también son importantes para él, con lo cual el alumno puede intuir que probablemente sean importantes en las pruebas de evaluación.

Configuración docente 3

Esta breve configuración consiste en la selección de otro de los ejercicios que supone no ha sido resuelto por los alumnos, pero que es similar al anterior: *Intentarlo ahora aplicando esto.*

La siguiente actividad del profesor es una evaluación genérica que utiliza como pretexto para terminar el segmento instruccional dedicado a la corrección de ejercicios y abrir una nueva configuración sobre elaboración de una regla de cálculo de la función sen x.

Configuración docente 4

Globalmente esta configuración es mucho más compleja que las anteriores y predomina el carácter argumentativa para establecer la proposición de que la derivada del seno es coseno. La argumentación requiere descomponer el problema en sub-problemas, los cuales, dada su complejidad son completamente resueltos por el profesor. Hay, sin embargo, momentos de evaluación, de tipo genérico, que pretenden mantener la atención del alumno y transferirles parcialmente la tarea, sin que verdaderamente lo consiga.

En el desarrollo global de la sesión se aprecia que el trabajo de *planificación* del profesor está basado en el uso del libro de texto. Los ejercicios propuestos son seleccionados entre los que se incluyen en el libro, el repertorio de reglas de derivación que se van deduciendo en clase se corresponde con el reflejado en el texto. No tenemos información de cómo el desarrollo de la clase haya podido afectar a la planificación inicial, excepto en el segmento 14-40 en el que observamos que los alumnos no han realizado por su cuenta los ejercicios asignados, lo que lleva al profesor a invertir más tiempo del previsto para realizar los ejercicios de la derivada del producto de funciones.

Encontramos algunas unidades que corresponden al ejercicio de la función de *motivación:*

33) Despabilar con las derivadas, que ya veis que es fundamental que las hagáis

51) No os cortéis, ¡vamos decirlo!

El libro de texto desempeña en el proceso de estudio el papel de "significado institucional pretendido ". Pero se observa en esta sesión cómo el profesor va generando el significado institucional efectivamente implementado en la clase, como consecuencia de la interacción didáctica. Es él quien decide, como respuesta a circunstancias en muchos casos imprevisibles, tratar un objeto matemático como elemental o sistémico, utilizar diversos recursos expresivos, aportar un tipo de argumentación u otro, etc. En definitiva, es el actor clave de la transposición didáctica.

8.2.5. Trayectoria discente

De manera similar al caso de las trayectorias epistémica y docente interesa definir el constructo *configuración discente*, como el sistema de funciones/acciones que desempeña un alumno a propósito de una configuración epistémica. La siguiente relación puede constituir un primer inventario de tipos potenciales de estados o funciones del estudiante en el proceso instruccional.

A1: Aceptación del compromiso educativo, adopción de una actitud positiva al estudio y de cooperación con los compañeros.

A2: Exploración, indagación, búsqueda de conjeturas y modos de responder a las cuestiones planteadas.

A3: Recuerdo, interpretación y seguimiento de reglas (conceptos y proposiciones) y del significado de los elementos lingüísticos en cada situación.

A4: Formulación/comunicación de soluciones a las situaciones o tareas propuestas, ya sea al profesor, a toda la clase o en el seno de un grupo.

A5: Argumentación y justificación de conjeturas (al profesor o los compañeros).

A6: Recepción de información sobre modos de hacer, describir, nombrar, validar.

A7: Demanda de información: estados en los que los alumnos piden información al profesor o a otros compañeros (por ejemplo, cuando no entienden el significado del lenguaje utilizado o no recuerdan conocimientos previos necesarios).

A8: Ejercitación: Realización de tareas rutinarias para dominar las técnicas específicas.

A9: Evaluación: Estados en los cuales el alumno realiza pruebas de evaluación propuestas por el profesor, o de autoevaluación.

La trayectoria discente del fragmento del proceso de instrucción del "cálculo de derivadas" (Anexo 3) se describe en la tabla 8.3.

Tabla 8.3: Trayectoria discente del proceso de estudio sobre el "cálculo de derivadas"

Unidad natural	Conf. Epist.	U. Disc.	Descripción	Estado
0	CE1	1	Exploración personal (en casa) de la solución del ejercicio	Exploración
1-4		2	Recepción de la explicación	Recepción
5		3	Plantea preguntas sobre la explicación	Interrogación
6-13		4	Recepción de la explicación	Recepción
19-20	CE2	5	Responder a preguntas del profesor	Formulación
21-33		6	Recepción de la explicación	Recepción
33bis		7	Exploración personal en clase de ejercicios	Exploración
34- 41		8	Recepción de la explicación	Recepción
42	CE3	9	Responder a preguntas del profesor	Formulación
44		10	Asunción de tarea (ejercicio similar)	Aceptación
45		11	Responder a las preguntas del profesor	Formulación
46-49	CE4	12	Asunción de tareas	Aceptación
50-53		13	Responder a preguntas del profesor	Formulación
54- 55		14	Recepción de la explicación	Recepción
56		15	Asunción de tarea (indeterminación 0/0)	Aceptación
57-59		16	Responder a preguntas del profesor	Formulación
60-82		17	Recepción de información del profesor	Recepción

Las configuraciones discentes 1 y 2 (segmentos 1-13; y 14-41) son similares en cuanto al tipo de trabajo del alumno. Se supone que el alumno debe haber explorado personalmente la solución de los problemas; ahora es el momento de hacer la *auto-evaluación* del trabajo encomendado el día anterior. La manera de resolver el problema que muestra el profesor deberá ser contrastada con el procedimiento de solución personal. Para ello deberá adoptar una posición de *recepción-activa* de la información presentada por el profesor.

Los alumnos no tienen ocasión de comunicar ni discutir las soluciones que hayan podido encontrar en el supuesto trabajo personal realizado en casa.

En cuanto a la aceptación de las tareas se ve en la grabación audiovisual que el conjunto de los alumnos están atentos, tratan de seguir las explicaciones y hacer los ejercicios. Sin embargo, no se dispone de información precisa de lo que efectivamente hace cada alumno.

El trabajo de exploración personal del aprendiz con los problemas planteados se supone que es realizado fuera de la clase, ya que se trata de actividades propuestas para trabajo en casa. El proceso de estudio de estos problemas tiene que abarcar, no sólo los sucesos registrados en la sesión, sino también el trabajo realizado por el aprendiz antes de la clase, y después, durante la preparación de las pruebas de evaluación habituales.

En la configuración discente 3 (segmento 42-44) la responsabilidad de resolver la tarea queda atribuida plenamente al alumno. Después de resolver el problema de cálculo de la derivada del producto de dos funciones se supone que el nuevo ejercicio está al alcance de sus posibilidades y deberá hacerlo fuera del horario de clase.

En la configuración 4 (cálculo de la derivada del seno) los alumnos participan como espectadores del trabajo del profesor, a pesar de los intentos del docente de hacerles participar en la solución de alguna de las subtareas.

8.2.6. Otras trayectorias

Las trayectorias docente y discente responden a conductas explícitas del profesor y los alumnos que condicionan el desarrollo del proceso instruccional. Pero hay otras dimensiones o facetas del proceso que se deben tener en cuenta en un análisis holístico del mismo. Se trata del empleo de diversos recursos materiales como soporte de la instrucción (trayectoria mediacional), de la cronogénesis de los significados personales de cada alumno (trayectoria cognitiva), de las actitudes, valores, afectos y sentimientos generados (trayectoria emocional). Se trata de factores internos a la clase, que varían con el tiempo y condicionan los aprendizajes matemáticos.

8.2.6.3. Trayectoria mediacional

En el proceso instruccional se podrán utilizar diversos medios o recursos como dispositivos de ayuda al estudio. Esto incluirá medios de presentación de la información en clase (pizarra, retroproyector, etc.), dispositivos de cálculo y graficación (calculadoras, ordenadores), materiales manipulativos, etc. El uso de estos recursos (tipo, modalidad, secuenciación, articulación con los restantes elementos del procesos, etc.) debe ser objeto de atención en la práctica y en la investigación didáctica. La noción de trayectoria mediacional pretende servir de herramienta para analizar los usos potenciales y efectivamente implementados de los medios instruccionales y sus consecuencias cognitivas.

En nuestro ejemplo, la tecnología utilizada es la tradicional de libro de texto, escritura y cálculo manual en cuadernos y pizarra. El proceso de estudio implementado podría ser basado en el uso de programas de ordenador tipo DERIVE, en cuyo caso la técnica de cálculo cambiaría radicalmente. Esto podría permitir centrar la atención en el proceso de modelización, en lugar de las técnicas de derivación.

8.2.6.2. Trayectoria cognitiva

En la Teoría de las Funciones Semióticas se introduce la noción de significado personal para designar los conocimientos del estudiante. Estos significados son concebidos, al igual que los significados institucionales, como los "sistemas de prácticas operativas y discursivas" que son capaces de realizar los estudiantes a propósito de un cierto tipo de problemas. Los significados personales se van construyendo progresivamente a lo largo del proceso de instrucción, partiendo de unos significados iniciales al comienzo del proceso, y alcanzando unos determinados significados finales (logrados o aprendidos). Con la noción de *trayectoria cognitiva* hacemos referencia al proceso de cronogénesis de tales sistemas de prácticas personales, que puede modelizarse como un proceso estocástico.

La cronogénesis de los significados personales es una dimensión del proceso de estudio imposible de caracterizar con una simple grabación audiovisual del desarrollo de la clase, dado que es relativa a cada aprendiz y permanece en su esfera privada. Será necesario examinar los "apuntes de clase", cumplimentar cuestionarios y pruebas de evaluación inicial y final, realizar entrevistas, etc. En nuestro ejemplo sólo tenemos indicios de esa cronogénesis por medio de las esporádicas intervenciones de los estudiantes, y muy limitada a aspectos puntuales.

La interacción del profesor con los alumnos mientras resuelven las tareas en clase, en los segmentos en que tiene lugar esa actividad, le permite acceder parcialmente a la progresiva construcción de los conocimientos por parte de los alumnos, y tomar decisiones sobre la cronogénesis institucional. En nuestro ejemplo, aparte de las evaluaciones colectivas y retóricas del tipo, *¿Alguna duda más de los ejercicios del viernes?. No, ¿todo el mundo?, ¿seguro?,* ha habido diversos momentos en los que el profesor observa el trabajo de los alumnos resolviendo personalmente ejercicios, lo que le permite evaluar en puntos concretos el estado de sus trayectorias cognitivas, y tomar decisiones sobre la trayectoria epistémica.

8.2.6.3. Trayectoria emocional

Otros factores condicionantes del proceso de instrucción que admiten distintos estados y cambian a lo largo del tiempo se aglutinan en torno a lo que designamos como estados emocionales (interés, compromiso personal, sentimientos de autoestima, aversión, etc.). El proceso de *devolución* que introduce la Teoría de Situaciones Didácticas responde a la necesidad de que los alumnos asuman como propias las situaciones-problemas que el profesor propone como medio para la construcción del conocimiento matemático. Para nosotros la devolución es uno de los componentes de las trayectorias emocionales.

Si bien es importante tener en cuenta la trayectoria emocional de los alumnos en cualquier proceso de instrucción, en aquellos en los que participen grupos de estudiantes con necesidades educativas especiales (alumnos con discapacidad, alumnos inmigrantes con dificultades, etc.) ésta puede llegar a ser determinante.

En nuestro ejemplo los estudiantes "parecen" estar interesados y atentos a las explicaciones del profesor. Se observa un ambiente de respeto y compromiso con las tareas, pero esta apreciación no deja de ser superficial, basada en las apariencias audiovisuales registradas. Sería necesario la aplicación de instrumentos de recogida de datos específicos para describir con validez y fiabilidad los estados de las trayectorias emocionales de los alumnos en relación al proceso instruccional que están viviendo.

8.3. INTERACCIONES DIDÁCTICAS

8.3.1. Interaccionismo simbólico y teoría de situaciones

La identificación de patrones de interacción profesor-alumno es un tema de interés en las investigaciones que se realizan en el marco del Interaccionismo Simbólico (Baursfeld y Cobb, 1995; Godino y Llinares, 2000). "Los patrones de interacción se consideran como regularidades que el profesor y los estudiantes constituyen interactivamente " (Voigt, 1995, p. 178). Son una consecuencia de la tendencia natural a hacer las interacciones humanas más predecibles, menos arriesgadas en su organización y evolución. Los patrones de interacción se ponen en juego en las situaciones sin que sean pretendidos ni reconocidos necesariamente por los participantes. Cuando los participantes constituyen una regularidad que el observador describe como un patrón de interacción, dicha regularidad está estabilizando un proceso frágil de negociación de significados.

Según esta descripción, algunos de los fenómenos de didáctica identificados en la TSD pueden ser descritos como patrones de interacción. Por ejemplo, el "*efecto Topaze*" es un patrón de interacción que se corresponde con lo que Voigt (1985) y Bauersfeld (1988) designaron como *patrón del embudo* (funnel pattern):

- el profesor plantea un problema a los alumnos,
- los alumnos son incapaces de resolverlo,
- el profesor propone cuestiones más fáciles relacionadas con el problema y cuya solución conduce a resolverlo, pero sin que los alumnos pongan en juego una actividad intelectual mínimamente significativa.

El análisis de los patrones de interacción no queda reducido a la relación entre profesor y alumnos en la TSD. Brousseau trata de caracterizar *fenómenos de didáctica*, esto es, regularidades observables en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas explicables dentro de un marco teórico propio. Por ello también describe como fenómenos de didáctica, entre otros, el denominado "*deslizamiento metacognitivo*" y el "*envejecimiento de las situaciones didácticas*", en los cuales, los patrones de interacción se refieren a relaciones entre el profesor y los recursos didácticos y las propias situaciones, respectivamente.

Los distintos tipos de situaciones didácticas que se proponen en TSD (acción, formulación-comunicación, validación, institucionalización) pueden ser descritos como patrones de interacción más complejos entre profesor- alumnos – saber – medio, que condicionan y determinan los significados de los conocimientos puestos en juego en la clase de matemáticas, y por tanto los aprendizajes alcanzables.

La noción de interacción didáctica se puede describir como cualquier relación entre dos o más objetos didácticos, sean éstos, epistémicos, cognitivos, docente, etc., pero siempre y cuando esas relaciones se establezcan en el seno de un proceso de instrucción. Los patrones de interacción son los *tipos* de interacciones didácticas. Esta noción generaliza la interacción simbólica y constituye la entidad relacional básica del análisis didáctico. Un objetivo esencial para la didáctica de la matemática será la identificación de tipos de interacciones, los factores condicionantes de su formación, así como la indagación de sus consecuencias en términos del aprendizaje matemático. La TFS sugiere explicar la implementación de los patrones de interacción, al menos en algunos casos como ocurre en el patrón del embudo, teniendo en cuenta la complejidad onto-semiótica de las configuraciones epistémicas construidas.

8.3.2. Configuraciones y trayectorias didácticas

La modelización de la instrucción matemática como un proceso estocástico que hemos descrito en la sección anterior, con sus diversas subtrayectorias y estados potenciales, proporciona un procedimiento sistemático con el que identificar regularidades en la secuenciación de estados en cada trayectoria, o en las interacciones entre dos o más trayectorias. Se trata de describir la manera cómo se relacionan el profesor con los alumnos a propósito de los distintos componentes de un saber matemático específico y usando determinados recursos materiales.

Fijada una situación - problema (o tarea) y haciendo uso de una tecnología determinada el profesor y los estudiantes emprenderán una secuencia de actividades en interacción mutua con el fin de lograr que los alumnos sean capaces de resolver esa tarea y otras relacionadas. Por ejemplo, en el segmento (1-13) de la transcripción de la sesión de clase el profesor propone la resolución de un problema seleccionado del libro de texto para que lo resuelvan los estudiantes en casa. El profesor asigna la tarea, los alumnos exploran soluciones plausibles; es de suponer que los alumnos hayan asumido (o no) la tarea asignada. El proceso de estudio continúa mediante la presentación por el profesor de la solución en la pizarra (con lo que regula y fija la manera de resolver el problema); el alumno recibe la información (se supone que de una manera activa) y la compara con su solución (auto-evaluación). En el caso de discrepancias, o incomprensión de la presentación, el alumno tiene ocasión de pedir explicaciones, y el profesor estará obligado a responder con nuevas aclaraciones. Hay un momento en que el profesor "cambia de tarea", iniciándose un nuevo ciclo de estudio.

Llamaremos *configuración didáctica* a la secuencia interactiva de estados de las trayectorias que tienen lugar a propósito de una situación-problema (o tarea). La concebimos como una realidad organizacional, como un sistema abierto a la interacción con otras configuraciones de las trayectorias didácticas de las que forman parte. Esta noción va a permitir realizar un análisis detallado de los procesos de instrucción matemática. Una configuración didáctica lleva asociada una *configuración epistémica*, esto es, una tarea, las acciones requeridas para su solución, lenguajes, reglas (conceptos y proposiciones) y argumentaciones, las cuales pueden estar a cargo del profesor, de los estudiantes o distribuidas entre ambos.

Asociada a una configuración epistémica habrá también una configuración docente y otra discente en interacción (además de las correspondientes cognitivas y emocionales). El docente puede desempeñar las funciones de asignación, motivación, recuerdo, interpretación, regulación, evaluación. El discente puede a su vez desempeñar los roles de exploración, comunicación, validación, recepción, autoevaluación.

El proceso de instrucción sobre un contenido o tema matemático se desarrolla en un tiempo dado mediante una secuencia de configuraciones didácticas. En la sesión de clase completa[7] sobre "reglas de derivación" que usamos como ejemplo hemos identificado una secuencia de 12 configuraciones didácticas empíricas (o efectivamente implementadas). En la sección 3.4 vamos a analizar las cuatro primeras de dichas configuraciones didácticas formadas por la conjunción interactiva de las configuraciones epistémica, docente y discente resumidas en las tablas 1, 2 y 3 (sección 8.2)

8.3.3. Configuraciones didácticas de referencia

El análisis de los configuraciones didácticas efectivamente implementadas en un proceso instruccional, y de las que potencialmente pueden diseñarse para su implementación, se verá facilitado si disponemos de algunos modelos teóricos que nos sirvan de referencia. En esta sección vamos a describir cuatro tipos de configuraciones teóricas que pueden desempeñar ese papel.

La Teoría de Situaciones Didácticas propone una manera de organizar el trabajo del profesor y los alumnos a propósito de un saber matemático pretendido, que se considera óptima en términos del aprendizaje de los

[7] En el Anexo 3 sólo hemos incluido, por razones de espacio, un segmento que comprende las primeras cuatro configuraciones.

alumnos. La secuencia de situaciones a-didácticas de acción, formulación, validación, y la situación didáctica de institucionalización especifican los roles del estudiante en interacción con el medio (en el que se incluye el profesor, unos conocimientos pretendidos y unos recursos materiales y cognitivos específicos) que podemos interpretar como un tipo de configuración didáctica de naturaleza teórica.

Pero sabemos que este no es el único tipo de configuración didáctica que puede implementarse y que de hecho se implementa. Ni siquiera en el marco de la TSD se afirma que todos los saberes matemáticos pueden, ni deben, ser estudiados de esa manera. Todos tenemos en mente la manera tradicional o clásica de enseñar matemáticas basada en la presentación magistral, seguida de ejercicios de aplicación de los conocimientos y saberes presentados. Primero se presenta el componente discursivo del significado de los objetos matemáticos (definiciones, enunciados, demostraciones), y se deja la responsabilidad de dar sentido al discurso a los propios estudiantes por medio de los ejemplos, ejercicios y aplicaciones que se proponen. Se trata de una decisión topogenética: "primero, yo, el profesor, te doy las reglas generales, después tú las aplicas". En realidad, en este tipo de configuración didáctica no se suprimen los momentos de exploración, de formulación y validación, sino que quedan bajo la responsabilidad del estudiante, o bien se ponen en juego en momentos aislados de evaluación.

Una variante intermedia entre los tipos de configuraciones descritos (que designaremos como a-didáctica y magistral, respectivamente) puede definirse respetando el momento de exploración, pero asumiendo el profesor básicamente la formulación y validación. La institucionalización (regulación) tiene lugar mediante un *diálogo contextualizado* entre el docente y los alumnos, quienes han tenido ocasión de asumir la tarea, familiarizarse con ella y posiblemente de esbozar alguna técnica de solución.

Otro tipo básico de configuración didáctica se tiene cuando la resolución de la situación-problema (o la realización de una tarea) se realiza por el estudiante sin una intervención directa del docente. En la práctica esto es lo que ocurre cuando los alumnos resuelven ejercicios propuestos por el profesor, o están incluidos en el libro de texto y están capacitados para resolverlos. Se trata de un tipo de configuración didáctica en la que básicamente predomina el *estudio personal.*

En la figura 8.2 representamos en los cuatro vértices de un cuadrado los cuatro tipos de configuraciones didácticas teóricas descritos.

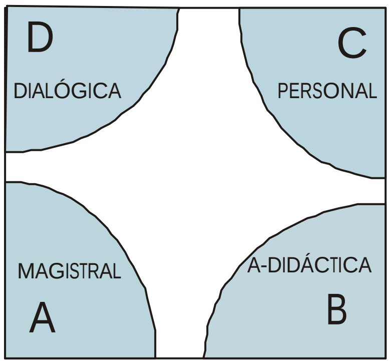


Figura 8.2: Configuraciones didácticas teóricas

Las configuraciones didácticas empíricas que acontecen en las trayectorias muestrales pueden representarse mediante un punto interior del cuadrado y estar más o menos próximas a estas configuraciones teóricas. A lo largo de un proceso de instrucción matemática las configuraciones empíricas oscilarán en torno a estos tipos teóricos, que pueden concebirse como "atractores" en la dinámica del sistema complejo que es, sin duda, dicho proceso.

8.3.4. Análisis de las configuraciones didácticas empíricas

En esta sección analizamos las cuatro configuraciones didácticas efectivamente implementadas en el ejemplo de clase sobre cálculo de derivadas. Analizaremos con más detalle la primera configuración aplicando las herramientas proporcionadas por la TFS y de manera menos detallada las otras tres por limitaciones de espacio. Se trata de explicar los conflictos de significado en términos de la complejidad ontológica y semiótica de la actividad matemática requerida.

Configuración didáctica 1: Corrección del ejercicio de cálculo de la velocidad

La primera configuración didáctica se organiza en torno a la tarea de cálculo de la velocidad de un móvil aplicando la derivada. Con la información disponible no se puede saber el grado de asunción de la tarea por parte de los alumnos, en particular cuántos de ellos trataron de resolver el "ejercicio para casa" y qué fueron capaces de hacer. Esta información es, sin embargo, importante para explicar el desarrollo del proceso y del aprendizaje.

No hay comunicación por parte de los alumnos, sino sólo presentación de la solución por parte del profesor quien regula la forma de resolver la tarea. Hay un momento de evaluación colectiva mediante la pregunta genérica *¿De acuerdo?*, que da lugar a nuevas explicaciones. Esas explicaciones ponen en juego las funciones docentes de recuerdo e interpretación de reglas sobre la derivación de funciones potenciales.

La unidad 5), *Pero D. José, ¿al derivar la ecuación qué es lo que hemos hecho?,*

indica que este alumno ha aceptado el compromiso educativo y quiere comprender. Esto ha sido posible por la apertura del profesor a la interacción verbal en 4) y revela la presencia de un conflicto semiótico. El profesor interpreta que la duda del alumno se refiere a la aplicación de la técnica de cálculo de la derivada, y no al proceso de modelización /interpretación de la derivada.

Como consecuencia de la pregunta del alumno en 5) el objeto "derivada de la función polinómica " $e(t) = 3t^2-t+1$, se reconoce como sistémico y pasa a ser descompuesto. Esto da lugar a recordar la regla, "la derivada de la suma es la suma de las derivadas de cada uno de los sumandos", "la constante permanece", etc.

La interacción profesor-alumno (unidades 4 y 5) ha modificado la trayectoria epistémica, abriéndose una bifurcación que despliega el significado de la técnica de derivación de las funciones polinómicas.

Esta configuración didáctica es la continuación de una configuración didáctica de tipo personal y está básicamente próxima al tipo A (magistral), aunque las interrogaciones del profesor y la intervención del alumno hace que incluya algunos rasgos propios del tipo D (dialógico).

CD2: Corrección del ejercicio de cálculo de la derivada del producto de dos funciones

Se trata de otro ejercicio asignado por el profesor como trabajo para casa. La asignación de tareas para casa es una técnica docente que pretende ampliar el tiempo de estudio y responsabilizar al alumno de una parte del logro del aprendizaje. Aunque algunas de las tareas se "corrijan en clase", la fase de exploración personal de posibles soluciones, que es necesaria para la comprensión y la adquisición de competencias matemáticas, queda relegada a un tiempo precedente.

¿Ha logrado la *devolución* de la tarea a los estudiantes? ¿Cuántos estudiantes han intentado resolver el ejercicio y con qué éxito? Nosotros, como observadores externos, no tenemos información sobre este extremo, y tampoco la tiene el profesor. Sin embargo, el profesor "intuye" que sus alumnos tienen otras cosas más importantes que hacer los fines de semana que resolver los ejercicios de matemáticas, por lo que comienza la clase resolviendo el ejercicio en la pizarra. En términos de la TSD estamos ante una fase (o situación) de institucionalización que no ha sido precedida por las situaciones a-didácticas (exploración, comunicación, validación). Veamos cómo se realiza el proceso de institucionalización y qué tipo de regularidades se ponen de manifiesto.

Después de seleccionado el ejercicio ("Éste, uno de ellos") comienza con una *interrogación colectiva*,

17. A ver, ¿cómo lo haríais?; 18. ¿Quién va a tener dificultad en este?

Esta interacción con la clase es una técnica docente ante la tarea de evaluación inicial de los conocimientos previos y de motivación (atraer la atención) de los alumnos.

Una alumna da una respuesta parcial, "Derivamos equis cuadrado más 1 y después derivamos la raíz cuadrada de x, uno partido por dos raíz de equis". No menciona cómo se combinan ambas derivadas en el caso del producto de dos funciones. El profesor no parece interesado en saber si la alumna en cuestión conoce la regla de la derivada del producto y cómo se aplica en este caso. Esto está indicando que la interrogación colectiva que había hecho tiene más bien un carácter retórico: no pretende realmente que los alumnos expresen sus conocimientos. Se trata más bien de "mantener la atención" de los alumnos, ya que esa pregunta colectiva puede convertirse en cualquier momento en pregunta individual. El alumno puede pensar que esa pregunta que está en el aire me puede caer a mí, luego debo estar atento al "juego didáctico".

El profesor comienza su explicación recordando reglas vistas el día anterior:

22.La derivada de un producto de dos funciones, ¿qué se aplica?, De nuevo pone en juego la interrogación colectiva, que como vemos, es característica de su estilo docente.

Varios alumnos responden al unísono del profesor, mientras éste escribe en la pizarra la fórmula: (f.g)' = f'.g + f.g'. La actividad de recuerdo de reglas incluidas en la "memoria didáctica" se hace aquí de manera compartida y asistida. No sabemos si realmente los alumnos que responden recuerdan efectivamente el enunciado de la regla sin el apoyo sostenido del profesor, quien en realidad no supone que los alumnos recuerden la regla, y lo que es más importante, que sepan aplicarla al caso particular en cuestión.

El profesor toma a su cargo el establecimiento de la correspondencia semiótica entre la regla general de la derivada del producto de dos funciones (un objeto intensivo proposicional) y el caso particular del producto de funciones $y = (x^2 + 1).\sqrt{x}$. Para ello debe establecer previamente las correspondencias notacionales entre f(x) y g(x) con las funciones particulares dadas.

En la unidad *32: "Si no lo habéis estudiado este fin de semana, pues coger los apuntes si los tenéis, o el libro"*, se pone en juego el papel de soporte material del libro de texto y los apuntes de clase para la "memoria didáctica". El profesor recuerda a los alumnos una técnica discente para recordar conocimientos que se suponen aprendidos: estudiar usando el libro de texto y los apuntes. La unidad *33, "Despabilar con las derivadas, que ya veis es fundamental que las hagáis"*, cumple una función de motivación al tiempo que fija una "norma del contrato didáctico": es fundamental que sepáis hacer las derivadas.

La tarea inicial de cálculo de la derivada del producto de dos funciones ha sido descompuesta en partes; una de ellas es el cálculo de las derivadas de las funciones x^2+1 y $\sqrt{x}$. Ahora quiere transferir la responsabilidad de realización de esta subtarea a los propios alumnos. Estamos asistiendo a la puesta en escena del patrón de interacción que la TSD describe como "efecto Topaze": El profesor va rebajando progresivamente la exigencia cognitiva de la tarea inicial. Se trata de la transformación de una configuración que inicialmente era dialógica en una de tipo magistral. Pero no podemos afirmar que la actividad matemática que se está haciendo en clase (cuyo protagonista principal es el profesor) sea estéril. El recuerdo, interpretación y seguimiento de reglas previamente establecidas es un componente necesario de la actividad matemática, y por tanto del aprendizaje.

La tarea inicial propuesta se ha transformado sustancialmente como consecuencia del cambio en el medio cognitivo de la clase, que se ha modificado por el trabajo docente de descomposición del problema en subproblemas y el recuerdo e interpretación de reglas previamente establecidas. Se instaura una nueva configuración didáctica en torno a la tarea de cálculo de las derivadas de las dos funciones potenciales a la que se dedica apenas un minuto. Los alumnos calculan las derivadas, individualmente o en cooperación con su compañero de pupitre, mientras el profesor observa su trabajo y les asiste esporádicamente cuando se le solicita su ayuda. Hay aquí una fase o momento de exploración personal de posibles soluciones a una tarea en la propia sesión de clase. El profesor decide institucionalizar directamente los conocimientos pretendidos, posiblemente al observar que la clase no recuerda la técnica de derivación de las funciones potenciales. Espera que su explicación les servirá de refuerzo para retener o memorizar dichos conocimientos.

Llama la atención que no organiza ningún momento de comunicación y validación de los conocimientos elaborados por los alumnos, posiblemente por su manera particular de gestionar el tiempo didáctico con relación a las restricciones curriculares. En 4 minutos y 20 segundos ha presentado la solución del ejercicio mediante un patrón mixto en el que predomina la exposición de información (recuerdo, interpretación y seguimiento de reglas), una breve fase de exploración personal, algunos momentos de evaluación colectiva e individual y la ausencia de momentos a-didácticos de comunicación y validación.

Observamos en esta configuración didáctica una compleja dinámica de interacciones docente - discente - saber - medio, mediante las cuales el problema inicial se transforma y la responsabilidad de la actividad matemática pasa en unos momentos a los alumnos, mientras que en otros permanece en el profesor. Los momentos de recuerdo e interpretación de reglas previamente establecidas, necesarias para la continuación de la actividad, desempeñan un papel clave en el proceso de estudio y marcan puntos de bifurcación e inflexión en dicho proceso. Si los alumnos no recuerdan una definición, una propiedad una técnica, la continuidad de la actividad exige la intervención del docente y son ocasión de nuevas configuraciones didácticas.

La comparación global de esta configuración empírica con las configuraciones teóricas de referencia nos lleva a situarla próxima al tipo A (magistral), con algunos rasgos del tipo D (dialogal). Una observación más detallada permite apreciar el intento del docente de descomponer la tarea en subtareas y de implementar una configuración tipo C (personal), atribuyendo la responsabilidad al estudiante. Pero finalmente concluye con una presentación magistral.

Análisis de la configuración didáctica 3: Resolución de ejercicios similares

Las unidades 42 a 45 muestran un tipo de configuración didáctica que reúne características propias. El profesor pregunta de manera colectiva si el siguiente ejercicio "os ha salido". Se acerca a un alumno y ve en el libro el ejercicio en el que han tenido dificultad. Al comprobar que es similar al anterior concluye: "*Intentarlo ahora aplicando esto*". Lo característico de esta configuración es que finalmente el profesor deja completamente bajo la responsabilidad de los alumnos la solución de ejercicios similares a otro que ha sido resuelto en clase; estos ejercicios deberán ser resueltos fuera de la clase (configuración de tipo personal). Los conocimientos previos necesarios para abordar la solución se suponen conocidos, pero el trabajo pedido favorece el dominio de una técnica que el profesor considera valiosa. El enunciado de la actividad y su realización se apoya materialmente en el libro de texto y los apuntes de clase que sirven como memoria didáctica.

Este patrón de interacción se repite para los restantes "ejercicios del viernes", aunque el profesor no va a estar completamente seguro que los alumnos sean capaces de resolverlos (¿Todo el mundo? ¿Seguro?), y sobre todo que, efectivamente, los alumnos hagan tales ejercicios. Pero el trabajo del profesor tiene que continuar apoyándose en esta "ficción didáctica": los alumnos cumplirán su parte del contrato, harán los ejercicios propuestos apoyándose en los apuntes de clase y el libro de texto y lograrán el aprendizaje. La clase está preparada para continuar con la deducción de nuevas reglas de derivación.

Configuración didáctica 4: Deducción de la regla de derivación de la función sen x

Ahora se plantea un problema de naturaleza bastante diferente a los anteriores. No se trata de modelizar una situación real (como el cálculo de la velocidad), ni de aplicar unas reglas generales de derivación a casos particulares, sino de deducir una nueva regla general para un tipo de funciones bastante diferente: las funciones trigonométricas.

Comienza con una justificación de la tarea indicando que las reglas que se van a deducir permiten "hallar de una forma más sencilla la derivada, sin tener siempre que aplicar el límite". El profesor es consciente de la complejidad de esta tarea y ha planificado su explicación en clase, aunque aplicando un patrón de interacción que en cierto modo define su estilo docente, que permite un cierto grado de participación a los alumnos.

Deja unos segundos para que los alumnos expliciten la regla general de cálculo de la derivada como límite del cociente incremental. Pero no espera realmente a que sean ellos los que la enuncien, sino que directamente escribe en la pizarra, al tiempo que algunos alumnos la recitan simultáneamente:

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{sen(x+h) - senx}{h}$$

Se trata de una primera etapa de un "efecto Topaze". Aplica la técnica de cálculo del límite funcional mediante la sustitución en la función del valor del límite de la variable independiente, h = 0, y declarando que "nos saldrá una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$

El saber puesto en juego es sin duda de una notable complejidad semiótica, lo que lleva al profesor a dar la solución, aunque intercalando en su discurso algunas interrogaciones colectivas para mantener la atención. La solución de la indeterminación requiere transformar el numerador, recordando y aplicando la regla trigonométrica que desarrolla el seno de una suma. Pide a los alumnos que recuerden la regla trigonométrica, pero como no tiene respuesta es él quien la escribe en la pizarra:

63. Seno coseno, más seno coseno, ¿os acordáis?

Continúa haciendo operaciones sacando factor común sen x, y aplica la regla del límite de una suma de dos funciones. Aparece otro punto crítico en el cálculo del límite de cada sumando ya que hay que identificar dos infinitésimos equivalentes. Se apoya en el libro de texto para recordarles que, como se indica en la tabla de infinitésimos equivalentes,

70. En la página 156, el coseno de un ángulo menos 1, cuando el ángulo tiende a cero. ¿a qué es igual?. 1-cos x es equivalente a $x^2/2$, entonces

71. cosh-1 es equivalente a $-\frac{h^2}{2}$. 72. ¿De acuerdo?

Recuerda también que (senh)/h, cuando h tiende a 0 tiende a 1, por lo que simplificando se obtiene finalmente la regla buscada:

82. Cuando la función es seno, su derivada es el coseno.

En esta configuración didáctica, dada la gran complejidad onto-semiótica de la actividad requerida, el docente es el responsable de la génesis del saber, asumiendo el protagonismo del recuerdo e interpretación de las reglas y de la aplicación de las técnicas. El alumno se limita a escuchar y anotar las explicaciones del profesor. Aunque no tenemos información del grado de comprensión que los alumnos hayan logrado del proceso sí podemos observar el esfuerzo del profesor por comunicar a los alumnos el carácter deductivo de la matemática: "Si hemos aceptado este resultado, entonces debemos aceptar este otro".

Al igual que las configuraciones didácticas 1 y 2, esta configuración debemos situarla próxima al tipo A (magistral), con algunos matices del tipo D (dialógica). Hemos podido observar que las configuraciones empíricas reúnen características de dos o más configuraciones teóricas.

8.3.5. Patrones de interacción, técnicas didácticas y contrato didáctico

El análisis de trayectorias didácticas empíricas permitirá identificar ciertas regularidades en las configuraciones didácticas que las componen y en el modo en que se articulan. Llamaremos "*patrón de interacción didáctica*" a cualquier regularidad que pueda identificarse en las trayectorias didácticas y las configuraciones que las componen. Estas regularidades se pueden considerar también, al menos en ciertos casos, como "maneras de hacer", esto es, como técnicas didácticas; además la aparición de tales regularidades puede explicarse por la aplicación de cláusulas de los contratos didáctico, pedagógico y escolar. Por ejemplo, en las cuatro configuraciones estudiadas observamos que el profesor formula preguntas colectivas sobre si los alumnos "van siguiendo la explicación", o tienen alguna dificultad en las tareas. Este patrón de interacción se ha convertido en una manera de actuar del profesor ante los alumnos, lo que se puede describir como una técnica didáctica como respuesta al "problema docente" de "¿Cómo adaptar la enseñanza al aprendizaje? ¿Cómo mantener la atención de los alumnos?". Pero también revela el cumplimiento de una norma implícita que regula las relaciones profesor-alumno: "El profesor tiene que mantener la atención del alumno"; "El profesor debe basar su enseñanza en los conocimientos iniciales de los alumnos y en su progresión" (contrato pedagógico). En nuestro ejemplo, el profesor propone a los alumnos varios ejercicios rutinarios sobre aplicación de las reglas de derivación con el fin de lograr su dominio. También observamos que el profesor se esfuerza por justificar deductivamente las proposiciones, como ocurre con la deducción de la regla de derivación del seno, a pesar de su complejidad. Pero la deducción y el cálculo automatizado son rasgos característicos de la actividad matemática, lo que parece forzar al profesor a su implementación (contrato didáctico, específico del contenido matemático).

Consideramos que las nociones de configuración didáctica y contrato (en sus diversas modalidades y tipos) son complementarios. La configuración se refiere a los sistemas de prácticas matemáticas y didácticas que efectivamente se implementan en los procesos de instrucción, mientras que el contrato se refiere a las normas que condicionan las acciones efectivas de los actores que participan en dichos procesos, y por tanto pueden explicar la aparición de los patrones de interacción.

El desarrollo de cada configuración didáctica y su secuenciación a lo largo de un proceso instruccional está apoyada en la implementación de una variedad de patrones de interacción, regularidades que se constituyen con frecuencia de manera inconsciente, reducen la incertidumbre y resuelven los conflictos semióticos.

8.3.6. Criterios de idoneidad de las configuraciones y trayectorias didácticas

Las nociones teóricas introducidas en los apartados anteriores proporcionan herramientas para realizar análisis descriptivos pormenorizados de los procesos de instrucción matemática, lo que a su vez abre la posibilidad de encontrar explicaciones de las regularidades observables. Pero la didáctica de las matemáticas tiene que afrontar además el reto de la ingeniería didáctica, entendida como la disciplina que orienta el diseño, implementación y evaluación de los procesos de instrucción matemática.

¿Qué criterios de idoneidad de las configuraciones y trayectorias didácticas se pueden derivar del enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática?

Consideramos que la idoneidad global de una configuración didáctica, y de las trayectorias didácticas, se debe valorar teniendo en cuenta las diversas facetas o dimensiones que hemos propuesto. En el caso de las configuraciones docente y discentes creemos útil articularlas teniendo en cuenta las posibilidades de identificación de conflictos y de negociación de significados. Resultan, en consecuencia, cinco criterios de idoneidad que describimos a continuación:

- *Idoneidad epistémica* se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o previstos), respecto de unos significados de referencia. Incluye también las conexiones o apertura hacia otras configuraciones epistémicas que constituyen la trayectoria correspondiente.
- *Idoneidad cognitiva* expresa el grado de proximidad de los significados implementados con respecto a los significados personales iniciales de los estudiantes, o de manera equivalente la medida en que el "material de aprendizaje" esté en la zona de desarrollo potencial de los alumnos[8].
- *Idoneidad semiótica* tiene en cuenta las posibilidades que ofrece una configuración didáctica para identificar conflictos semióticos potenciales y de resolverlos mediante la negociación de significados.
- *Idoneidad mediacional*, grado de disponibilidad de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo de la actividad.
- *Idoneidad emocional,* grado de implicación (interés, motivación) de los alumnos en el proceso de estudio.

En la figura 3 representamos la idoneidad de una configuración didáctica mediante el área del pentágono inscrito en un pentágono regular. La forma irregular del pentágono se deriva de la mayor o menor idoneidad (valorada de 0 a 1) en cada uno de los ejes o criterios.

[8] Vigotsky (1979, p. 133).

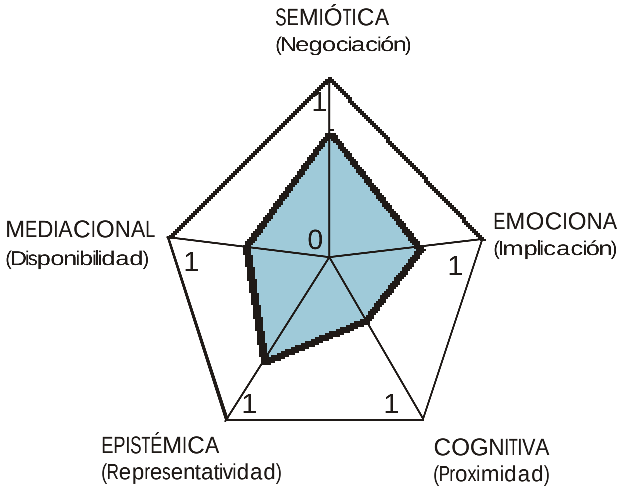


Figura 8.3: Idoneidad de las configuraciones didácticas

8.4. SÍNTESIS E IMPLICACIONES

Las aportaciones de este trabajo a la didáctica de las matemáticas son básicamente de carácter teórico ya que el principal objetivo ha sido presentar una nueva manera de analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas usando nuevas herramientas teóricas. Se trata de una ampliación de la TFS mediante la cual se puede abordar el análisis de la dimensional instruccional de dichos procesos, además de las dimensiones epistémica y cognitiva que permiten la noción de función semiótica y la ontología matemática asociada.

Para ello consideramos útil la modelización (al menos parcial) mediante procesos estocásticos, usar las nociones de trayectoria muestral y estados potenciales de los procesos estocásticos en que descomponemos los procesos de instrucción matemática. Como entidad relacional básica adoptamos la de interacción didáctica - relación entre dos o más objetos matemáticos o didácticos - que amplia la noción de interacción simbólica. Así mismo, la introducción de la noción de configuración didáctica (empírica y teórica), que generaliza la de situación didáctica, los tipos de configuraciones teóricas que proponemos y sus componentes (epistémico, docente, discente, mediacional, cognitivo y emocional) constituyen recursos analíticos y explicativos, especialmente al ser combinados con los restantes elementos de la Teoría de las Funciones Semióticas. Resaltamos también el interés de definir cuatro tipos teóricos de configuraciones didácticas que delimitan un "espacio didáctico" en el que situar las configuraciones didácticas empíricas, así como la elaboración de la noción de idoneidad de las configuraciones y trayectorias didácticas, valorada según las dimensiones epistémica, cognitiva, semiótica, mediacional y emocional. La figura 8.4 es una síntesis del modelo teórico descrito.

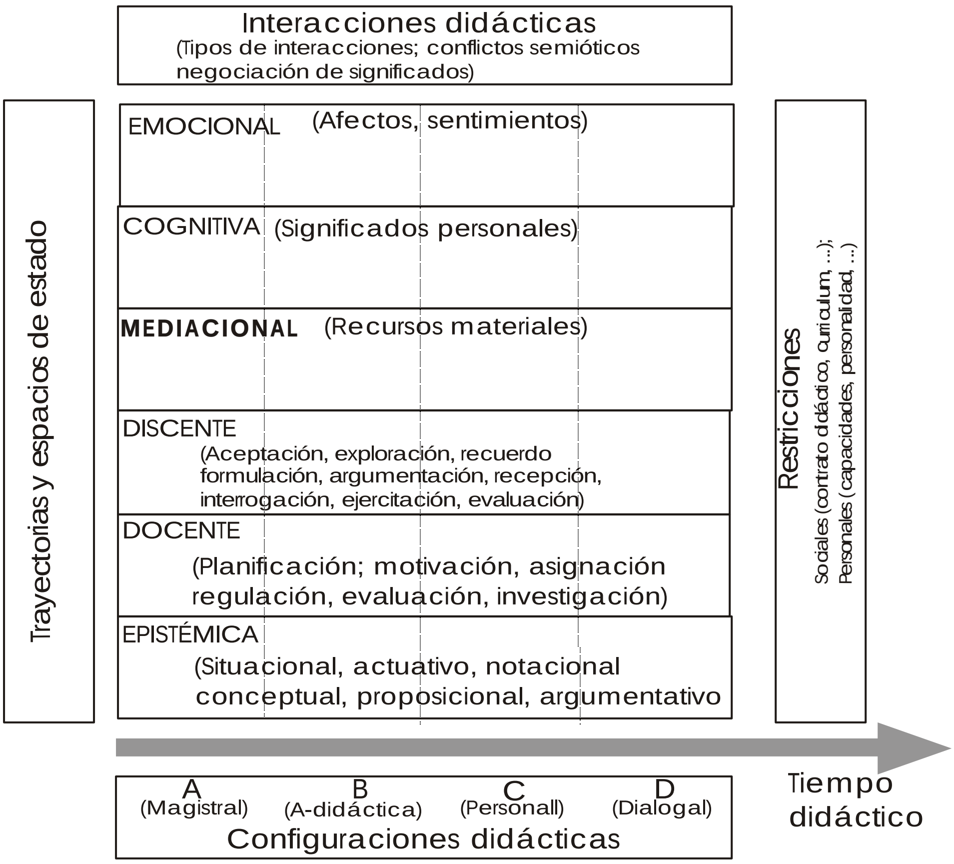


Fig. 8.4: Objetos e interacciones didácticas

El análisis que hemos realizado del ejemplo sobre "calculo de derivadas" ha permitido mostrar que la determinación de los significados institucionales finalmente implementados en una clase de matemáticas (que describimos aquí como una secuencia de configuraciones epistémicas) es el resultado de complejas interacciones entre las trayectorias docente, discente, mediacional, cognitiva y emocional. Esto nos ayuda a tomar conciencia de que la cronogénesis de los conocimientos personales de los estudiantes (el aprendizaje) está condicionada por dichos significados implementados y la variedad de los factores que los determinan. La identificación de estos factores ha sido abordada dentro de la Teoría Antropológica por Bosch, Espinoza y Gascón (2003, p. 118), quienes los clasifican según el nivel de generalidad con el siguiente esquema:

Sociedad → Escuela → Pedagogía → Disciplina → Área → Sector → Tema → Cuestión

En nuestra clase sobre "cálculo de derivadas", los momentos de comunicación y validación han sido asumidos por el profesor, suprimiendo esos momentos de trabajo a-didáctico por parte de los alumnos y cambiando radicalmente la significación personal de la actividad matemática. ¿Cuáles pueden ser las razones de nuestro profesor para suprimir esos momentos a-didácticos? Una respuesta bastante plausible la tenemos en la "presión curricular sobre el tiempo didáctico". El profesor está presionado por terminar el programa de estudio con el menor recorte posible de temas, máxime cuando sus alumnos deberán sufrir un examen de ingreso a la universidad al finalizar el bachillerato. La supresión de momentos a-didácticos reduce además la complejidad epistémica del proceso. Si los alumnos presentan sus propias soluciones y argumentos el profesor tendrá que corregir los errores y explicaciones deficientes que posiblemente presentarán, lo que ampliará el programa en direcciones no previstas. Nuestro profesor prefiere evaluar las trayectorias cognitivas de manera genérica con preguntas colectivas y mediante la observación del trabajo de los alumnos en los momentos (no tan escasos en nuestra clase) de trabajo de exploración personal de los alumnos resolviendo ejercicios. Esa información le sirve para decidir sobre el desarrollo de la trayectoria epistémica. Nuestro profesor está convencido, además, que la enseñanza directa, la comunicación verbal, apoyada por la visión colectiva en la pizarra de las notaciones matemáticas, es efectiva, siempre que vaya acompañada por una recepción activa por parte de los alumnos. ¿Podemos asegurar que está equivocado cuando la casi totalidad de los conocimientos que aprendemos en nuestras vidas lo hacemos de esa manera? Ausubel (2000) insiste y razona que el aprendizaje puede ser significativo aun cuando sea basado en la exposición verbal y la recepción. Como afirman Hache y Robert (1997), "No se trata de caer en la ilusión de la transmisión directa de ideas entre el profesor y los alumnos, simplemente escuchando, sino de tener en cuenta los modos de comunicación del saber en los fenómenos de aprendizaje" (p. 111). Más bien tendremos que aceptar que sirven para desarrollar unos significados personales no suficientemente ricos (para la Teoría de las Funciones Semióticas el aprendizaje no es una cuestión de todo o nada, es una cuestión de grado).

Una cuestión esencial para la instrucción matemática, que requiere nuevos desarrollos teóricos e investigaciones empíricas, es la caracterización de posibles trayectorias didácticas que optimizen el aprendizaje matemático. El abordaje de esta problemática tendría como consecuencia la elaboración de modelos prescriptivos, lo que requiere asumir explícitamente principios epistemológicos y axiológicos complementarios. Entre tales principios hemos propuesto cinco criterios de idoneidad de las configuraciones y trayectorias didácticas que designamos como idoneidad epistémica (representatividad), cognitiva (proximidad), semiótica (negociación), mediacional (disponibilidad) y emocional (implicación).

Aceptando estos supuestos y fijado un objeto matemático y un medio instruccional, una trayectoria didáctica óptima debería tener en cuenta el doble carácter de las matemáticas como actividad y como producto. Por ello los alumnos deberían tener oportunidad de poner en práctica la actividad matemática, pero también de conocer y dominar los productos culturales matemáticos que otras personas han elaborado como resultado de su propia actividad. Además, el recuerdo e interpretación de reglas matemáticas ya asumidas forma parte de esa actividad matemática y resulta imprescindible para que pueda tener lugar.

Esto nos lleva a sugerir la complementariedad de los patrones de interacción de tipo A (magistral), basado en la "emisión-recepción" y los de tipo B "reinvención a-didáctica", tipo C (estudio personal) y tipo D (diálogo contextualizado), para cada componente de los contenidos matemáticos. Parece que el fomento del interés y la capacidad heurística por parte de los alumnos debe llevar a implementar, siempre que sea posible, un formato de tipo B (reinvención a-didáctica); pero siendo conscientes que la apropiación del significado institucional de referencia exigirá en algún momento un tipo de patrón de interacción emisión-recepción, e incluso un patrón conductista (ejercitación de ciertas técnicas básicas).

En consecuencia, la gestión de la dialéctica entre los distintos patrones de interacción deberá basarse en la negociación de los significados. De este modo el análisis semiótico se revela como un elemento crucial de los procesos de estudio de las matemáticas. Dicho análisis permitirá identificar los puntos críticos en que se deben negociar los significados entre los distintos actores que intervienen en el proceso educativo, aportar pautas para seleccionar las configuraciones didácticas y los patrones de interacción más apropiados y caracterizar los aprendizajes logrados.

Pensamos finalmente que las nociones teóricas introducidas pueden permitir identificar nuevas regularidades y sesgos de los procesos de estudio. Por ejemplo, el uso abusivo de medios expresivos (notaciones formales innecesarias, esquemas, representaciones, etc), presentación de una muestra sesgada de situaciones-problemas, excesivos ejercicios rutinarios, ausencia de validaciones, etc.

Capítulo 9

UNA AGENDA DE INVESTIGACIÓN PARA LA DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

9.1. Introducción
9.2. Cuestiones según el fin de la investigación
    9.2.1. Semiometría o determinación de significados
    9.2.2. Ecología de significados
    9.2.3. Dinámica de significados
9.3. Cuestiones según el foco de investigación
    9.3.1. Análisis epistémico (cognición institucional)
    9.3.2. Análisis cognitivo (cognición individual)
    9.3.3. Análisis instruccional
9.4. Marco y herramientas metodológicas
    9.4.1. Enfoque metodológico
    9.4.2. El análisis semiótico como técnica para determinar significados
    9.4.3. El problema de la evaluación de los conocimientos matemáticos
9.5. Síntesis e implicaciones

9.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo trataremos de mostrar la utilidad del Enfoque Ontológico-Semiótico de la Cognición e Instrucción Matemática que hemos presentado en los capítulos anteriores para plantear cuestiones de investigación en educación matemática. En el capítulo 11 presentaremos algunos ejemplos de investigaciones que se han realizado bajo esta perspectiva teórica, tanto en el Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Granada, como por investigadores de otras universidades.

Las cuestiones de investigación didáctica las vamos a clasificar según dos ejes o dimensiones complementarias, que designamos como el *fin* y *foco* de la investigación, cada una con tres categorías de estudios:

1. El fin de la investigación comprende:

- La caracterización de significados, o semiometría;
- La búsqueda de relaciones entre significados, ecología de significados; y
- El estudio de los cambios, o dinámica de significados.

2. El foco de investigación comprende tres categorías,
   - Epistémico (significados institucionales);
   - Cognitivo[1] (significados personales);
   - Instruccional (interacción entre significados institucionales y personales; ingeniería didáctica).

9.2. CUESTIONES SEGÚN EL FIN DE LA INVESTIGACIÓN

Como se indica en Godino y Batanero (1998), una agenda de investigación para la Didáctica de las Matemáticas se puede describir en términos de "*semiometría*" (caracterización), "*ecología*" (interacción) y "*dinámica*" (evolución) de significados de los objetos matemáticos. La semiometría contempla lo que podemos describir como *estática de significados sistémicos*, esto es, la caracterización de la trama de las funciones semióticas (o al menos una muestra representativa de tal trama) en las cuales un objeto se pone en juego en un contexto y circunstancias fijadas. La "medida" de tales significados (sistemas de prácticas) tendrá un carácter cualitativo y será relativa a una persona, institución, contexto fenomenológico y momento temporal especifico. "La medición es el proceso por medio del cual trasladamos el tipo o la intensidad de un concepto teórico en una variable particular" (Dane, 1990; p. 248). Este sentido general de medición es el que atribuimos al término 'semiometría', reconociendo, además en dicha "medición" seis dimensiones o facetas inherentes al significado sistémico del objeto matemático: situacional, lingüística, actuativa, conceptual, proposicional y argumentativa.

La *ecología de significados* será el estudio de las condiciones de soporte de un objeto, su dependencia de otros objetos y de las funciones o papeles que desempeña en relación a los restantes objetos del sistema.

[1] En el sentido de cognición individual.

La *dinámica de significados* analiza el cambio de los distintos elementos estructurales del significado de un objeto en el transcurso del tiempo, o por efecto de acciones instruccionales específicas.

9.2.1. Semiometría o determinación de significados

La consideración del significado de los objetos matemáticos como sistemas de prácticas y la distinción entre significado institucional y personal introduce, en la problemática didáctica, el estudio de la estructura y caracterización de estas entidades teóricas. Esta caracterización se puede concebir como una 'medida', no en un sentido psicométrico o matemático estricto, sino en su sentido más general, esto es, como categorización de valores de variables cuantitativas o cualitativas, incluyendo el uso de escalas nominales, ordinales, intervalo o razón. Además, permite resaltar la naturaleza muestral del proceso de selección de situaciones de enseñanza y evaluación, así como de las manifestaciones y conductas de los estudiantes. Por tanto, puede contribuir a superar la ilusión de transparencia determinista que se adopta frecuentemente cuando se consideran estos problemas.

Una clase de estudios primarios en Didáctica debe orientarse a determinar o caracterizar los significados institucionales, especialmente el significado en las instituciones matemáticas; es necesario ver cuáles son los usos característicos de los conceptos, proposiciones y teorías matemáticas, y las situaciones problemáticas fundamentales que incorporan las notas esenciales de las nociones, así como identificar las notaciones que podríamos llamar canónicas. Una vez caracterizado el significado de referencia, estaremos en condiciones de comprender las características del significado de los objetos matemáticos en las instituciones de enseñanza y tratar de estudiar los factores condicionantes que operan en su constitución y desarrollo.

Nuestro sistema teórico permite enfocar desde una nueva perspectiva el problema de la evaluación de los conocimientos matemáticos de los estudiantes, entendida ésta en el sentido de Webb (1992) como "*informe comprensivo sobre un sujeto o grupo respecto de las matemáticas o en la aplicación de las matemáticas*" (p. 662). El sistema cognitivo del sujeto (su conocimiento conceptual y procedimental, sus intuiciones, representaciones, esquemas, ...), esto es, según nuestra conceptualización, la red de objetos personales construida en un momento dado, es una totalidad organizada y compleja. La distinción realizada en nuestra teorización entre el dominio de las ideas u objetos abstractos (personales e institucionales) y el dominio de los significados o sistemas de prácticas de donde emergen tales objetos inobservables, permite plantear con nitidez el problema de la búsqueda de correspondencia entre ambos dominios, o sea, el problema de la evaluación de los conocimientos, tanto subjetivos como objetivos o institucionales.

9.2.2. Ecología de significados

Desde el trabajo de Lakoff y Johnson (1980) sobre el papel relevante de los conceptos metafóricos en la estructuración del sistema conceptual humano, el uso de la metáfora ha quedado justificado como medio para comprender y experimentar una realidad en términos de otra. Pensamos que la metáfora ecológica, aplicada a la noosfera matemática (Godino, 1993), puede constituir un recurso de gran utilidad para comprender la génesis, el desarrollo y las funciones de los saberes matemáticos en las instituciones humanas. El análisis de la ecología institucional de un saber nos lleva a conocer sus habitats, o sea los "lugares" donde se encuentra, los objetos con los cuales entra en asociación, las estructuras de soporte y las funciones de estas interrelaciones, esto es, los nichos ecológicos de los saberes matemáticos.

La problemática de estudio de la evolución de los significados institucionales para los objetos matemáticos podría modelizarse con la metáfora ecológica (Chevallard, 1989; Godino, 1993): un objeto particular desempeña una función en distintas clases de instituciones e interesa determinar las condiciones necesarias y/o suficientes para que desempeñe su papel en cada una de ellas. Las nociones de objeto y significado institucionales pretenden servir de instrumentos conceptuales para este análisis ecológico y semiótico de las ideas matemáticas.

9.2.3. Dinámica de significados

Los dos tipos de estudios que hemos descrito anteriormente constituirían la 'estática de significados', tanto institucionales como personales, dentro de esta metáfora ecológica. Su objetivo sería determinar las "variables de estado y de control" de los significados, considerados como sistemas, en momentos particulares. Estos estudios de los aspectos estáticos del significado han de ser completados por los que podríamos denominar estudios dinámicos, que describimos a continuación.

El estudio de los cambios que el significado institucional de los objetos matemáticos sufre para convertirse en saberes a enseñar, a través de distintas instituciones de enseñanza (diseños curriculares, autores de textos, ...) constituiría la dinámica de los significados institucionales (transposición didáctica (Chevallard, 1985), ecología de significados).

Otro problema fundamental en esta categoría de estudios didácticos sería la construcción de significados institucionales adecuados sobre un objeto matemático para un nivel escolar específico, es decir, el diseño curricular. De acuerdo con la teorización propuesta, la enseñanza debe estar apoyada en la presentación, en el tiempo y con los medios disponibles, de una muestra representativa de problemas y demás elementos del significado de los objetos matemáticos.

Este problema es abordado, para el caso del razonamiento combinatorio, en Batanero, Godino y Navarro-Pelayo (1994) donde se presenta un curriculum para la enseñanza de este contenido, basado en una secuencia de situaciones didácticas que, a nuestro juicio, constituyen una muestra representativa del campo de problemas combinatorios simples. La selección de las situaciones y su secuenciación han sido apoyadas por el estudio previo de la estructura de este campo de problemas. Un estudio similar para el caso de las nociones probabilísticas elementales se realizó en Godino, Batanero y Cañizares (1987).

El aprendizaje significativo por parte de un sujeto es modelizado por Sierpinska (1990, 1994) como una secuencia de actos de comprensión, actos de superación de obstáculos. En nuestro modelo estos actos los interpretamos como de establecimiento de funciones semióticas y superación de conflictos semióticos. La caracterización de dichos actos, y la identificación de mecanismos productores de obstáculos (Artigue, 1990) y conflictos semióticos, es una temática central dentro de lo que podemos denominar *dinámica del significado personal de los objetos matemáticos*. Los procesos de enseñanza se dirigen a determinar secuencias óptimas de situaciones para presentar, en el tiempo y con los medios disponibles, una muestra representativa de los componentes del significado de los objetos matemáticos. Metafóricamente, el estudio de los procesos de enseñanza /aprendizaje en la clase de matemáticas correspondería al estudio de los efectos, sobre los significados personales, de "choques" de secuencias didácticas, portadores de elementos de significado.

Asimismo, sería parte de la caracterización de la dinámica del significado personal el estudio de la evolución de los conocimientos de los alumnos, es decir, la transformación de los significados personales iniciales como consecuencia de la instrucción.

9.3. CUESTIONES SEGÚN EL FOCO DE INVESTIGACIÓN

9.3.1. Análisis epistémico (cognición institucional)

Entenderemos por análisis epistémico[2] de un proceso de instrucción matemática la identificación de los componentes del contenido matemático pretendido O_Y, que denotamos como $S(O_Y)$ (significado sistémico de O_Y), su secuenciación a lo largo del mismo y comparación con el significado de referencia $S(O_Z)$.

El análisis se basará en descomponer la crónica del proceso de estudio en unidades, que denominaremos epistémicas, esto es, relativas al conocimiento institucional. El criterio para definir las unidades de análisis será el cambio de elemento de significado, esto es, cuando se cambia de problema a estudiar dentro del campo de problemas considerado, se pasa del enunciado del problema a la realización de una acción, el empleo de una notación, al uso o identificación de una propiedad, o a la descripción, sistematización y validación de las soluciones. Es decir, tendremos en cuenta para delimitar las unidades epistémicas los momentos en los cuales se ponen en juego alguno de los seis elementos introducidos en nuestro modelo epistemológico (lingüísticos, situacionales, actuativos, conceptuales, proposicionales, argumentativos), o también entidades mixtas derivadas. Como hemos descrito en el Capítulo 8 interesa definir una unidad de análisis más global, que denominamos *configuración epistémica*, formada por el segmento de una trayectoria epistémica comprendido entre dos situaciones-problemas (o tareas).

El análisis epistémico lo consideramos como un componente del análisis de la cognición individual y de la instrucción. La razón es que este análisis permitirá identificar el sistema de entidades que se ponen en juego en el estudio de un contenido o tema matemático, los cuales requerirán procesos instruccionales específicos. Este análisis nos va a permitir

[2] Usaremos el adjetivo 'epistémico' en lugar de 'epistemológico' ya que el tipo de análisis que realizamos no coincide con lo que habitualmente se designa como 'análisis epistemológico de un concepto matemático'.

describir el significado institucional pretendido y el implementado del tema matemático estudiado y la distribución temporal de sus distintos elementos (*trayectoria epistémica*).

El proceso de estudio de un objeto matemático O tiene lugar en el tiempo, siendo esta variable esencial en los resultados finales. No es lo mismo dedicar una o dos sesiones de clase al estudio de la mediana, por ejemplo, que los alumnos hagan más o menos actividades, que el profesor ponga más o menos ejemplos, etc. Sin embargo, el "tiempo" que interesa a efectos didácticos se podría representar mejor por la secuencia de configuraciones epistémicas que por el "tiempo físico".

La valoración del carácter más o menos completo del significado pretendido requiere disponer de un patrón de comparación que denominaremos *significado sistémico de referencia* $S(O_Z)$. Esta comparación entre $S(O_Y)$ y $S(O_Z)$ se puede describir como "transposición didáctica" localmente implementada en el proceso instruccional.

9.3.2. Análisis cognitivo (cognición individual)

La instrucción matemática tiene que tener en cuenta la naturaleza cultural del conocimiento matemático, pero también los procesos de representación e interpretación que se ponen en juego en la producción y comunicación de dicho conocimiento. Por ello el análisis cognitivo[3] (que en nuestro caso hemos abordado desde una perspectiva semiótica) de los procesos instruccionales nos parece necesario y complementario del análisis epistémico.

El análisis cognitivo de un proceso instruccional consiste, para nosotros, en identificar la trama de funciones semióticas (expresiones, contenidos y códigos interpretativos) que se establecen en los procesos de comunicación entre los agentes participantes (profesor y alumnos). Será pues la indagación sistemática de lo que *puede* significar el texto de la crónica del proceso, y de cada una de las partes en que se puede descomponer dicho texto, para un interpretante potencial (análisis a priori), o la identificación de los significados atribuidos *de hecho* por los emisores de las expresiones (análisis a posteriori). En ambos casos se pueden

[3] Usamos aquí el término cognitivo para referirnos a la cognición individual, o cognición en sentido estricto.

confrontar con los significados institucionales de referencia, lo que permite formular hipótesis sobre conflictos semióticos potenciales.

El análisis cognitivo tendrá en cuenta:

- Los agentes involucrados: los estudiantes (X) a los que se dirige el texto, el profesor (Y) y el investigador o interprete de referencia (Z), que es la persona que realiza el análisis semiótico de las emisiones de Y y de las interpretaciones de X.
- Objetos puestos en juego: expresiones, contenidos y códigos interpretativos (los objetos y significados que se ponen en juego en una expresión determinada pueden ser diferentes según el punto de vista del agente que se considere).
- Diversos tipos de correspondencias entre expresión y contenido, tanto de tipo representacional como instrumental, elemental y sistémico, etc. (Capítulo 7).

Este tipo de análisis ayudará a formular hipótesis sobre puntos críticos del proceso instruccional en los cuales puede haber lagunas o vacíos de significación, o disparidad de interpretaciones que requieran procesos de negociación de significados y cambios en el proceso de estudio. Así mismo, será una metodología básica para caracterizar los significados personales finales sobre los objetos matemáticos puestos en juego y el proceso de su constitución. El texto sometido a análisis puede ser la transcripción de un proceso de resolución de una tarea, entrevistas individuales, o los protocolos de las interacciones entre profesor y alumnos.

9.3.3. Análisis instruccional

El análisis instruccional de un proceso de estudio se propone caracterizar las diversas funciones docentes y discentes, así como los patrones de interacción de las mismas con los distintos componentes del contenido pretendido en dicho proceso. Para ello se identificarán nuevas unidades de análisis de la crónica del proceso, determinadas por los momentos en los que se produce un cambio en tales funciones y patrones de interacción. Las configuraciones docente y discente agrupan las funciones docentes y discentes, respectivamente, asociadas a una configuración epistémica, mientras que la *configuración didáctica* comprende la secuencia interactiva de estados de las trayectorias que tienen lugar a propósito de una situación-problema (o tarea). El análisis instruccional permitirá identificar ciertas regularidades en los comportamiento entre el profesor y los estudiantes a propósito de los distintos elementos del significado de los objetos puestos en juego y sus consecuencias en términos del aprendizaje matemático.

En la tabla 9.1 incluimos ejemplos de cuestiones de investigación clasificadas según las variables el fin y el foco de la investigación y las tres categorías que hemos descrito para cada una de ellas.

Tabla 9.1: Clasificación de problemas de investigación

FOCO DE INVESTIGA-CIÓN	FIN DE LA INVESTIGACIÓN		
	SEMIOMETRÍA Medición/ descripción	ECOLOGÍA Búsqueda de relaciones	DINÁMICA Estudio de cambios
EPISTÉMICO (Significados institucionales)	¿Cuáles son las características de los significados institucionales?	¿Qué relaciones existen entre los significados institucionales relativos a un objeto? ¿Y entre significados de objetos diferentes?	¿Cómo cambian los significados institucionales según el medio?
COGNITIVO (Significados personales)	¿Cuáles son las características de los significados personales?	¿Qué relaciones establece el aprendiz entre los significados de objetos relacionados? ¿Qué factores afecta a los significados personales?	¿Cómo cambian los significados personales como consecuencia de la instrucción?
INSTRUCCIO-NAL (Interacción entre significados institucionales y personales)	¿Cuáles son los patrones de interacción entre elementos de significado y la funciones docentes y discentes?	¿Qué factores condicionan el proceso de instrucción? ¿Cómo diseñar procesos que tengan en cuenta los factores condicionantes?	¿Cómo se desarrolla la instrucción a lo largo del tiempo?

9.4. MARCO Y HERRAMIENTAS METODOLÓGICAS

9.4.1. Enfoque metodológico

Las cuestiones que hemos designado como "semiometría" (caracterización de significados) tienen un carácter esencialmente descriptivo. En nuestro caso, el modelo teórico aporta una tipología de objetos y de funciones semióticas, y por tanto, nuevas categorías de análisis que nos guían en la descripción.

En el caso de la "ecología de significados" el foco de atención es la búsqueda de relaciones entre los diversos tipos de significados y los factores condicionantes, por lo que cuando se pueda distinguir entre variables independientes y dependientes estamos en condiciones de explicar y predecir unos valores en función de los otros.

La "dinámica de significados" implica diseñar nuevos dispositivos de estudio para una organización matemática específica, o bien observar el cambio en sistemas didácticos existentes. El modelo teórico aporta criterios para seleccionar las componentes de los procesos instruccionales posibles y elaborar pautas para la observación, encuesta o medida de las variables pertinentes.

Desde el punto de vista metodológico, en las investigaciones desarrolladas dentro del Enfoque Ontológico-Semiótico de la Cognición e Instrucción Matemática presentado en esta Monografía se deben combinar diversos métodos y técnicas según las distintas facetas de la investigación, dependiendo del problema abordado en las mismas. Al igual que cada problema (o campo de problemas) matemáticos requiere sus conceptos y técnicas específicas para su solución, desde el punto de vista metodológico somos partidarios de emplear en cada caso los enfoques y técnicas de recogida y análisis de datos pertinentes al problema didáctico planteado. La reconstrucción retrospectiva, para su análisis posterior, de un proceso de estudio requiere registrar de manera sistemática y fiable la trama de hechos didácticos ocurridos: actuaciones del profesor, estudiantes, elementos del significado puestos en juego en cada momento, interacciones, etc. Los diversos métodos y técnicas de recogida de datos (observación, encuesta y medida) tienen que implementarse de manera racional y consistente.

En consecuencia, se debe combinar el estudio documental en la componente epistemológica con diversas técnicas y enfoques en las partes experimentales, tanto cognitivas como instruccionales. En el estudio de la evolución de los significados personales de los estudiantes como consecuencia de un proceso de instrucción podemos utilizar el método experimental y cuasi-experimental, donde el control de variables, el tamaño de las muestras y su representatividad deben conferir una gran potencia y fiabilidad a los resultados del análisis estadístico de los datos. Por otro lado, y puesto que este enfoque nos indica las tendencias existentes en la población, pero no muestra toda la riqueza de la variabilidad individual, debemos completar el estudio mediante técnicas de tipo cualitativo. Particularmente, el estudio de casos nos permite mostrar la consistencia de los significados personales sobre los objetos puestos en juego. Así mismo, la observación y registro de los episodios instruccionales muestra la complejidad semiótica de los procesos elementales de estudio de las matemáticas.

Evidentemente, puesto que el estudio cualitativo se hace con muestras de tamaño reducido su finalidad es exploratoria y está principalmente orientado a la formulación de hipótesis que deberán ser contrastadas formalmente en nuevas investigaciones.

Una implicación metodológica del enfoque onto-semiótico será reconocer un papel relevante a los estudios de casos, tanto de experiencias de enseñanza, como de sujetos y episodios didácticos. Esto es una consecuencia del reconocimiento de la complejidad ontológica y semiótica de los diversos objetos que intervienen en la actividad matemática, y los proceso de estudio de sus significados.

La teoría de los significados sistémicos nos aporta el constructo "sistema de prácticas" asociado a todo objeto u organización matemática, que pretende ser un instrumento para el diseño, implementación y evaluación de procesos de instrucción matemática, entendida, no como adiestramiento, sino como enseñanza y aprendizaje organizado.

9.4.2. El análisis ontológico-semiótico como técnica para determinar significados

La técnica del análisis ontológico-semiótico descrita en capítulo 7 comienza a desvelarse como un recurso útil para la investigación en didáctica de las matemáticas. Por una parte, y a un nivel que podemos calificar de "microcóspico", permite identificar significados puestos en juego en una actividad matemática puntual como es el uso de términos y expresiones. A un nivel más general permite describir la estructura semiótica de una organización matemática compleja implementada en un proceso de estudio particular. En ambos niveles, el análisis ontológico-semiótico permite identificar discordancias o disparidades entre los significados atribuidos a las expresiones por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción didáctica. Estos conflictos semióticos pueden explicar, al menos parcialmente, las dificultades potenciales de los alumnos en el proceso de estudio, así como identificar las limitaciones de las competencias y comprensiones matemáticas efectivamente puestas en juego. La información obtenida con nuestro análisis es necesaria si se desea abordar con criterios rigurosos el diseño e implementación del proceso de estudio y determinar los recursos materiales y de tiempo necesarios.

9.4.3. El problema de la evaluación de los conocimientos matemáticos

El problema de la evaluación de los conocimientos matemáticos es planteado por Wheeler (1993) desde su dimensión epistemológica: Si necesitamos evaluar el conocimiento matemático de los estudiantes para una multiplicidad de fines, la primera cuestión que debe dilucidarse se refiere a la naturaleza del propio conocimiento. La razón que da este autor nos parece obvia: "*¿Cómo podemos evaluar lo que no conocemos?*" (p. 87). Esta problemática se corresponde en nuestro modelo teórico con la caracterización de significados sistémicos. Precisamente, una de las finalidades de la epistemología del conocimiento matemático que venimos desarrollando es proporcionar criterios para la elaboración de una teoría de la evaluación del mismo, pero previamente se necesita adoptar o elaborar una teoría sobre su naturaleza, variedad y estructura.

La determinación de los conocimientos subjetivos precisa necesariamente de procesos de inferencia, a partir de los conjuntos de prácticas asociados observados en la situación de evaluación, cuya validez y fiabilidad hay que garantizar (empleamos aquí los términos de validez y fiabilidad en su acepción más amplia: ausencia de sesgo y precisión en los procesos de muestreo de situaciones, sujetos, tiempos y circunstancias inevitables en todo proceso de medición educacional y psicológica) (Messick, 1991; Feldt y Brennan, 1991). La complejidad de este proceso de inferencia se deduce del hecho de que no sólo existen interrelaciones entre los conocimientos referidos a diferentes objetos matemáticos, sino que, incluso para un objeto matemático dado, el conocimiento de un sujeto sobre el mismo, no puede reducirse a un estado dicotómico (conoce o no conoce) ni a un grado o porcentaje unidimensional (conoce x por ciento), lo que hace difícil aplicar a la evaluación de los conocimientos las teorías clásicas psicométricas de maestría de dominio o del rasgo latente (Webb, 1992; Snow y Lohman, 1991). Es necesario progresar hacia modelos integrales y articulados de evaluación matemática, como proponen Fortuny, Giménez y Alsina (1994) y Giménez (1997).

Al reconocer esta complejidad queda patente el problema de la evaluación de los conocimientos. ¿Cuáles son los criterios aplicables para la elección e interpretación del sistema de indicadores empíricos que debemos usar para caracterizar el estado cognitivo global (o parcial), o sea, el conocimiento de un sujeto sobre un objeto matemático reconocido como objeto de saber? Aunque esta problemática, que hemos denominado de la semiometría para diferenciarla de la problemática psicométrica, supone toda una nueva línea de investigación de tipo metodológico en los estudios didácticos, podemos apuntar al menos un primer criterio sobre la selección de las situaciones de evaluación.

El carácter observable de las prácticas sociales permite, mediante un estudio fenomenológico y epistemológico realizado adecuadamente, determinar, para un objeto dado, el campo de problemas asociado, así como los significados institucionales. El análisis de las variables didácticas del campo de problemas proporciona un criterio para estructurar la población de las posibles tareas de las cuales debe extraerse una muestra representativa, si se quiere garantizar la validez de contenido del instrumento de evaluación. Estos dos elementos proporcionarán unos primeros puntos de referencia a tener en cuenta para diseñar las situaciones de evaluación pertinentes para la evaluación de los conocimientos subjetivos, y también para el diseño de ingenierías adecuadas.

9.5. SÍNTESIS E IMPLICACIONES

En este capítulo hemos propuesto una clasificación de las cuestiones de investigación en didáctica de las matemáticas según dos criterios:

- El fin de la investigación, cuando el propósito principal sea la caracterización de significados (sistémicos) de los objetos matemáticos, las relaciones ecológicas entre significados, o su evolución.
- El foco de la investigación, según que el centro de atención sea la cognición institucional, la cognición personal, o la interacción entre ambas cogniciones en el seno de un sistema didáctico.

Los nueve valores asignados para esta variable bidimensional proporciona una pauta para formular cuestiones específicas de investigación, o proyectos de mayor alcance que aborden varias facetas.

Habría que añadir una tercera dimensión a la clasificación teniendo en cuenta lo que podemos denominar *orientación* o intencionalidad de la investigación, para la que asignamos dos valores:

- Descripción /interpretación (qué ha ocurrido, cuál es el significado);
- Explicación/ predicción (porqué ha ocurrido, qué puede ocurrir).

Consideramos que la complejidad de los problemas didácticos y el estado de desarrollo de la didáctica de las matemáticas lleva a que la mayor parte de las investigaciones realizadas en la actualidad tengan una orientación básicamente descriptiva. La búsqueda de explicaciones causales para los fenómenos didácticos nos parece, de momento, difícil de lograr. El Enfoque Ontológico-Semiótico de la Cognición e Instrucción Matemática que proponemos puede ayudar a diseñar investigaciones con la validez y fiabilidad requerida en las investigaciones explicativas.

Capítulo 10

CONCORDANCIAS Y COMPLEMENTARIEDADES

10.1. Introducción
10.2. Nociones de objeto matemático y significado
10.3. Concepciones e imágenes conceptuales
10.4. Representaciones internas y externas
    10.4.1. Observaciones generales sobre la noción de representación
    10.4.2. La representación como función semiótica
    10.4.3. Características y limitaciones del modelo cognitivo de Duval
    10.4.4. Características y limitaciones de la teoría APOS.
10.5. Teoría de los campos conceptuales
10.6. Teoría de situaciones didácticas
10.7. Teoría antropológica en didáctica de la matemática
10.8 Hacia una integración de modelos teóricos

10.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo presentamos una síntesis de las nociones y enfoques que hemos tenido en cuenta para apoyar nuestro modelo teórico y estudiamos sus concordancias y complementariedades. Veremos que las herramientas ontológicas y semióticas que adoptamos permiten analizar posibles correspondencias entre nociones cognitivas propuestas desde distintos marcos teóricos y progresar hacia un modelo unificado de la cognición e instrucción matemática.

Como indicamos en el capítulo 2, la noción de significado sistémico que proponemos está inspirada en las ideas de Wittgenstein sobre el significado y comprensión (Wittgenstein, 1953), interpretadas según autores tales como, Ullmann (1962), Kutschera (1971), Baker y Hacker (1985), McGinn (1984) y McDonough (1989). La corriente del "significado como uso" implica que el concepto clave es el de "inmersión contextual". El contexto se concibe aquí, no como el mero entorno físico de un enunciado lingüístico, sino que se refiere al contexto cultural e institucional.

Debemos resaltar, no obstante, que aunque el punto de partida para la indagación de los significados sea una posición pragmática y antropológica, una vez construido el objeto teórico que describimos como "sistema de prácticas asociado a un campo de problemas", y los diversos objetos considerados como "elementos del significado", adoptamos una posición referencial (Ullmann, 1962), ya que tales objetos son propuestos como referencia del léxico institucional, o de los objetos institucionales y personales correspondientes.

En los apartados que siguen contrastamos nuestro modelo teórico con ideas propuestas por otros autores como, Steinbring, Putnam, Bunge, Ausubel, Douady, Sfard, Dubinsky, así como el marco de las concepciones (Artigue), representaciones internas y externas (Goldin, Janvier, Kaput, Duval). Prestamos una atención especial a las herramientas cognitivas elaboradas en las teorías de los campos conceptuales (Vergnaud), situaciones didácticas (Brousseau) y teoría antropológica (Chevallard), con las cuales compartimos una aproximación epistemológica como fundamento de la investigación en didáctica de las matemáticas.

10.2. NOCIONES DE OBJETO MATEMATICO Y SIGNIFICADO

Steinbring (1991) reconoce la complejidad de la estructura conceptual y establece su íntima conexión "implícita y axiomática" con las situaciones y las representaciones, dentro de lo que denomina triángulo epistemológico, constituido por el objeto, el signo y el concepto. Reconoce, asimismo, el papel de la actividad del sujeto para guiar y desarrollar las relaciones entre los elementos del mencionado triángulo. Este autor no propone una definición de significado de un concepto, pero sí introduce la idea de significado intencional de los signos matemáticos y de las situaciones de referencia: "El signo en sí mismo no tiene significado matemático, sólo en su intención para algún contexto; y los elementos del nivel objeto sólo proporcionan significado matemático en la intención de mostrar una estructura relacional oculta en la situación de referencia. Los signos matemáticos y los aspectos de las situaciones de referencia deben ser dotados de significado por intención para llegar a ser elementos del triángulo epistemológico" (p. 85).

Desde nuestro punto de vista, esta noción de significado intencional de los signos y objetos podemos relacionarla estrechamente con nuestra noción de práctica significativa, en la cual se reconoce una finalidad (diríamos también una función o intencionalidad) para la resolución de los problemas o situaciones.

La consideración de la noción de significado como una entidad compuesta no es nueva. Putnam (1991) presenta el significado como un "vector" o sucesión finita de componentes entre los cuales destaca:

"(1) los marcadores sintácticos que se aplican a las palabras, como "nombre";

(2) los marcadores semánticos que se aplican a la palabra, como "animal", "período de tiempo";

(3) una descripción de los rasgos adicionales del estereotipo, si lo hubiere;

(4) una descripción de la extensión.

Parte de esta propuesta consiste en la siguiente convención: "los componentes del vector representan todos ellos, excepto la extensión, una hipótesis acerca de la competencia del hablante individual" (p. 191).

Bunge (1985) define la significación de un concepto por medio de un par constituido por la intensión y extensión. Lo expresa de la siguiente manera:

Sig (C) = <I, E> , donde,

C: Un concepto;

Sig (C): El significado del concepto;

I: intensión, las notas esenciales que caracterizan el concepto;

E: extensión, conjunto de objetos a los cuales se aplica o refiere el concepto.

Al conjunto de notas inequívocas de un concepto lo llama Bunge (1985) *núcleo intensional*. Aunque lo considera insuficiente para caracterizarlo completamente, el núcleo intensional proporciona una definición de trabajo del concepto.

Nuestra distinción entre significado personal e institucional se relaciona con la realizada por Ausubel (Ausubel y cols, 1983; Ausubel, 2000), quién distingue entre significado psicológico y significado lógico, aunque conceptualizados de manera diferente. Para Ausubel un material de enseñanza posee significado lógico (o potencial) si sus elementos están organizados, no sólo yuxtapuestos, de tal forma que las distintas partes de la estructura se relacionan entre sí de modo no arbitrario. Desde el punto de vista del sujeto se produce un aprendizaje significativo "si la tarea de aprendizaje puede relacionarse, de modo no arbitrario y sustancial (no al pié de la letra), con lo que el alumno ya sabe" (Ausubel y cols, 1983, p. 37). Estos autores conciben el contenido como una red de conceptos y proposiciones lógicamente organizados; pero respecto a la estructura interna de los conceptos adoptan una concepción clásica según la cual un concepto está constituido por una serie de atributos necesarios y suficientes, de tal modo que todos los ejemplos del concepto tienen unos atributos y ningún no-ejemplo del concepto posee esos atributos.

Para nosotros el establecimiento de relaciones entre los distintos objetos, tanto a nivel personal como institucional, es una parte esencial de los sistemas de prácticas de los que emergen los objetos, pero no agotan todos los aspectos relevantes involucrados en tales sistemas y, por tanto, en el significado.

La dialéctica útil-objeto en R. Douady

Douady (1991) atribuye a los conceptos matemáticos un carácter no unitario, identificando dos polos o dimensiones principales de los mismos: el aspecto objeto (cultural, impersonal e intemporal), plasmado en definiciones y propiedades características y el aspecto útil o herramienta para resolver problemas por alguien en un momento dado. Por otra parte considera que el "significado de un concepto se deriva del contexto en que está implicado. Por tanto, es el estatuto como útil lo que entra en juego. También se deriva de las relaciones desarrolladas en el contexto con otros conceptos en el mismo dominio matemático o no" (p. 116). Se ve en esta cita que Douady comparte una noción pragmática del significado pero no llega a proponer una conceptualización del mismo. Tampoco queda patente una formulación clara de la génesis de los conceptos.

En nuestra definición de significado de un objeto incorporamos en un todo dialéctico tanto el objeto (fijado intensivamente) como su uso en situaciones problemáticas características, así como las representaciones simbólicas asociadas al mismo, las cuales intervienen también en la actividad de resolución. Habitualmente estos usos extensivos de los objetos son considerados como las aplicaciones de los mismos, algo independiente del objeto al que no aporta nada nuevo; éste tiene en germen toda la colección de aplicaciones posibles. Esta perspectiva impide comprender la dinámica de la formación y evolución de los conceptos, tanto culturalmente como mentalmente.

10.3. CONCEPCIONES E IMÁGENES CONCEPTUALES

La conceptualización epistemológica de la noción de concepción (véase capítulo 2) puede ser asimilada a la idea de un emergente de ciertos subsistemas de prácticas sociales asociadas a subcampos de problemas de un campo dado, esto es, se corresponde con lo que hemos denominado objeto institucional O_I. El análisis de las definiciones del concepto de círculo o de tangente realizado por Artigue (1990), por ejemplo, sería una aportación a la caracterización parcial de la estructura del ente teórico que nosotros denominamos significado del objeto matemático designado por el término "tangente": cada definición aporta aspectos diferenciales, bien en las representaciones utilizadas o en la eficacia relativa para la resolución de problemas progresivamente más generales y abstractos. Definen, por tanto, significados parciales del objeto matemático tangente.

Podemos relacionar el punto de vista cognitivo global de la concepción con el constructo objeto personal O_p, así como los de concepto y teorema en acto (Vergnaud, 1990) corresponderían a aspectos locales de las concepciones del sujeto.

La idea de concepción sobre un objeto y de relación al objeto, tanto personal como institucional, parten de un dato previo cuya existencia, naturaleza y estructura interna no se analiza ni cuestiona: el objeto. Presentan, en consecuencia, desde nuestro punto de vista, una debilidad a la hora de investigar los procesos de formación de tales concepciones o relaciones. Además, no tratan el problema de su evaluación y de la validez de las inferencias que se deben realizar a partir de las manifestaciones empíricas. No entran en la distinción entre constructo inobservable y el sistema de indicadores correspondientes.

Para la investigación didáctica el constructo teórico primario que proponemos es el de "sistema de prácticas sociales" asociadas a un campo de problemas, $P_I(C)$, que dado su carácter social, son compartidas en el seno de I y, por tanto, observables. De este sistema emerge el objeto O_I cuyo significado sistémico $S(O_I)$ no es otra entidad que el propio sistema de prácticas del que emerge y que constituye al mismo tiempo su sistema de indicadores empíricos.

El análisis fenomenológico, semiótico y antropológico permitirá determinar la estructura de $S(O_I)$, lo que constituirá el punto de referencia para estudiar la génesis y desarrollo de los significados personales $S(O_p)$, para los sujetos p de I, al menos en la parte observable de estos significados.

Imagen y definición conceptual

Las nociones de "imagen y definición conceptual" (*concept image* y *concept definition*) propuestas por Tall y Vinner (1981) presentan las siguientes características y limitaciones:

1) Están centradas casi de manera exclusiva en aspectos mentales de la cognición matemática. Los conocimientos matemáticos institucionales prácticamente quedan reducidos a conceptos, y estos a su vez a una definición formal. Las tareas, situaciones-problemas matemáticos, las operaciones y técnicas puestas en juego en la actividad matemática, que configuran los "conceptos matemáticos" (entendidos como sistemas u organizaciones complejas) no pueden reducirse a una definición formal. Además, no es pertinente hablar de la definición de un concepto matemático ya que en general encontramos una variedad de definiciones para un mismo concepto, cada una recogiendo aspectos parciales (sentidos) o momentos en el proceso de generación de los objetos matemáticos. Se trata de reglas que fijan o regulan la actividad matemática relativa a una clase de tareas.
2) El énfasis atribuido a estos constructos mentales para explicar los conflictos cognitivos de los sujetos oculta en cierto modo los factores institucionales e instruccionales que pueden explicar las deficiencias de los aprendizajes.
3) No se tiene en cuenta el papel del lenguaje, en sus diferentes registros semióticos, como instrumento de la actividad matemática y como factor explicativo de los conflictos cognitivos.
4) El reconocimiento de la dependencia de todas estas nociones cognitivas de las situaciones (contextos) debería llevar a adoptar como unidad de análisis un proceso de estudio de un tipo de problemas en un contexto instruccional dado, tratando de explicar los estados cognitivos, los aprendizajes logrados y su progresión, mediante los factores contextuales.

10.4. REPRESENTACIONES INTERNAS Y EXTERNAS

10.4.1. Observaciones generales sobre la noción de sistema de representación

Consideramos que la noción de "sistema de representación" no modeliza de manera completa la actividad matemática y los objetos emergentes de dicha actividad. La matemática queda reducida a lenguaje, sistemas notacionales y gráficos; los problemas, las técnicas, las reglas matemáticas y su justificación quedan al margen del modelo epistemológico, por lo menos a nivel implícito. La representación se caracteriza mediante una correspondencia abstracta entre dos entidades que son puestas en alguna relación referencial una con otra, por un actor o un observador. "Pero deliberadamente no se presta atención al tipo de objetos que se ponen en correspondencia" (Kaput, 1998, p. 266). Parece necesario decir qué se está representando y de qué manera, ya que esta falta de explicitación puede implicar sesgos en el estilo de descripción y la adopción de hipótesis sobre lo que es cognoscible y los modos de conocer.

La distinción entre representaciones internas y externas es fundamental para la mayor parte de los autores. Las primeras se refieren a hipotéticos constructos mentales (competencias, capacidades, concepciones, etc.) y las segundas a notaciones materiales de un tipo u otro. Este dualismo cognitivista lleva a preguntar (Kaput, 1998, p. 267): ¿Qué es una representación mental? ¿Qué se quiere decir cuando decimos que "representa" a algo? ¿Para quién? ¿Cómo? ¿Cuál es la diferencia entre la experiencia de una representación interna y la correspondiente a una representación externa? ¿Una representación externa es un sistema constituido social o personalmente?

Las investigaciones que adoptan las representaciones externas como un constructo clave están avocadas, al menos implícitamente, a adoptar una epistemología matemática de tipo realista/objetivista: los significados de las representaciones tienen una existencia independiente de las personas y los contextos. Esta visión objetivista del significado se enfrenta a perspectivas que conciben los significados como socialmente construidos, incluso para las matemáticas. Estos enfoques no objetivistas de la cognición sostienen que los propios objetos existen como tales sólo en marcos de referencia humanos; no se niega la existencia de un mundo externo, sino que se considera que asignamos "objetividad" a los elementos del mundo mediante la aplicación de esquemas conceptuales socialmente construidos.

El lenguaje matemático, esto es, los diversos sistemas notacionales (verbales, gráficos, gestuales, etc.) se presentan como medios de expresión de los objetos matemáticos (conceptos, proposiciones, teorías). Por tanto, parece que se trata de algo relacionado, pero distinto de los objetos matemáticos. Kaput (1998, p. 269) se pregunta, ¿Qué es el sistema de numeración decimal? ¿Es interno, externo, o ambas cosas? ... ¿Qué representa (números)? ¿Para quién y bajo qué circunstancias? ¿Es un objeto matemático? O sea, es una parte de las matemáticas, o sólo un lenguaje usado para representar y trabajar con objetos matemáticos reales, los números naturales?

Esta problemática no queda aclarada en el marco de los sistemas de representación.

Vemos, por tanto, que la noción de representación, ampliamente usada en las investigación de didáctica de la matemática (capítulo 2), es conflictiva, ya que se usa con distintos significados. Además, está estrechamente relacionada con las de significado, comprensión y en última instancia con el conocimiento. La complejidad del tema y su importancia están en los objetos matemáticos que se trata de representar, su diversidad y naturaleza. Hablar de representación (significado y comprensión) implica necesariamente hablar del conocimiento matemático, y por tanto, de la actividad matemática, sus "producciones" culturales y cognitivas, así como de las relaciones con el mundo que nos rodea.

La dificultad aparece cuando se tiene en cuenta el "triángulo epistemológico": el objeto o referente; el signo, símbolo o significante; el concepto, significado o referencia, así como los sujetos interpretantes de las relaciones que se establecen entre los elementos del triángulo. Este es un tema esencial para la filosofía, la semiótica y las ciencias cognitivas en general, y es inevitable también para la educación matemática, ya que nuestro compromiso es la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, o sea, la actividad matemática y los objetos y sujetos que se ponen en juego en la misma.

Una respuesta a la pregunta sobre los objetos involucrados en la representación y comprensión, que se da con frecuencia es, "representar y comprender los conceptos matemáticos". Pero, ¿qué son los conceptos matemáticos? Además, no sólo hay conceptos en los libros de matemáticas:

encontramos también, problemas, notaciones, procedimientos, proposiciones, argumentaciones; sistemas o estructuras matemáticas, teorías. Todos estas “cosas” a las cuales nos referimos son “objetos matemáticos” (intervienen en la actividad matemática) y también tienen que ser representados y comprendidos. Incluso hasta las propias “representaciones materiales” (los objetos ostensivos) son con frecuencia representados unos por otros y tienen que ser conocidos y comprendidos.

Un aspecto que incrementa la dificultad del problema es que con frecuencia nos referimos con el mismo término a cosas diversas. Con la expresión “número real”, por ejemplo, nos referimos tanto a un concepto (regla que permite el reconocimiento del objeto) como a toda una estructura o sistema matemático, o si se prefiere, una praxeología. El papel de las representaciones y los procesos de comprensión involucrados en cada objeto es bien distinto.

En definitiva, consideramos que para el análisis didáctico de los procesos de estudio de las matemáticas necesitamos adoptar un modelo ontológico y epistemológico suficientemente rico que tenga en cuenta la variedad objetos que se ponen en juego. Todos esos objetos tienen que ser “representados”, "usados", y “comprendidos” en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

10.4.2. La representación como función semiótica

La variedad de objetos y facetas que proponemos en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática descrito en esta Monografía tiene que ser tenida en cuenta cuando hablamos de representación, conocimiento, significado y comprensión de las matemáticas. Los "sistemas de representación externos" van a estar incorporados en sistemas de prácticas operativas y discursivas más globales y dinámicos, los cuales se constituyen a partir de tipos de situaciones problemas y de las acciones requeridas para su solución en un contexto institucional dado. Proponemos que los objetos puestos en correspondencia pueden ser materiales o mentales.

Esta manera de entender las funciones semióticas se inspira en una larga tradición que va de Peirce a Schutz pasando por Husserl (Contreras y Font, 2002). La noción de signo, tal como la describe Peirce, es un emparejamiento individual entre dos fenómenos asociados que pueden ser físicos o mentales. La interpretación de las funciones semióticas que proponemos generaliza de manera radical la noción de representación usada en las investigaciones cognitivas realizadas en educación matemática que en muchos casos entienden la representación básicamente en términos de Saussure (una imagen mental que se relaciona con un concepto en la mente del sujeto)

La noción de representación y registro semiótico usadas por diversos autores hacen alusión, según nuestro modelo, a un tipo particular de función semiótica representacional entre objetos ostensivos y objetos no ostensivos (mentales). La función semiótica generaliza esta correspondencia a cualquier tipo de objetos y, además, contempla la dependencia de tipo instrumental u operatoria.

El significado (y los sentidos) de un objeto matemático deja de ser una entidad etérea y misteriosa. Es el contenido de cualquier función semiótica y, por tanto, según el acto comunicativo correspondiente, puede ser un objeto ostensivo o no ostensivo, concreto o abstracto, personal o institucional; una praxeología, una situación, una notación, concepto, etc.

La comprensión y el conocimiento no se conciben meramente en su dimensión mental, sino esencialmente en sus dimensiones personales e institucionales, involucrando, por tanto, los sistemas de prácticas actuativas y discursivas ante ciertos tipos de tareas problemáticas.

10.4.3. Características y limitaciones del modelo cognitivo de Duval

La contribución teórica de Duval se inscribe dentro de la línea de indagación que postula una naturaleza mental (las representaciones internas) para el conocimiento matemático y que atribuye un papel esencial en los procesos de formación y aprehensión de las representaciones mentales (noesis) al lenguaje, en sus diversas manifestaciones. La disponibilidad y uso de diversos sistemas de representación semiótica, sus transformaciones y conversiones, se considera imprescindible en la generación y desarrollo de los objetos matemáticos, pero la semiosis (producción y aprehensión de representaciones materiales) no es espontánea y su dominio debe ser un objetivo de la enseñanza. Una atención particular debe darse a la conversión entre registros no congruentes entre sí.

Estas ideas nos parecen razonables y útiles para la educación matemática. Sin embargo, encontramos las siguientes limitaciones en el modelo cognitivo adoptado por Duval.

1. No se propone una teoría explícita de qué sean los objetos matemáticos, aparte de ser concebidos como representaciones internas (conceptos, ideas, nociones, creencias, etc.). No se concede ningún papel a la acción del sujeto, ligada a situaciones-problemas. Sólo se enfatiza el papel mediador del lenguaje y las tareas de producción y manipulación de los registros semióticos.

2. Comprensión y diversidad de registros. Se postula que para la aprehensión conceptual es necesario el trabajo con al menos dos registros semióticos (¿qué es un concepto en el modelo de Duval?). Es como si estas representaciones semióticas se concibieran como "proyecciones " de un objeto multidimensional; para que podamos imaginar cómo es ese objeto debemos disponer de las diversas "vistas" parciales del objeto y ser capaces de combinarlas para obtener la imagen global. Parece esconderse aquí una forma de empirismo. Sin embargo, la aprehensión del componente discursivo del número 3, por ejemplo, se consigue cuando se conoce (entiende) que el signo '3' es un miembro de la estructura numérica natural, o sea, un miembro de (N, +,. ≤) y es indiferente usar cualquier numeral para indicar ese miembro. El uso de distintos registros semióticos proporciona propiedades ergonómicas específicas que enriquecen progresivamente la comprensión de los números, pero no es necesario "conocer" varios sistemas numerales para saber qué son los números naturales. El componente praxémico (situacional y actuativo) del significado sistémico del número requiere el conocimiento de los usos del número, de las técnicas e instrumentos de contar y ordenar. El conocimiento del número no se reduce a un juego de representaciones.

La observación del trabajo matemático profesional no apoya esta dependencia de la noesis respecto de la diversidad de registros. Pensemos en la eficacia del lenguaje algebraico para investigar en geometría. Esto implica la no necesidad de la diversidad de registros cuando se tiene en cuenta la valencia instrumental de los ostensivos y los conceptos matemáticos (en su componente discursiva) se interpretan como reglas de manipulación de ostensivos (por supuesto, no arbitrarias). Cuando se dispone de un sistema de representación más efectivo en términos operatorios, éste desplazará al menos efectivo. Pero además, si el no-ostensivo es una regla de cómo manipular al ostensivo en determinadas tareas y circunstancias, la variedad de ostensivos implica variedad de reglas, lo que plantea un problema adicional de establecer la equivalencia, para ciertos propósitos, de dichas reglas. Esto quiere decir que una diversidad de ostensivos puede de hecho suponer una dificultad adicional e innecesaria para la comprensión (dominio) de una regla.

3. El modelo de cognición matemática de Duval no incorpora la faceta institucional del conocimiento matemático. Esto nos deja sin herramientas para planificar los procesos instruccionales matemáticos y entender el aprendizaje y la comprensión matemática como un acoplamiento progresivo entre significados institucionales y personales de objetos matemáticos, entendidos como sistemas de prácticas (Capítulos 3 y 4).

10.4.4. Características y limitaciones de la teoría APOS

En el modelo teórico propuesto por Duvinsky y colaboradores, el centro de atención es el sujeto cognitivo y la descripción del proceso de construcción del conocimiento sobre un concepto matemático (función, inducción matemática, cálculo gráfico, etc.). Se pretende describir el aprendizaje logrado por un estudiante, pero sin hacer referencia explícita al tipo de instrucción o proceso de estudio seguido. No se trata de explicar las deficiencias de la comprensión lograda mediante las características del proceso de estudio, sino clasificar los sujetos en niveles discretos de comprensión de los conceptos pretendidos.

Los objetos matemáticos (generalmente se mencionan como conceptos) no son analizados en cuanto objetos institucionales o culturales. No se explicita un modelo de actividad matemática mediante la cual se generan los objetos matemáticos; la descomposición genética del concepto hace más bien referencia a los esquemas cognitivos del sujeto.

Este modelo teórico no asigna ningún papel explícito a las situaciones problemas que motivan la acción del sujeto, su agrupamiento en tipos y campos de problemas, y que constituyen la razón de ser de la actividad matemática y de los objetos emergentes. Tampoco se modeliza de ningún modo el papel del lenguaje (simbólico, gráfico, etc.), y por tanto se ignoran los conflictos semióticos que se ponen en juego en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

10.5. TEORÍA DE LOS CAMPOS CONCEPTUALES

La teoría de los campos conceptuales de Vergnaud (1990; 1998) es la que más nociones cognitivas (en el sentido de cognición individual) ha introducido: esquema, invariante operatorio (concepto en acto y teorema en acto), concepto, campo conceptual, sentido de un conocimiento. Las nociones de conocimiento y competencia matemática son usadas, pero no definidas explícitamente.

La noción de esquema

La noción de esquema incorpora elementos actuativos (técnicas o modos de actuar) y elementos discursivos implícitos (conocimientos en acto); pero además un esquema está asociado a una clase de situaciones, entendidas como tareas. Nos parece que este constructo puede desempeñar un papel similar a la noción de "sistema de prácticas personales ligadas a un tipo de problemas" (Godino y Batanero, 1994), y por tanto, también a lo que podría denominarse una "praxeología personal" de carácter puntual o local.

La noción de concepto y campo conceptual

En la definición de significado de un concepto (entendido como sistema) que hemos propuesto intervienen los tres elementos de la tripleta que propone Vergnaud como definición de un concepto. Coincidimos con este autor al explicitar que las situaciones y representaciones están íntimamente asociadas con la actividad de la que emergen los objetos matemáticos culturalmente definidos, esto es, consideramos necesario destacar la relación dialéctica entre la actividad (la praxis) y el concepto. En nuestra definición se encuentran presentes los elementos destacados por Vergnaud pero organizados de un modo específico, dando lugar al ente teórico que denominamos significado sistémico del objeto correspondiente. El concepto sería el emergente de este sistema de prácticas. El componente I de la tripleta conceptual de Vergnaud consideramos que describe adecuadamente el núcleo intensional del significado del concepto (Bunge, 1985), y lo podemos denominar significado en sentido estricto, pero aunque proporciona una definición operativa del concepto no agota toda la significación del mismo.

Los invariantes operatorios (conceptos y teoremas en acto) son entidades cognitivas, no epistémicas, al igual que la noción de esquema de la cual son constituyentes. “Un concepto-en-acto no es de hecho un concepto, ni un teorema-en-acto un teorema. En la ciencia, los conceptos y los teoremas son explícitos y se puede discutir su pertinencia y su verdad” (p.144)

Una primera observación que podemos hacer sobre la descripción del concepto es el no distinguir con claridad el plano personal del institucional, ni su carácter relativo al sujeto individual o a los contextos institucionales. Se propone como un elemento de referencia para el investigador con un carácter absoluto o universal. La incorporación del conjunto de situaciones y de significantes, junto con los “invariantes operatorios constituyentes de los esquemas”, lleva inevitablemente a confundir los planos cognitivos y epistémicos, lo que va a dificultar estudiar la dialéctica entre ambas facetas de la cognición matemática.

La noción de campo conceptual y los ejemplos que pone de ella tiene unas características muy generales (estructuras aditivas, estructuras multiplicativas, la electricidad, la mecánica, las magnitudes espaciales, la lógica de clases). Al igual que la noción de concepto no se relativiza a los contextos institucionales, dificultando de este modo el análisis de la dinámica y ecología de tales formaciones epistémicas.

La noción de sentido

"El sentido es una relación del sujeto a las situaciones y a los significantes. Más precisamente, son los esquemas evocados en el sujeto individual por una situación o por un significante lo que constituye el sentido de esta situación o de este significante para este sujeto. Los esquemas, es decir las conductas y su organización. El sentido de la adición para un sujeto individual es el conjunto de esquemas que puede poner en práctica para tratar las situaciones a las cuales es confrontado, y que implican la idea de adición” (Vergnaud, 1990, p. 158).

En esta descripción Vergnaud está haciendo corresponder a un objeto matemático, por ejemplo,“la adición”, un conjunto de otros objetos (situaciones, esquemas, significantes), o sea, lo que anteriormente ha presentado como un concepto en sentido cognitivo. Este sistema, en lugar de conjunto, ya que lo importante es que está estructurado, lo considera como el sentido o significado de la adición para el sujeto, por lo que guarda una fuerte relación con uno de los tipos de significados que proponemos en la teoría de las funciones semióticas: el significado personal de un objeto matemático considerado como "sistema de prácticas personales eficaces para la resolución de un cierto tipo de problemas".

En este punto podemos decir que la teoría de los campos conceptuales no introduce una versión institucional de la noción de sentido, por lo que se dificulta el estudio de la dialéctica entre las dimensiones personales e institucionales de la cognición matemática.

10.6. TEORÍA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS

Estudiaremos el uso que se hace en Teoría de Situaciones de los términos 'conocimiento' y 'saber', restringiéndonos al artículo de Brousseau (1986), tratando de dilucidar si en ese uso hay una distinción clara entre lo que nosotros denominamos "conocimiento subjetivo" y "conocimiento institucional".

Guy Brousseau postula la existencia de un saber matemático cuya comunicación /reconstrucción por el sujeto, en el seno de los sistemas didácticos, es el compromiso de la didáctica. La transposición didáctica da cuenta de las adaptaciones de estos saberes para su estudio en el contexto escolar.

Parece claro que el saber matemático se refiere a una forma especial de conocimiento institucionalizado, que habitualmente se registra de forma axiomática y mediante la cual se despersonaliza y decontextualiza. "Este saber cuyo texto existe ya, no es una producción directa del maestro, es un objeto cultural, citado o recitado" (p. 73).

Pensamos que atribuye al saber matemático unos rasgos que podríamos calificar de absolutos: existe un "saber erudito" que está ahí (sin negar su carácter histórico y evolutivo) cuya apropiación por los estudiantes es el compromiso de la enseñanza. Con frecuencia se habla del saber en singular, pero en otras se usa el plural.

Generalmente utiliza el término 'saber' ligado con el calificativo de "saber formal", "saber erudito", "saber teórico", "saber práctico", lo que indica que se interpreta como algo externo o institucional, como elemento de referencia de la enseñanza y el aprendizaje. La distinción saber-teórico, saber-práctico indica una primera "descomposición" del saber que podría relacionarse con la praxis y el logos, con lo conceptual y lo procedimental, pero no hemos encontrado un análisis más detallado de tales componentes básicos del saber matemático.

El supuesto básico de la teoría de situaciones consiste en modelizar cada conocimiento y /o saber, mediante las situaciones-problema: “Los conocimientos aparecen como la solución óptima a los problemas propuestos, solución que el alumno puede descubir” (p. 37) “Cada conocimiento debe surgir de la adaptación a una situación específica” (p. 38)

Nos parece fundamental el progreso dado por la teoría de situaciones al conectar genéticamente los conocimientos matemáticos con las situaciones-problemas (tareas), pero pensamos que es insuficiente el análisis de los constituyentes del conocimiento: las situaciones son uno de los constituyentes pero no el único. En la teoría de situaciones, y en los campos conceptuales tenemos propuestas, aunque de un modo implícitas, para progresar en la descomposición controlada del conocimiento. Por una parte están las situaciones de formulación- comunicación en las que intervienen de manera esencial los instrumentos lingüísticos (representaciones materiales que propone Vergnaud), y las situaciones de validación, en las cuales intervienen lo que podemos denominar objetos validativos (argumentaciones , demostraciones). Pero los conceptos y los teoremas deben ser reconocidos como constituyentes esenciales del componente discursivo del conocimiento, tanto en su versión personal (conceptos y teoremas en acto) como institucional, conceptos y teoremas matemáticos.

La teoría de situaciones es respetuosa con las aportaciones de la psicología en el estudio de los procesos de construcción de los conocimientos (por parte del sujeto). “Los conocimientos evolucionan según procesos complejos. Querer explicar esas evoluaciones únicamente por las interaciones efectivas con el medio, sería ciertamente un error, pues muy pronto los niños pueden interiorizar las situaciones que les interesen y operar con sus “representaciones internas”, experiencias mentales muy importantes (p. 101).

10.7. TEORÍA ANTROPOLÓGICA EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

En una primera etapa de desarrollo de la Teoría Antropológica para la Didáctica (TAD) se introdujeron las nociones de objeto, práctica institución y relación con el objeto (Chevallard, 1992).

Respecto a las nociones de práctica y objeto descritas por Chevallard (1991), consideramos que nuestro modelo teórico precisa estas nociones, ya que en el trabajo citado no se especifica una institución de referencia en la cual tienen lugar las prácticas (en distintas instituciones se realizan prácticas distintas, lo que dará lugar a objetos distintos) y, además, no cualquier práctica es pertinente a la emergencia de los objetos (algunas prácticas son incorrectas, inapropiadas o irrelevantes).

Desde nuestro punto de vista, interesados por explicitar una noción operativa de significado de un objeto matemático, encontramos de interés distinguir entre el nombre de un objeto, el objeto institucional (como una entidad cultural), el objeto personal (tipo cognitivo) y el sistema de prácticas sociales ligadas a la resolución de problemas del que emerge esa unidad cultural, al cual consideramos como significado del objeto. Se produce aquí una semiótica connotativa en el sentido descrito por Eco (1991): el término "función", por ejemplo, denota la idea de función, y ésta a su vez connota el sistema de usos.

Las nociones de institución, práctica y objeto son usadas por Chevallard (1992) para definir el concepto de 'rapport au savoir', aunque pensamos que el significado que atribuye a estas nociones no coincide completamente con las que hemos propuesto nosotros en nuestro trabajo. Según nuestra teorización, no todas las prácticas son pertinentes para la emergencia de los objetos. Además, una práctica debe concebirse como ligada a un *tipo* o *campo de problemas* correspondiente. La introducción de la noción de significado (personal e institucional) como un sistema de componentes -elementos de significado, prácticas prototípicas significativas- centra nuestra atención sobre la naturaleza sistémica y compleja del significado, entendido aquí como organización matemática y cognitiva.

Consideramos útil distinguir entre el nombre de un objeto, el objeto (como una entidad cultural y psicológica) y el sistema de prácticas ligadas a la resolución de los problemas del que esta unidad cultural emerge, y que presentamos como el significado del objeto. Esta formulación nos permite conceptualizar mejor los procesos de inferencia que se requieren para caracterizar el conocimiento de los sujetos sobre los objetos matemáticos, a partir de las manifestaciones empíricas de este conocimiento.

Con nuestra definición de objeto institucional postulamos la existencia cultural de diferentes objetos, según la institución de referencia, en situaciones en las que una concepción absolutista de las matemáticas sólo percibe un objeto. Esta formulación es una consecuencia de las hipótesis pragmáticas que hemos adoptado como base y su utilidad para el análisis antropológico de los fenómenos cognitivos y didácticos. Rotman (1988) ha llegado a conclusiones similares en su análisis semiótico de la actividad matemática cuando afirma que los números estudiados por los babilonios, los griegos, los romanos y los matemáticos actuales son diferentes. Nosotros pensamos que estos números son similares por un fenómeno de apropiación regresiva.

La teoría antropológica se ha centrado hasta el momento, casi de manera exclusiva, en la dimensión institucional del conocimiento matemático. Recientemente se ha adoptado la noción de praxeología como uno de los constructos teóricos básicos de la teoria.

Las nociones de praxeología, y relación institucional al objeto se proponen como los instrumentos para describir la actividad matemática y los objetos institucionales emergentes de tal actividad. El constructo cognitivo (en sentido restringido) que propone es el de "relación personal con el objeto" que agrupa todas las restantes nociones propuestas desde la psicología (concepción, intuición, esquema, representación interna, etc.). Pero esta noción de relación personal con el objeto no ha sido desarrollada, al postularse como previa y determinante la caracterización de las praxeologías matemáticas y el estudio de las relaciones institucionales.

A continuación hacemos algunas comparaciones entre las nociones de la TAD y las propuestas en la Teoría de los Campos Conceptuales (TCC). Es claro que la noción de situación que usa Vergnaud es la misma que la noción de tarea que se usa en TAD. Las técnicas, se describen como *maneras de realizar las tareas*; una técnica no es necesariamente de naturaleza algorítmica o casi algorítmica: no es así más que en casos poco frecuentes. Podemos estar tentados en comparar esta noción con la de "invariante operatorio", constituyentes de los esquemas, pero no parece correcto, ya que como invariantes operatorios incluye Vergnaud a los conceptos-en-acto y teoremas-en-acto, y por tanto, son más bien "reglas que orientan la accción del sujeto". Por otra parte, en TAD no se hace ninguna referencia a que las técnicas se consideren como herramientas para el análisis de la cognición del sujeto, sino más bien para la cognición, entendida en sentido institucional.

Parece claro que como constituyentes de las tecnologías y de las teorías están, aunque no se ha precisado hasta el momento, los conceptos, las proposiciones y las demostraciones matemáticas, mediante los cuales se logra justificar y explicar las técnicas. Estas nociones están implícitamente contenidas en las praxeologías matemáticas y tienen una naturaleza epistémica, o sea, institucional.

Según esta interpretación, la noción de campo conceptual, que de una manera implícita también incluye los algoritmos y procedimientos de resolución de los tipos de problemas que se incluyen en los campos conceptuales, podría asimilarse a la noción de “praxeología matemática global”. Ambas nociones tienen una naturaleza institucional e incluyen componentes similares. Ciertamente la noción de praxeología es bastante más general y flexible, ya que se aplica también a tipos de problemas más puntuales, aparte de distinguir entre los dos polos del saber matemático: el saber-hacer y el saber-qué, que podría relacionarse con la división clásica en los estudios cognitivos, de conocimientos procedimental y conceptual.

Un análisis similar aplicado a la noción de esquema muestra que en este constructo se tiene en cuenta los tipos de situaciones-tareas, los invariantes operatorios, las reglas de acción, las inferencias o razonamientos. Incorpora, por tanto, elementos situacionales, actuativos, conceptuales y argumentativos. Podemos interpretar el esquema de la TCC como una especie de “praxeología personal puntual”, constructo no contemplado aún en la TAD, pero que debería ser considerado a fin de disponer dentro del enfoque antropológico de instrumentos para estudiar la dialéctica entre las dimensiones personales /subjetivas e institucionales de la cognición matemática. Esta incorporación es lo que hacemos en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática que describimos en esta Monografía.

Transposición didáctica, significado y ecología conceptual

Chevallard (1985) introdujo la expresión “transposición didáctica” para referirse al cambio que el conocimiento matemático sufre para ser adaptado como objeto de enseñanza. La transposición se manifiesta en la diferencia existente entre el funcionamiento académico (a nivel de investigación, como "saber sabio") de un determinado conocimiento y el funcionamiento didáctico del mismo.

Esta noción puede ser interpretada en términos de diferencias en el significado praxeológico de los objetos matemáticos entre la "institución matemática" y las instituciones escolares. Por diversas causas los usos y connotaciones de las nociones matemáticas tratadas en las instituciones de enseñanza son necesariamente restringidos. El problema didáctico se presenta cuando, en forma innecesaria, el muestreo realizado sobre los componentes del significado tiene un carácter sesgado o se añaden prácticas inadecuadas, presentando, no un significado limitado del concepto (lo cual es inevitable), sino otro incorrecto o irrelevante (por ejemplo, cuando ocurre un deslizamiento metadidáctico).

En la construcción del currículo se opera ya una primera etapa del proceso de muestreo inevitable que transforma el significado de los objetos matemáticos. La selección de unos saberes a enseñar en los distintos niveles y grupos de alumnos, supone un fraccionamiento y secuenciación del saber que impone severas restricciones en el significado del mismo. Además, al proponer ciertos patrones de uso, ciertas connotaciones y notaciones para los constructos matemáticos, excluyendo otros posibles, se está condicionando el entorno de significación de los mismos que se ofrece al alumno.

La investigación didáctica debe aportar conocimientos sobre cómo llevar a cabo esta selección muestral de un modo racional, teniendo en cuenta las restricciones impuestas por el tiempo y los restantes elementos del proceso didáctico. Se debe aportar conocimiento sobre los sesgos conceptuales y vacíos de significación que necesariamente se producirán en las relaciones personales de los alumnos a las matemáticas como consecuencia de las distintas opciones de desarrollo curricular.

Los currículos y los libros de texto presentan siempre muestras del significado de los conocimientos matemáticos, con frecuencia no representativas y a veces con sesgos difíciles de eliminar. El análisis del entorno de significación que se le ofrece al alumno en la clase de matemáticas se revela como esencial para interpretar correctamente las respuestas de éste.

La transposición didáctica puede ser interpretada en términos más generales dentro del marco de la ecología conceptual (Toulmin, 1972), o la ecología de las ideas (Morin, 1992; Godino, 1993), esto es, como el estudio de las condiciones socioculturales e históricas que determinan la formación y los distintos modos de existencia de los significados praxeológicos institucionales y de sus mutuas interdependencias.

10.8 HACIA UNA INTEGRACIÓN DE MODELOS TEÓRICOS

Consideramos que el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática que hemos elaborado podría permitir confrontar las nociones teóricas propuestas en las restantes teorías consideradas y avanzar hacia su integración, al permitir identificar concordancias y complementariedades entre las mismas.

La descripción de los conocimientos de un sujeto individual sobre un objeto O se puede hacer de una manera global con la noción de "sistemas de prácticas personales", que puede ser interpretada como la trama de funciones semióticas que el sujeto puede establecer en las que O se pone en juego como funtivo (expresión o contenido). Si en este sistema de prácticas distinguimos entre las que tienen una naturaleza operatoria o actuativa ante un tipo de situaciones-problemas, respecto de las discursivas obtenemos un constructo que guarda una estrecha relación con la noción de praxeología introducida por Chevallard, siempre y cuando le atribuyamos a dicha noción una dimensión personal, además de la correspondiente faceta institucional. Nuestro "sistema de prácticas" es más general que la praxeología.

Los modos de "hacer y de decir" ante un tipo de problemas que ponen en juego, por ejemplo, el "objeto función" se proponen como respuesta a la pregunta "qué significa el objeto función" para un sujeto (o una institución); o sea la praxelogía personal (respectivamente, institucional) relativa al tipo de problemas considerado es el significado personal (institucional) del objeto (o de modo equivalente, tipo de problemas). El contenido de esta función semiótica es una praxeología, por lo que se puede designar como "significado praxeológico" del objeto.

Respecto de la noción de praxeología, según se describen en Chevallard (1997), consideramos que el polo tecnológico/ teórico (logos) se debe descomponer explícitamente en entidades más elementales (conceptos-definición, proposiciones, argumentaciones) y nos parece necesario añadir un tercer polo formado por el sistema de objetos perceptibles mediante los cuales ser expresan y operan los otros dos polos, o sea las formas de expresión. El análisis detallado de los procesos de resolución de tareas matemáticas revela que las fases de desarrollo de las técnicas (en general, elementos actuativos) suponen la aplicación contextualizada de objetos conceptuales, proposicionales y argumentativos, al menos de manera implícita. De igual modo, la elaboración de justificaciones requiere la aplicación de elementos actuativos y situacionales. Esta circunstancia nos parece que resta relevancia a la distinción praxis-logos (y la de tecnología-teoría): *los elementos normativos (conceptos y proposiciones) y argumentativos son densos por doquier en la actividad matemática*.

Por otra parte, la consideración de los componentes discursivos del conocimiento matemático como reglas gramaticales para el manejo de las expresiones, usadas para describir el mundo de objetos y situaciones extra o intramatemáticas, como propone Wittgenstein -promotor inicial de un enfoque antropológico en filosofía de la matemática- nos plantea un reto a la investigación didáctica: El problema del recuerdo, interpretación y seguimiento de las reglas matemáticas por parte del discente. El papel del profesor, como director del proceso de estudio matemático, en el momento de la "des-institucionalización" es crucial para garantizar el mantenimiento de la relación didáctica. Esta observación tiene consecuencias radicales sobre el diseño de configuraciones didácticas que optimicen el aprendizaje matemático.

Nuestra modelización ontológica-semiótica del conocimiento permite interpretar la noción de esquema como la faceta interiorizada (no ostensiva) de una praxeología personal, y las nociones de concepto-en-acto, teorema-en-acto y concepción como componentes parciales constituyentes de dichas praxeologías personales.

La noción de concepción del sujeto sólo responde a uno de los tipos de conocimientos, el conceptual, con relegación de los restantes tipos de conocimientos. Responde, por tanto, a un modelo cognitivo-epistémico insuficiente y puede llevar a una visión sesgada, cuando no incorrecta, de los fenómenos de cognición matemática. En conclusión, interesa "concebir" la concepción como praxeología para sacar la cognición de la "carcel mentalista". En términos semióticos, cuando nos preguntemos por el significado de "concepción" de un sujeto sobre un objeto O (o sostenida en el seno de una institución) asignemos como contenido, "el sistema de prácticas operativas y discursivas que ese sujeto manifiesta en las que se pone en juego dicho objeto". Dicho sistema es relativo a unas circunstancias y momento dado.

Nos parece que la noción de "praxeología personal", entendida como hemos descrito, puede sustituir con ventaja a la de "concepción del sujeto" y de "esquema", ya que ambas tienen un grado de generalidad similar a la de praxeología, enfatizando no obstante la faceta mental de la cognición. La praxeología personal, esto es, *lo que un sujeto es capaz de "hacer y de decir" ante una clase o tipo de situaciones-problemas,* es un constructo no mentalista que podría sustituir a las nociones de esquema, concepción e imagen conceptual. La praxeología pueden ser más o menos amplia (puntual, local, global), según los tipos de problemas abarcados, pero sobre todo se le atribuye unos componentes y estructura en consonancia con las praxeologías institucionales.

El uso que se hace en Teoría de Situaciones de la noción de sentido queda restringido a la correspondencia entre un objeto matemático y la clase de situaciones de la cual emerge, y "le da su sentido" (podemos describirlo como "significado situacional"). Según nuestro modelo teórico esta correspondencia es sin duda crucial al aportar la razón de ser de tal objeto, su justificación u origen fenomenológico, pero también se tienen que tener en cuenta las correspondencias o funciones semióticas entre ese objeto y los restantes componentes operativos y discursivos del sistema de prácticas del que consideramos sobreviene el objeto, entendido, bien en términos cognitivos, o epistémicos.

En el caso de la Teoría de los Campos Conceptuales la noción de significado es más rica que en Teoría de Situaciones ya que incluye, además del componente situacional, los elementos actuativos (esquemas) e intensionales (conceptos y teoremas en acto). El contenido que se considera significado de un objeto matemático para un sujeto es practicamente la globalidad holística que nosotros describimos como "sistema de prácticas personales" (praxeología personal). Sin embargo, nuestra noción de función semiótica y la ontología matemática asociada proporciona un instrumento más general y flexible para el análisis didáctico-matemático.

En nuestro caso, la noción de significado (o sentido) de un objeto matemático deja de ser una entidad etérea y misteriosa. Es el contenido de cualquier función semiótica y, por tanto, según el acto comunicativo correspondiente, puede ser un objeto ostensivo o no ostensivo, concreto o abstracto, personal o institucional; puede referirse a una praxeología, o a un componente (situación-problema, una notación, un concepto, etc.).

La noción de representación y registro semiótico usadas por diversos autores hacen alusión según nuestro modelo, a un tipo particular de función semiótica representacional entre objetos ostensivos y objetos no ostensivos mentales. La noción de función semiótica generaliza esta correspondencia a cualquier tipo de objetos y, además, contempla otros tipos de dependencias entre objetos (instrumental y componencial).

En el Enfoque Ontológico-Semiótico de la Cognición e instrucción Matemática, la comprensión y el conocimiento no se conciben meramente en su dimensión mental, sino esencialmente en sus dimensiones personales e institucionales, involucrando, por tanto, los sistemas de prácticas operativas y discursivas ante ciertos tipos de tareas problemáticas. El aprendizaje de un objeto O por un sujeto se interpreta como la apropiación de los significados institucionales de O por parte del sujeto; se produce mediante la negociación y acoplamiento progresivo de significados.

La identificación de los *conflictos semióticos* que tienen lugar en las interacciones profesor-estudiante durante los procesos de instrucción de un contenido matemático es un aspecto esencial del análisis didáctico al proporcionar una explicación de las dificultades de los estudiantes en dicho proceso.

Capítulo 11

INVESTIGACIONES REALIZADAS EN EL MARCO DE TEORÍA DE LAS FUNCIONES SEMIÓTICAS

11.1. Introducción
11.2. Argumentación y demostración matemática
11.3. Razonamiento combinatorio
11.4. Significado de nociones ligadas a la aproximación frecuencial de la probabilidad
11.5. Nociones probabilísticas en libros de texto de secundaria
11.6. Sucesos independientes en probabilidad
11.7. Enseñanza y aprendizaje de la derivada
11.8. Estudio de la distribución normal en un curso de análisis de datos
11.9. Estudio de la divisibilidad en secundaria
11.10 . Estudio de las inecuaciones lineales con dos variables en secundaria
11.11. Papel de la teoría de conjuntos en la construcción de los números naturales
11.12. Otras investigaciones

11.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo presentamos un resumen de las investigaciones realizadas, bien de manera completa o parcial, en el marco teórico descrito en esta Monografía. La mayor parte de estas investigaciones se han realizado en el seno de nuestro equipo de investigación de la Universidad de Granada, y su desarrollado ha proporcionado el contexto necesario para la progresiva elaboración y aplicación de las nociones teóricas y metodológicas introducidas.

Dadas las características holísticas y sistémicas del marco teórico en desarrollo los temas abordados corresponden a diversos contenidos matemáticos:

1. Demostración matemática
2. Combinatoria

3. Significados de nociones ligadas a la aproximación frecuencial de la enseñanza de la probabilidad
4. Análisis de conceptos probabilísticos en libros de textos
5. Sucesos independientes en probabilidad
6. Enseñanza de la distribución normal en contextos informáticos
7. Enseñanza y aprendizaje de la derivada
8. Divisibilidad
9. Inecuaciones de dos variables
10. Teoría de conjuntos y números naturales
11. Medidas de posición central

En cada una de estas investigaciones haremos un breve resumen de las mismas y explicaremos el papel jugado por las herramientas teóricas utilizadas. Mencionaremos también algunas de las investigaciones en curso.

11.2. ARGUMENTACIÓN Y DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA

En la tesis doctoral de A. M. Recio (1999), realizada bajo la dirección de Juan D. Godino y titulada , "*Una aproximación epistemológica a la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática*", se estudian tres cuestiones relacionadas con la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática:

(1) Naturaleza diversa de la demostración según distintos contextos institucionales y sus conexiones con los diversos tipos de argumentación matemática (dimensión epistemológica).

(2) Esquemas personales de demostración matemática de estudiantes de primer curso de universidad, su relación con los significados institucionales de la demostración y su potencial dependencia de diferentes factores (dimensión cognitiva).

(3) Dificultades de los estudiantes en la elaboración de demostraciones, derivadas de la complejidad ontológica y semiótica que las demostraciones comportan para los estudiantes (dimensión semiótica).

Para cada apartado se utiliza la metodología apropiada:

- Estudio documental y cualitativo en la parte teórica;
- Enfoque experimental y cuantitativo en el estudio de los esquemas personales de demostración, mediante una muestra de 622 estudiantes de primer curso de distintas especialidades de la universidad de Córdoba.
- Estudio de casos y análisis de episodios didácticos, realizado sobre una muestra reducida de estudiantes de 5º curso de Psicopedagogía, para el estudio de la complejidad semiótica de la demostración.

Se ha planteado este estudio como una aproximación epistemológica al concepto de demostración matemática, buscando el esclarecimiento de su significado como objeto matemático y como objeto didáctico, como objeto institucional y como objeto personal, pensando que la investigación puede representar un paso previo para otros posibles estudios posteriores, más centrados en una problemática de aula.

El estudio realizado ha mostrado que la argumentación y la demostración matemática -como un tipo especial de argumentación- adquieren connotaciones particulares en distintos contextos institucionales en los cuales se pone en juego.

El estudiante de matemáticas debe aprender en el seno de la clase de matemáticas las características notacionales, conceptuales y fenomenológicas de la demostración. Pero cada estudiante es miembro -y está sujeto, por tanto a las influencias- de distintos contextos institucionales: particularmente no puede evitar participar como ciudadano en la vida cotidiana y emplear todos los recursos característicos del razonamiento informal; es también alumno de las clases impartidas sobre ciencias experimentales, donde es inducido a pensar en términos empíricos e inductivos; en las clases de matemáticas recibe, por otra parte, diferentes modelos de demostración matemática. La influencia de estos diferentes modos de razonar condicionan su comprensión y dominio de la demostración matemática.

El modelo descrito en esta tesis postula la puesta en juego en la actividad matemática de tres tipos de entidades elementales (notacionales, situacionales y conceptuales) y la adopción de la noción de función semiótica como entidad relacional básica. Esto permite explicar, al menos en parte, las dificultades y bloqueos de los sujetos en la elaboración de las argumentaciones matemáticas. Su aplicación al análisis de un episodio didáctico permitió mostrar la complejidad ontológica y semiótica de la actividad matemática, incluso ante tareas elementales como las estudiadas (un problema aritmético y otro geométrico).

En la parte experimental de la investigación, relativa a la caracterización de los esquemas personales de demostración matemática, sólo 186 de 622 estudiantes de la Universidad de Córdoba analizados, algo menos del 30% de ellos, alcanzaron un nivel básico de demostración matemática deductiva. Los estudiantes manifiestaron, además, una variedad de esquemas personales de demostración, situados en torno a dos formas básicas de argumentación, empírico-inductiva y deductiva, siendo destacable la proporción de estudiantes que no superan las primeras. Este hecho es congruente con los descritos al respecto por diversos autores, en distintos países.

La principal conclusión respecto a los esquemas personales de demostración matemática es que no tiene sentido considerarlos como estructuras exclusivamente cognitivas, determinadas por el nivel de competencia alcanzado por el sujeto, consecuencia de su evolución personal, biológica o instruccional. El proceso de demostración es un proceso que está determinado por el contenido semiótico del campo de problemas al que pertenece la demostración, siendo necesaria no sólo una determinada competencia cognitiva para poder llevarlo a término, sino también el conocimiento de conceptos y procedimientos propios del campo de problemas en cuestión, de forma que la evolución en los esquemas de demostración aparece ligada a la adquisición de esas técnicas instrumentales.

Remitimos al lector, para detalles adicionales de la investigación realizada a los trabajos de Recio (2000), Godino y Recio (1997), Godino y Recio (1998), Godino y Recio (2001) y Recio y Godino (2001).

11.3. RAZONAMIENTO COMBINATORIO

En la tesis doctoral de R. Roa, dirigida por C. Batanero y J. D. Godino y titulada, "*Razonamiento combinatorio en estudiantes con preparación matemática avanzada",* se analizan las estrategias de resolución de una muestra de problemas combinatorios elementales, así como las dificultades y errores por parte de estudiantes de últimos cursos de la licenciatura de Matemáticas. El estudio se realiza mediante cuestionarios escritos aplicados en tres fases a un total de 147 estudiantes y entrevistas individuales a una muestra reducida. La caracterización de los conocimientos puestos en juego por los estudiantes se ha realizado mediante el análisis de las respuestas a los cuestionarios y entrevistas usando métodos cuantitativos y cualitativos.

La investigación muestra que, a pesar del carácter elemental de los problemas combinatorios seleccionados, los estudiantes tienen dificultades importantes para resolverlos debido a la estructura compleja de los procesos de resolución requeridos, puesta de manifiesto mediante un análisis de tipo semiótico, y a deficiencias en la enseñanza de la combinatoria que enfatiza el estudio de las fórmulas de las operaciones combinatorias en detrimento de componentes más primarios del razonamiento combinatorio.

Uno de los objetivos de la investigación se centró en estudiar la influencia de nuevos factores explicativos (principalmente de tipo semiótico) sobre las estrategias errores y dificultades en la resolución de problemas combinatorios.

Mediante el análisis semiótico de los procesos de resolución de los problemas de cuatro alumnos y su confrontación con el estudio a priori se confirmó la existencia de dos tipologías diferenciadas de significado personal de la combinatoria, que corresponden a lo que teóricamente denominamos "sujeto modelizador" y "sujeto generador de modelos".

La unión de estos dos significados constituiría el significado institucional de referencia de la combinatoria elemental que se pretende adquieran los alumnos a lo largo de sus estudios, particularmente en la enseñanza secundaria y universitaria. La existencia de estudiantes que se acercan más a uno de estos dos significados personales restringidos muestra que no se alcanzan los objetivos curriculares fijados para el tema. Ello es más evidente aún cuando observamos los errores y desajustes que en el significado personal de estos tipos de alumnos se añaden y que no corresponden al significado de referencia, ni siquiera de manera parcial.

La comparación dentro de cada uno de estos dos tipos de alumnos de dos casos, uno con alto número de problemas resueltos correctamente y otro con alta tasa de fallos plantea también serias dudas respecto a la eficacia del énfasis casi exclusivo que hoy día se da al aprendizaje de las definiciones y fórmulas de las operaciones combinatorias.

Por el contrario, los éxitos o fracasos están motivados por dificultades de tipo semiótico en la comprensión del enunciado y falta de capacidades básicas como la recursión y la enumeración sistemática, que podemos describir como los componentes pragmáticos del razonamiento combinatorio. Una reflexión final es si no sería más productivo tratar de cultivar estas capacidades que no se restringen al campo de la combinatoria, sino que tienen una aplicabilidad general a la adquisición de destrezas de resolución de problemas.

Esta tesis está disponible en Internet en la siguiente dirección:

http://www.ugr.es/local/batanero

11.4. SIGNIFICADO DE NOCIONES LIGADAS A LA APROXIMACIÓN FRECUENCIAL DE LA PROBABILIDAD

La tesis doctoral de L. Serrano, titulada, *Significados institucionales y personales de objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial de la enseñanza de la probabilidad*, dirigida por la Dra C. Batanero, fue defendida en 1996 en la universidad de Granada y planteada dentro del marco teórico descrito en Godino y Batanero (1994).

En esta investigación se analiza la problemática didáctica asociada a la "aproximación frecuencial" en la enseñanza de la probabilidad en los niveles de educación secundaria. Las preguntas sobre las que se centra el trabajo son las siguientes:

-¿Cuáles son los objetos matemáticos que se ponen en juego en el enfoque frecuencial de la probabilidad? ¿Cuáles de ellos son asequibles a los alumnos de secundaria? ¿Cómo diseñar situaciones didácticas adecuadas para este enfoque de la enseñanza?

-¿Son asequibles a los alumnos las características básicas de los experimentos aleatorios que se proponen en estas situaciones y de las secuencias de resultados aleatorios que se obtienen en las experimentaciones?

-¿Cuáles son las prácticas de los alumnos en la resolución de los problemas propuestos? ¿Cuáles de estas actuaciones son concordantes con el significado de la aleatoriedad desde un punto de vista matemático y cuáles no? ¿Encontramos en los alumnos las mismas heurísticas y sesgos descritos en sujetos adultos?

-¿Cuál es el grado de comprensión de los alumnos de la probabilidad en su acepción frecuencial? ¿Admiten los alumnos la posibilidad de estimar la probabilidad basándose en los datos experimentales? ¿Entienden los alumnos el carácter aproximado de los valores de probabilidad que obtenemos?

"Las respuestas a estas preguntas requiere un estudio previo del significado de la aleatoriedad y de las secuencias aleatorias desde el punto de vista matemático, pues este estudio es la pauta de comparación con los significados personales de los alumnos" (p. 4).

En esta tesis se construyen una colección de situaciones didácticas que son propuestas a muestras de alumnos de secundaria y pautas de entrevista para estudiar sus comportamientos en dichas situaciones. Esta información sirve de base para elaborar un cuestionario escrito para determinar los significados personales de los alumnos ante los tipos de problemas planteados. En dichos significados se contemplan tres componentes básicos del razonamiento estocástico: propiedades atribuidas por los alumnos a las secuencias de resultados aleatorios, la interpretación de enunciados de probabilidad frecuencial, y el uso de heurísticas en la resolución de problemas probabilísticos sencillos. Las categorías de prácticas realizadas por los alumnos en la resolución de las tareas propuestas se comparan con las que serían adecuadas desde un punto de vista matemático.

El análisis epistemológico realizado de la noción de aleatoriedad en la institución matemática muestra su complejidad. Los modernos dispositivos de cálculo y la necesidad de producción de tablas de dígitos aleatorios llevan a separar la idea de proceso y de secuencia aleatoria. Para estas últimas se muestra que no hay una definición sencilla del concepto que permita discriminar de forma clara e inequívoca si una cierta secuencia es o no aleatoria.

En el estudio experimental, los resultados indican la diversidad de significados que los alumnos atribuyen a los mismos objetos, y las diferencias entre estos y los significados de referencia, conocimiento que permite orientar los procesos de enseñanza.

Esta tesis está disponible en Internet en la siguiente dirección:

http://www.ugr.es/local/batanero

11.5. NOCIONES PROBABILÍSTICAS EN LIBROS DE TEXTO DE SECUNDARIA

La tesis doctoral de J. J. Ortiz de Haro, titulada, *Significados de los conceptos probabilísticos en los libros de texto de Bachillerato*, dirigida por los Dres C. Batanero y L. Serrano, fue defendida en 1999 en la Universidad de Granada, y realizada dentro del marco teórico de los significados institucionales y personales de los objetos matemáticos (Godino y Batanero, 1994; 1998). Los objetivos abordados en la investigación fueron los siguientes:

1. Describir los elementos intensionales[1] característicos de cada uno de los conceptos probabilísticos citados y analizar su presencia y forma de presentación en los manuales escolares.

2. Identificar los elementos extensionales[2] de cada uno de los conceptos probabilísticos citados y analizar su presencia, bien como ejercicios o ejemplos, en los manuales escolares.

3. Analizar las principales variables de tarea de estos ejemplos y ejercicios y llevar a cabo un estudio comparativo de su distribución en algunos libros de texto. Puesto que las variables y sus valores aportan matices diferenciados al significado de los conceptos, la distribución de los ejercicios y ejemplos respecto a las mismas nos indica claramente el significado particular que podrían construir los alumnos a los que el libro de texto va dirigido.

4. Identificar los diferentes elementos representacionales[3] asociados a los conceptos probabilísticos elementales y llevar a cabo un estudio comparativo de su empleo en algunos libros de texto.

5. Estudiar la variabilidad de presentación de los conceptos mencionados en los textos elegidos, estudiando si se inducen concepciones diferenciadas sobre los mismos conceptos.

6. Detectar los sesgos en el significado de los conceptos presentados a los alumnos. Estos sesgos identificados permitirán mejorar las nuevas propuestas curriculares incluyendo los complementos necesarios para paliarlos en el futuro.

[1] Conceptuales y proposicionales.
[2] Situaciones, problemas, ejercicios.
[3] Lenguaje (en el sentido dado en el capítulo 4.

Con la investigación se trataba de “contribuir a mostrar con un ejemplo de aplicación la teorización de Godino y Batanero (1994; 1998) sobre el carácter sistémico del significado de los conceptos matemáticos, y los tipos de elementos que lo componen, así como sobre las dimensiones institucional y personal del conocimiento” (Ortiz, (2001 p. 247). El análisis de las tipologías de elementos de significado para cada uno de los conceptos analizados, la comparación de su presencia o ausencia en los libros de texto o de los matices específicos con que se presentan permitió mostrar la diversidad de significados que, sobre un mismo concepto, presentan diferentes libros de texto, incluso en un mismo nivel de enseñanza.

El estudio aporta información sistemática que muestra la complejidad del significado de los conceptos probabilísticos elementales en los libros de texto, debido a la interrelación entre los diferentes componentes extensionales, intencionales y representacionales, lo que explica la dificultad de su secuenciación en la enseñanza.

Esta tesis está disponible en Internet en la siguiente dirección:

http://www.ugr.es/local/batanero

11.6. SUCESOS INDEPENDIENTES EN PROBABILIDAD

El artículo de E. Sánchez, del Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPM (México), titulado, *Investigaciones didácticas sobre el concepto de eventos independientes en probabilidad*, publicado en la revista Recherches en Didactiques des Mathématiques, Vol. 20 (3): 305-330 en 2000, adopta como marco teórico de referencia la teoría de los significados institucionales y personales formulada en Godino y Batanero (1994).

El trabajo aborda la búsqueda de una explicación para las dificultades que tienen los profesores de matemáticas de secundaria sobre el concepto de eventos independientes, en el contexto de un curso de perfeccionamiento profesional, y a pesar de tener una preparación inicial en probabilidad. Una posible explicación se busca en el análisis del significado del concepto de independencia, tanto en el papel que ha jugado la independencia en el desarrollo histórico de la probabilidad como en la revisión de algunos textos elementales. La conclusión es que el concepto de eventos independientes es un concepto abstracto que surge relacionado con problemas avanzados de la matemática, mientras que la idea intuitiva de independencia se expresa en el concepto de experiencias independientes. La función de estos dos conceptos en la enseñanza propicia grandes confusiones.

El constructo teórico central que orienta la investigación es el significado de la noción de independencia, entendiendo el significado como se propone en Godino y Batanero (1994). De esta manera, se considera imprescindible separar el significado según se vea desde la perspectiva de la *institución matemática* o de la *institución escolar*. En este último caso, el significado escolar se busca en los libros de texto y en las prácticas de los maestros, mientras que el significado matemático se encuentra al explorar en las práctica asociadas a los problemas que le dieron origen, lo que le lleva a un análisis del desarrollo histórico del concepto.

Sánchez considera que la definición de significado institucional de un objeto matemático como "el conjunto de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas del cual emerge dicho objeto en un momento dado" es interesante porque, por un lado, precisa que depende de la perspectiva (institución) desde la cual se busca, y por otro, en el caso de la institución matemática, no se limita al significado formal, es decir, a la definición (p. 317).

La indagación epistemológica realizada por Sánchez le lleva a concluir que hay un campo de problemas relacionados con la independencia estocástica en conexión con la regla del producto cuyas prácticas significativas comienzan en los modelos de los juegos de azar, siguen con una relación más compleja en las aplicaciones de la probabilidad a la física y terminan con aplicaciones dentro de la matemática. A esta progresión en la solución de distintas clases de problemas que se presentan en cada etapa la acompañan distintos conceptos teóricos de independencia: eventos independientes asociados a experiencias independientes, variables aleatorias (y sus distribuciones) independientes, y, por último, eventos independientes en un sentido moderno.

Estos distintos conceptos se forman en la transición del cálculo de probabilidades, considerado como matemática aplicada a una teoría matemática por derecho propio.

El concepto de eventos independientes emerge en el último período de evolución de la probabilidad y es el resultado de volver los ojos hacia la matemática misma y buscar sus propios objetos matemáticos, alejados de cualquier alusión a objetos del mundo físico. "Pareciera que la escasa disponibilidad de problemas de nivel elemental asociados al concepto puede ser la causa de que el aprendizaje no sea del todo exitoso por parte de muchos alumnos" (p. 328)

11.7. ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA DERIVADA

La tesis doctoral de V. Font titulada, "*Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de grafiques. Aplicacions a les derivades*", dirigida por J. M. Núñez en el Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de la Matemática de la Universidad de Barcelona en 1999 ha sido estructurada dentro del marco de la "teoría de los significados institucionales y personales de los objetos matemáticos" y utiliza, además la noción de función semiótica como herramienta de análisis de la noción de derivada.

Las hipótesis y objetivos de la investigación se formulan de manera explícita mediante las nociones introducidas en nuestros trabajos (Godino y Batanero, 1994, 1998; Godino y Recio, 1998), como mostramos a continuación.

Hipótesis general: Al plantearnos el significado y la formación de contenidos matemáticos en el proceso de instrucción, hemos de realizar un análisis que contemple el significado del contenido (sistema organizado de contenidos) en la institución matemática, el significado del contenido en la institución escolar y el significado personal.

La segunda hipótesis precisa el uso específico que se hace de la noción de significado en cada uno de los tres niveles formulados en la hipótesis 1. Concretamente se indica:

- El significado personal de un contenido matemático es el sistema de prácticas personales que realiza una persona para resolver el campo de problemas del que ha emergido el contenido personal.
- El significado institucional de un contenido matemático es el sistema de prácticas asociadas al campo de problemas del que ha emergido el contenido institucional.
- El significado a priori de un contenido matemático para un sujeto, desde el punto de vista de la institución escolar, es el subsistema de prácticas personales asociadas a un campo de problemas que son consideradas en

la institución escolar como las adecuadas y características para resolver dichos problemas.

La investigación, además de justificar las dos primeras hipótesis de tipo teórico con una extensa y profunda revisión de las referencias epistemológicas y cognitivas, se centra en diseñar, experimentar y evaluar una experiencia de enseñanza de la derivada en el nivel de Bachillerato. Con dicho fin se formula la tercera hipótesis:

- Tomando como marco de referencia general las hipótesis anteriores se afirma que es posible elaborar e implementar, con un alto grado de viabilidad, una unidad didáctica para trabajar la derivada en las instituciones "clase de matemáticas de 1er curso de Bachillerato/ 3º de BUP", que contemplan actividades que permiten calcular la expresión simbólica de funciones derivadas a partir de gráficas (de f(x) o de f'(x)).

Los objetivos de la tesis se centran en justificar las tres hipótesis formuladas. Con dicho fin se proponen, entre otros, los siguientes desarrollos.

- Justificación de la necesidad de considerar tres niveles de significado: 1) la institución matemática, 2) el significado en la institución escolar, y 3) el significado personal .
- En relación del significado personal se adopta la noción de función semiótica como "un instrumento que permite el análisis conjunto de la manipulación de ostensivos en un contexto social y del pensamiento que le acompaña" (p. 14).
- Análisis de las investigaciones previas sobre el contenido "Introducción a las derivadas", dificultades, obstáculos y errores de los alumnos, aspectos curriculares y restricciones que afectan al desarrollo de la unidad
- Aplicación al contenido de la derivada del constructo "significado a priori de un objeto institucional X para un alumno, desde el punto de vista de la institución clase de matemáticas de 1er curso de bachillerato, modalidad de ciencias de la naturaleza y tecnología".
- Explicitación de los objetivos, actividades y evaluación de la experiencia de enseñanza de las derivadas.

- Analizar la viabilidad del proceso de estudio diseñado y presentado como un proceso de interacción y construcción de significados en un aula y circunstancias especificadas.

Con objeto de justificar la adopción de la hipótesis general sobre la necesidad de considerar los tres niveles de significado, Font realiza un estudio crítico y en profundidad de las principales corrientes epistemológicas y cognitivas usadas en educación matemática. En particular estudia,

- Teorías referenciales frente a análisis pragmáticos.
- Representacionismo frente a no representacionismo
- Platonismo frente a constructivismo
- Intencionalidad, intersujetividad y ostensividad.
- Representaciones mentales en psicología cognitiva
- La historia interna del conocimiento frente a sociología del conocimiento científico.
- Análisis sistémicos frente a análisis centrados en el individuo
- Psicología cognitiva frente a antropología cognitiva

Destacamos que tras la exploración realizada, V. Font presenta las nociones teóricas que nosotros hemos elaborado sobre el "significado institucional personal de los objetos matemáticos" (Godino y Batanero, 1994) como el marco teórico mejor adaptado al problema de investigación planteado. En las páginas 80 a 84 reproduce y analiza el sistema de definiciones mediante las cuales proponemos una epistemología matemática particularmente adaptada a las necesidades de investigación en didáctica de las matemáticas. Entre las conclusiones relativas al marco teórico afirma,

"6) Según nuestro parecer, los constructos "significado personal", "significado institucional" y "significado de un objeto institucional para un sujeto desde el punto de vista de la institución" resultan muy útiles para elaborar una unidad didáctica, ya que esta implica un proceso de elección de contextos con finalidad didáctica. El carácter observable de las prácticas sociales permite, mediante un estudio fenomenológico y epistemológico realizado adecuadamente, determinar, para un objeto dado, el campo de problemas asociado, así como su significado institucional. El análisis de las variables didácticas permite hacer una reducción del significado institucional para un proceso de elección de contextos, y diseñar las posibles tareas pertinentes para la evaluación de los conocimientos subjetivos” (p. 85).

Funciones semióticas

El subobjetivo 1.2. de la tesis doctoral de V. Font (1999) lo formula en los siguientes términos: “En relación al significado personal, justificar la hipótesis 1.1 utilizando las funciones semióticas como un instrumento que permite el análisis conjunto de la manipulación de ostensivos en un contexto social y del pensamiento que le acompaña” (p. 86).

Para justificar esta afirmación, Font emprende un estudio teórico de las diversas teorías e interpretaciones realizadas sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas, incluyendo los puntos de vista de Kaput, Brown, Duval, la teoría antropológica y nuestra teoría de las funciones semióticas en su primera formulación (Godino y Recio, 1998). Sobre la clasificación de entidades que propusimos (extensionales, intensionales y notacionales) y las funciones semióticas como relación entre una expresión y un contenido concluye que resulta de interés y útil para su investigación. Uno de los aspectos más interesantes es que esta clasificación se puede aplicar tanto a las representaciones ostensivas (dominio de lo público) como a las mentales (dominio de lo privado). Es decir, podemos considerar los símbolos mentales que actúan como un soporte de entidades extensionales e intensionales (noesi en la terminología de Duval), o bien considerar ostensivos que actúen como un suporte de entidades extensionales o intensionales (semiosis).

Font utiliza las funciones semióticas para analizar la complejidad de la comprensión del contenido “función derivada”, concluyendo que las funciones semióticas son una herramienta de tipo descriptivo y no pueden explicar por qué y cómo el alumno realiza los procesos de abstracción, uso de metáforas y analogías, encapsulación y desencapsulación, etc. Sin embargo, considera que “pueden ser útiles, ya que permiten describir con un lenguaje unificado muchos procesos que se han estudiado en el campo del pensamiento matemático avanzado y que, en diferentes trabajos de investigación, se han descrito con terminologías diferentes” (p. 137).

Remitimos al lector al artículo de Font (2000), publicado en la revista electrónica *Philosophy of Mathematics Education Journal,*14: 1-35, disponible en Internet en la siguiente dirección:

http://www.ex.ac.uk/~PErnest/pome14/contents.htm

para un estudio en profundidad de las representaciones y su conexión con las funciones semióticas.

11.8. ESTUDIO DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL EN UN CURSO DE ANÁLISIS DE DATOS

La tesis doctoral de L. Tauber, titulada, *La construcción del significado de la distribución normal a partir de actividades de análisis de datos*, dirigida por los doctores C. Batanero y V. Sánchez fue defendida en 2001 en la Universidad de Sevilla y realizada íntegramente dentro del marco teórico de los significados institucionales y personales de los objetos matemáticos.

Esta investigación describe y analiza los significados institucionales de la distribución normal de probabilidad en el contexto de un curso de análisis de datos con estudiantes universitarios, así como el proceso de construcción de los significados personales de los estudiantes en dicho contexto instruccional.

Las preguntas de investigación fueron las siguientes:

1. ¿Cuál es el significado típico que, sobre la distribución normal, se presenta en un curso introductorio de estadística universitaria? (significado institucional de referencia)
2. ¿Cómo organizar una experiencia de enseñanza de la distribución normal, apoyada en el uso del ordenador? ¿En qué se diferencia de una enseñanza tradicional? (significado institucional local pretendido).
3. ¿Cómo transcurre la experiencia al llevarla a cabo? ¿Qué dificultades surgen y cómo afectan éstas al desarrollo y al resultado de la experiencia? (significado institucional local observado).
4. ¿Cómo desarrollan las tareas los alumnos durante la enseñanza? ¿Cuáles son sus dificultades y errores? ¿Qué aprenden? (evolución del significado personal de los alumnos del grupo a lo largo del proceso de aprendizaje).
5. ¿Cuáles son los conocimientos finales de los alumnos del grupo? (significado personal construido por los alumnos de la muestra al finalizar la enseñanza).

En la determinación de los distintos tipos de significado se utiliza de manera sistemática la descomposición analítica propuesta en Godino (1999):

- Elementos extensivos[4]: Las situaciones y campos de problemas de donde emerge el objeto;
- Elementos actuativos: Procedimientos y estrategias para resolver los problemas;
- Elementos ostensivos: Los recursos lingüísticos y gráficos para representar u operar con los problemas y objetos involucrados;
- Elementos intensivos: Propiedades características y relaciones con otras entidades: definiciones, teoremas, y proposiciones;
- Elementos validativos: Argumentos que sirven para justificar o validar las soluciones.

A partir del análisis de libros de texto de estadística aplicada destinados a estudiantes que ingresan en la universidad, se determina el significado institucional de referencia. Tomándolo como base, se diseñó una secuencia didáctica basada en el uso de ordenadores, analizando el significado institucional pretendido y sus diferencias respecto al significado de referencia.

La observación de la experiencia de enseñanza durante los cursos académicos 1998-99 y 1999-2000 y el análisis de las producciones de los alumnos durante las clases sirvió para determinar el significado institucional implementado y evaluar la evolución del significado personal de los alumnos a lo largo del proceso de estudio.

El significado personal adquirido por los estudiantes al finalizar la experiencia se evaluó con dos instrumentos: a) un cuestionario, permite determinar de forma rápida aspectos del conocimiento de un gran número de elementos de significado incluidos en la enseñanza; b) una prueba de ensayo para ser resuelta con ordenador analiza los elementos de significado puestos en juego por los alumnos y la capacidad de análisis de datos. Con ambos instrumentos se proporcionan datos globales de la muestra de alumnos y comparación entre cursos así como entre alumnos con y sin estudios previos de estadística.

---

[4] Como hemos indicado en el capítulo 6, consideramos preferible interpretar como faceta la distinción "extensivo - intensivo", que designamos como "ejemplar - tipo". De igual modo la distinción ostensivo - no ostensivo se interpreta como una faceta aplicable a las diversas entidades primarias.

El marco teórico utilizado ha sido fundamental, tanto en la definición del problema abordado, como en las herramientas metodológicas empleadas. Ha permitido justificar la propuesta de enseñanza, comparar la planificación de la enseñanza con su implementación efectiva, analizar el aprendizaje de los alumnos y explicar sus dificultades y construir unos instrumentos de evaluación con una validez de contenido explicitable. Los diferentes tipos de elementos de significado contemplados nos permiten centrar la atención en las diferentes componentes del conocimiento matemático (problemas, prácticas operativas, representaciones, conceptos/propiedades y validaciones) que son objeto de estudio. La doble vertiente institucional/personal del significado ayudó a diferenciar y comparar el conocimiento objetivo y subjetivo y a ponerlos en correspondencia.

Esta tesis doctoral está disponible en la siguiente dirección de Internet:

http://www.ugr.es/local/batanero

11.9. ESTUDIO DE LA DIVISIBILIDAD EN SECUNDARIA

La tesis de maestría en Didáctica de la Matemática de S. Etchegaray titulada, *Análisis epistemológico y didáctico de nociones elementales de teoría de números*, fue realizada en el año 2000 bajo la dirección del Dr. C. Sánchez e I. Sainz en la Universidad Nacional de Río Cuarto (Argentina).

Como fundamento teórico y marco de referencia de la investigación adoptan de manera central la noción de significado, entendido de acuerdo con el modelo desarrollado en Godino y Batanero (1994) y teniendo en cuenta la descomposición en elementos de significado descritos en Godino (1999a).

Etchegaray relaciona de manera consistente las herramientas ontológicas y semióticas que proponemos con las nociones elaboradas por la Teoría Antropológica de Chevallard, pudiendo apreciar que la noción de praxeología desempeña un papel similar al constructo "sistema de prácticas personales e institucionales". El enfoque prácticamente exclusivo de la teorización de Chevallard en la dimensión institucional, con olvido de la faceta personal de los conocimientos matemáticos, lleva a Etchegaray a adoptar como más operativas las nociones teóricas de significado institucional y personal, junto con la descomposición analítica en cinco elementos de significados: ostensivos, extensivos, intensivos, actuativos y validativos.

El objetivo general de la tesis consiste en realizar un análisis didáctico de las nociones elementales de "teoría de números" (relación de divisibilidad, máximo común divisor y mínimo común múltiplo), abarcando los aspectos epistemológicos, cognitivos e instruccionales. Con dicho fin se realizan las siguientes actividades:

1) Análisis teórico de la noción de significado como objeto de investigación en Didáctica de la Matemática, desde una perspectiva semiótica-antropológica. "Para ello, se estudiarán centralmente los aportes realizados por la línea de investigación sobre "Teoría y Métodos de investigación en Educación Matemática" de la Universidad de Granada" (p. 4).
2) Estudio y análisis desde un punto de vista histórico-epistemológico de la evolución de las nociones elementales de la Aritmética. Esto permitirá caracterizar el significado de referencia en instituciones de producción a los efectos de lograr una aproximación a la comprensión del significado en instituciones de enseñanza.
3) Descripción de una praxeología referencial de la Teoría de la Divisibilidad en el conjunto de los enteros.
4) Análisis de libros de textos actuales con el fin de investigar cómo "viven" en nuestro sistema de enseñanza los objetos en cuestión, determinando los significados institucionales. Los textos analizados corresponden al curso 8º de EGB (Argentina) (2º de ESO en España)
5) Determinación de los significados personales de una muestra de estudiantes de 11 a 13 años en relación a los contenidos de divisibilidad en el conjunto de los números enteros y su comparación con los significados implementados en los libros de texto, caracterizando los elementos estructurales y secundarios del significado de las nociones aritméticas involucradas.

Entre las conclusiones se destaca que los libros de textos analizados tratan de imponer un único punto de vista que privilegia:

- La necesidad de conocer la técnica generada por la factorización única en primos de un número entero (técnica normalizada) para extraer el M.C.D, sin tener en cuenta los conocimientos y la riqueza de procedimientos (sistema de prácticas personales) que el alumno puede desarrollar cuando se le enfrenta a una situación problema.

- Sólo proponen aprender nociones de divisibilidad para resolver situaciones cotidianas "tipo" produciendo un significado institucional restringido, si lo contraponemos a un análisis conceptual *(praxeología* referencial) y epistemológico de las nociones involucradas.

Un resumen más extenso de este trabajo fue publicado en las Actas del V Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, disponibles en la siguiente dirección de Internet:

http://www.ugr.es/local/seiem

11.10. ESTUDIO DE LAS INECUACIONES LINEALES CON DOS VARIABLES EN SECUNDARIA

La tesis de maestría de Nora Gatica titulada, "*Las inecuaciones lineales con dos variables en el último ciclo de la Enseñanza General Básica*", dirigida por los Dres A. Neme (Universidad de San Luis, Argentina) y J. D. Godino (Universidad de Granada), fue defendida en la Universidad Nacional de Río Cuarto (Argentina) en el año 2000.

El objetivo general de la investigación se centra en realizar un análisis de los problemas la enseñanza y aprendizaje de las inecuaciones lineales con dos variables en el nivel de educación secundaria, teniendo en cuenta las dimensiones epistémicas, cognitivas e instruccional.

Con dicho fin se formulan los siguientes objetivos específicos:

1) Realizar una síntesis de las investigaciones sobre la didáctica de las inecuaciones en la escuela secundaria, dentro del marco del área problemática de la didáctica del álgebra escolar.
2) Caracterizar el significado matemático de las inecuaciones lineales con dos variables, incluyendo el estudio del campo de problemas modelizables mediante inecuaciones lineales con dos variables.
3) Analizar la complejidad semiótica de una tarea sobre representación gráfica de una inecuación usada en un proceso de estudio implementado en un grupo clase.

4) Caracterizar los significados institucionales de las inecuaciones en el currículo de matemáticas de secundaria, en los manuales escolares y en la práctica de la enseñanza
5) Identificar las estrategias y dificultades de los alumnos en la iniciación del estudio de las inecuaciones lineales con dos incógnitas en el contexto de una experiencia de enseñanza diseñada bajo un enfoque constructivista.

El uso del constructo significado institucional ha permitido plantear el estudio de la dimensión epistémica del problema didáctico abordado, orientando la caracterización de los sistemas de prácticas ligadas al objeto "inecuaciones lineales con dos variables" tanto en la institución matemática, como en las instituciones educativas (currículo, manuales escolares y práctica instruccional).

Así mismo, el constructo "función semiótica" y el análisis semiótico de una tarea de resolución gráfica de una inecuación ha permitido determinar el sistema de objetos que se ponen en juego (extensivos, ostensivos, actuativos, intensivos y validativos). Este significado sistémico de la inecuación planteada se usa como referencia para analizar el inicio del proceso de enseñanza de las inecuaciones en una experiencia realizada en una clase con estudiantes de secundaria. Entre las conclusiones se destaca el papel del profesor como ayuda del proceso de estudio en momentos críticos de bloqueo ante el desconocimiento, por parte de los estudiantes, de los convenios que definen los objetos intensivos necesarios para la solución gráfica de la inecuación planteada.

11.11 PAPEL DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS EN LA CONSTRUCCIÓN DE LOS NÚMEROS NATURALES

La tesis doctoral de M. Arrieche, dirigida por Juan D. Godino titulada, *"La teoría de conjuntos en la formación de maestros: facetas y factores condicionantes del estudio de una teoría matemática"* se centra en un aspecto específico de la formación matemática de los maestros: clarificar el papel que el lenguaje conjuntista debería tener en esa formación. Fue presentada en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada en 2002.

Las preguntas iniciales que motivaron esta investigación fueron:

- ¿Cuál es el papel que debería desempeñar el estudio de los conjuntos, aplicaciones y relaciones en la formación de los maestros?
- ¿Es útil el lenguaje conjuntista para desarrollar los restantes temas del programa, en particular en el estudio de los números naturales?
- ¿Cuáles son los factores que condicionan el grado de estudio de una teoría matemática?

La decisión de incluir un tema en el currículo puede estar basada en su conexión con otros temas, esto es, por su carácter instrumental. Pero es necesario investigar su viabilidad y los requisitos necesarios para el estudio. No es suficiente realizar un estudio de tipo epistemológico-ecológico, sino que hay que tener en cuenta los restantes componentes de los sistemas didácticos: el profesor, los alumnos y las estrategias instruccionales implementadas. ¿Qué conflictos cognitivos tienen los alumnos con los distintos componentes del significado de las nociones pretendidas? ¿Cómo implementan el estudio del tema los profesores en función del tiempo y recursos disponibles? Las facetas cognitiva e instruccional proporcionan también criterios sobre el grado y modo de estudio de un tema matemático, como es en nuestro caso, la teoría de conjuntos en la formación de los maestros. Esta parte de la investigación lleva a caracterizar:

- Los significados elementales o sistémicos puestos en juego en el libro de texto usado en el proceso de estudio de los temas conjuntos, relaciones y funciones de un grupo de maestros en formación.
- Las praxeologías matemáticas implementadas en el desarrollo de las clases impartidas por un profesor en la asignatura "Matemáticas y su Didáctica", correspondiente al programa de formación de maestros, en los temas de introducción de nociones conjuntistas y la construcción de los números naturales.
- Los significados personales construidos por los maestros en formación sobre las nociones conjuntistas tras el proceso de estudio implementado, tratando de explicar los conflictos semióticos, al menos parcialmente, mediante la trayectoria didáctica implementada.

Esta información se considera necesaria para la toma de decisiones sobre la orientación del currículo y la identificación de los puntos críticos del proceso de enseñanza y aprendizaje correspondiente.

Esta investigación se ha situado claramente en una aproximación epistemológica (Gascón, 1998), esto es, se elige como punto de entrada y central para indagar los problemas didácticos el propio conocimiento matemático. Para ello incluso se adoptan y elaboran modelos epistemológicos que consideran el saber matemático desde una perspectiva multifacética y relativa a los contextos institucionales en que desempeña sus roles. Este enfoque de investigación se ejemplifica en este caso al adoptar como tema central la clarificación de los significados (Godino y Batanero, 1994, 1998) de la "praxeología conjuntista" y sus relaciones ecológicas con las "praxeologías numéricas".

En la investigación se incluye la observación y evaluación sistemática de un proceso de estudio matemático en el que el profesor y los alumnos interaccionan para fijar los significados institucionales finalmente implementados y para tratar de resolver conflictos semióticos potenciales. El profesor, apoyándose en el libro de texto que selecciona, es el último eslabón de un proceso de adaptación y fijación de los significados (transposición didáctica) que condicionan de manera importante las "oportunidades para aprender" de los estudiantes. El análisis semiótico realizado del texto y de las explicaciones del profesor ha permitido fijar una "radiografía" del saber efectivamente implementado, lo que ha proporcionado algunas claves explicativas de las deficiencias de los aprendizajes de los alumnos.

En el estudio de las relaciones ecológicas entre las praxeologías numéricas y conjuntistas se ha aportado información sobre la relevancia de la teoría de la conjuntos como campo de indagación matemática y como herramienta esencial para las diversas ramas de la matemática. Pero esto no justifica de manera directa su inclusión en los currículos de educación primaria o incluso de secundaria. El estudio de cualquier organización matemática requiere tiempo, capacidades cognitivas, recursos instruccionales, etc. Cada decisión curricular, atribuida habitualmente al buen juicio y experiencia de "expertos", requiere ser sometida a indagación sistemática si debe ser tomada de manera racional.

Se concluye que el estudio de la teoría de conjuntos en el currículo de formación de maestros se justificará en la medida en que desempeñe un papel instrumental en el estudio de los contenidos matemáticos propios del currículo de primaria. El oficio de maestro no es el de un matemático, por lo que no puede estudiar conjuntos por su propio interés intrínseco. Esto explica el interés en estudiar las relaciones entre los conjuntos y las construcciones de los números naturales, dado el carácter esencial de los números y las operaciones aritméticas en el currículo de primaria.

Tradicionalmente, el alumno ha sido el centro de atención de las preocupaciones didácticas. Este centramiento parece natural, ya que el sistema de enseñanza se justifica por la necesidad de la sociedad de transmitir la cultura matemática y para capacitar a sus miembros en la generación de nuevos conocimientos. Los estudiantes deben apropiarse del saber y ser capaces de producir nuevos saberes que resuelvan los nuevos problemas. Esto explica que la caracterización de los significados personales de los estudiantes sea el criterio de evaluación final del funcionamiento del sistema. Pero la explicación de las deficiencias de los aprendizajes no podemos buscarla sólo en las capacidades intelectuales de los sujetos, como a menudo han supuesto las investigaciones cognitivistas. En esta investigación se ha tratado de poner en relación los aprendizajes con el proceso de estudio seguido, así como con los significados institucionales implementados, ya que estos factores tienen la consideración de variables didácticas, esto es, variables sobre las que el profesor tiene un cierto grado de libertad para actuar. No ocurre eso con las variables propias del desarrollo cognitivo de los sujetos.

Esto no quiere decir que las variables de índole no cognitiva sean de tipo didáctico. El tiempo que el currículo asigna al estudio de las matemáticas, las expectativas de empleo de los maestros en formación, la ratio profesor - alumno, por ejemplo, son sin duda factores condicionantes de los aprendizajes sobre los que el profesor no tiene posibilidades de actuar.

Podemos afirmar como conclusión final de la investigación que los maestros necesitan conocer las nociones elementales de la praxeología conjuntista, principalmente por sus relaciones con la praxeología numérica, y que su aprendizaje requiere tiempo de estudio, tanto dirigido como autónomo. Es posible que las severas restricciones temporales del actual currículo de formación de maestros en España impida hacer este estudio, pero ello no debe llevarnos a hacer de la necesidad, virtud, esto es, puesto que no se dispone de tiempo para el estudio, concluir que no es necesario ese estudio.

11.12. Medidas de posición central

En la tesis doctoral de B. Cobo (2003), realizada bajo la dirección de Carmen Batanero y titulada, "*Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria*", se realiza un estudio teórico-experimental sobre el significado y comprensión de las medidas de posición en la educación secundaria obligatoria y está planteada íntegramente mediante el enfoque ontológico-semiótico descrito en esta Monografía.

"Nos fundamentamos para ello, tanto en las investigaciones previas, como en el marco teórico de Godino (Godino, 1996; Godino y Batanero, 1994; 1998), en el que se tiene en cuenta una doble perspectiva, institucional y personal sobre el el significado y comprensión de los objetos matemáticos" (Cobo, 2003, p. 16).

Las cuestiones de investigación que se abordan en la tesis son las siguientes:

1. *¿Cuál es el significado de las medidas de posición central?*

A pesar de que esta pregunta parece tener una solución clara e inequívoca, se argumenta a lo largo del trabajo que los objetos matemáticos son entidades complejas y su significado depende del contexto institucional en que se usan. En el Capítulo 2 se describe el significado que se toma como *significado institucional de referencia*, y que se determina partiendo del análisis de una muestra de libros universitarios de estadística descriptiva. Previamente se presenta el marco teórico y la categorización en el mismo de tipos de elementos de significado que sirven de base para el estudio.

2. *¿Cómo podemos usar el marco teórico para sintetizar la investigación realizada hasta la fecha con relación a los promedios? ¿Cuáles son los elementos cuya comprensión aún no ha sido objeto de estudio?*

En el Capítulo 3 se presenta una revisión bibliográfica de las principales investigaciones realizadas sobre las medidas de tendencia central, organizada en torno a los elementos de significado considerados en el marco teórico e identificados en el análisis conceptual. Este estudio permite concluir sobre la falta de estudios globales sobre la comprensión del concepto y al mismo tiempo, fundamenta la construcción del cuestionario, que incluye ítems tomados de diversas investigaciones previas.

3. *¿Qué parte del significado institucional de referencia es objeto de enseñanza en la Educación Secundaria? ¿Cuáles son los elementos de significado (campos de problemas, algoritmos y procedimientos, representaciones, conceptos y propiedades y argumentos que son incluidos en este nivel educativo?*

En el Capítulo 4 se realiza un estudio curricular, analizando los documentos oficiales en España y otros países. Seguidamente se hace un estudio cualitativo del tema en una muestra de 21 libros de texto de educación secundaria obligatoria. Esto permite identificar los elementos de significado que se presentan con mayor frecuencia en dichos textos, así como los que están ausentes. Por un lado este estudio define el *significado local* de las medidas de posición central en el estudio que se usa en la construcción del cuestionario. Por otro lado, permite identificar algunos huecos en la enseñanza que podrá servir para mejorar los libros de texto de este nivel educativo.

4. *¿Cuál es el significado personal sobre los promedios de los estudiantes de educación secundaria obligatoria al iniciar y finalizar esta etapa educativa? ¿Cuáles son los elementos de significado en que encontramos mayor dificultad inicial y cuáles resultan más intuitivos? ¿Qué progresión se observa en el aprendizaje entre estos dos niveles educativos? ¿Qué elementos continúan siendo difíciles al finalizar la etapa?*

Para dar respuesta a estas preguntas se aborda la construcción de un instrumento de evaluación (cuestionario) que tiene en cuenta los diferentes elementos de significado identificados en el estudio curricular (significado local). En el Capítulo 5 se describe la construcción y prueba del cuestionario, mediante una muestra piloto, así como las modificaciones realizadas sobre el cuestionario final. En el Capitulo 6 se presentan los resultados de un estudio detallado de las respuestas de 164 alumnos de 1º curso y 148 alumnos de 4º curso de educación secundaria obligatoria. El análisis cuantitativo permite comparar la dificultad relativa de los ítems y su diferencia en las dos muestras analizadas, así como el efecto del curso, sexo y centro sobre los resultados.

El estudio multivariante sugiere que la comprensión de las medidas de posición central no progresa según un patrón unidimensional, sino que, por el contrario, tiene un carácter multidimensional, de acuerdo al marco teórico. El estudio cualitativo detallado de las respuestas a diferentes ítems permite describir las tendencias y variabilidad en el significado personal de los estudiantes sobre los promedios. Este estudio se completa con algunos ejemplos de análisis semiótico de las respuestas, que sirve para explicar la dificultad de algunas de las tareas.

11.13. OTRAS INVESTIGACIONES

En el Grupo de Investigación de "Teoría de la Educación Matemática y de la Educación Estadística" de la Universidad de Granada, en cuyo seno se ha gestado y desarrollado inicialmente la Teoría de las Funciones Semióticas, continuamos aplicando el enfoque ontológico-semiótico de la cognición que hemos presentado en esta Monografía en diversas investigaciones en curso.

Independientemente de nuestro propio Grupo mencionamos las investigaciones desarrolladas por los siguientes grupos de investigación de otras universidades:

- Equipo dirigido por A. Contreras en la Universidad de Jaén (Contreras 2002; Luque, Sánchez y Contreras, 2002; Ordóñez, Contreras, García, y Luque, 2002; Contreras, García y Sánchez, 2003; Ordóñez y Contreras, 2003).
- Equipo dirigido por V. Font en la Universidad de Barcelona (Font, 2000b; Font, 2002; e Inglada y Font, 2002)
- Equipo dirigido por S. Etchegaray en la Universidad Nacional de Río Cuarto (Argentina) (Colombo y Etchegaray, 2003; Markiewicz y Etchegaray, 2003).

Estos grupos de investigación están utilizando de manera activa y constructiva las nociones teóricas propuestas en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática.

Capítulo 12

SINTESIS E IMPLICACIONES DE LA TEORÍA DE LAS FUNCIONES SEMIÓTICAS

"Nada hay tan poderoso para dirigir las propias acciones en una situación compleja, para coordinar los propios esfuerzos con los de los demás, como una buena teoría" (Skemp, 1976, p. 14)

12.1. Introducción
12.2. Herramientas cognitivas
12.3. Herramientas instruccionales
12.4. Enfoque y herramientas metodológicas
12.5. Hacia un modelo unificado del análisis didáctico matemático

12.1. INTRODUCCIÓN

Una de las ideas impulsoras de nuestro trabajo es el convencimiento de que la noción de significado, a pesar de su extraordinaria complejidad, puede desempeñar un papel esencial en la fundamentación y orientación de las investigaciones en didáctica de las matemáticas. A la pregunta que se hace Ernest (1997) de si "la semiótica tiene el potencial de ofrecer la base para una teoría unificada de la educación matemática (y las matemáticas)" nosotros daríamos una respuesta afirmativa, a condición de adoptar (o incluso elaborar) una semiótica apropiada y de complementarla con otras herramientas teóricas, en particular una ontología que tenga en cuenta la variedad de objetos que se ponen en juego en la actividad matemática. En esta Monografía hemos mostrado también la utilidad de incorporar herramientas conceptuales aportadas por la antropología cognitiva y la ecología conceptual.

En este último capítulo haremos una síntesis de las herramientas teóricas que consideramos útiles para progresar hacia un modelo unificado de la cognición e instrucción matemática, y que hemos descrito en esta Monografía. Mencionamos también algunas direcciones en las que es necesario progresar, como es la incorporación de las dimensiones afectivas, axiológicas, políticas, curriculares, etc. y sus interacciones con las dimensiones epistémica, cognitiva e instruccional. Todas ellas configuran los componentes de lo que para nosotros constituye el análisis didáctico-matemático, el cual deberá proporcionar la necesaria fundamentación para la tecnología didáctica y la práctica de la enseñanza de las matemáticas.

12.2. HERRAMIENTAS COGNITIVAS

Las nociones teóricas correspondientes a las dimensiones epistémica y cognitiva del análisis didáctico - matemático, introducidas hasta este momento, son las siguientes:

- Sistema de prácticas operativas y discursivas ligadas a un campo de problemas, presentado como el significado sistémico de los objetos matemáticos.
- Entidades elementales componentes de los significados sistémicos.
- Facetas duales de los objetos matemáticos.
- Función semiótica.

Resumimos a continuación las principales características de estas nociones y algunas de sus consecuencias.

Partimos de un postulado básico: *La centralidad de los problemas y los instrumentos semióticos en el trabajo matemático.*

La actividad matemática se centra en la solución de una cierta clase de situaciones problemáticas. Dicha actividad requiere el uso y la producción de una variedad de instrumentos semióticos y da lugar a técnicas, conceptos y teorías que se organizan según los principios de la lógica.

El modelo cognitivo que proponemos para describir la cognición matemática adopta la noción de situación-problema como idea primitiva. La variación sistemática de las variables que intervienen en las situaciones-problema da lugar a diferentes campos de problemas. Postulamos que la génesis del conocimiento personal se produce como consecuencia de la interacción del sujeto con campos de problemas, mediatizada por las herramientas semióticas y es dependiente de los contextos institucionales.

Como consecuencia tenemos dos unidades primarias de análisis para estudiar los procesos cognitivos: la *práctica significativa*, y el *significado sistémico de un objeto*.

Así pues, la práctica significativa, considerada como una *forma expresiva situada*, implica una situación-problema, un contexto institucional, una persona y los instrumentos semióticos que mediatizan la acción. Esta noción se utiliza para conceptualizar los objetos matemáticos como emergentes de sistemas de prácticas.

La noción de significado sistémico de un objeto nos permite derivar una noción de comprensión que tiene en cuenta los procesos institucionales y contextuales implicados (capítulo 5). De este modo, la comprensión no se reduce a un acto puramente mental.

El constructo "significado sistémico" que proponemos postula la complejidad del conocimiento matemático reconociendo sus características diacrónicas y evolutivas. Permite tomar conciencia de la importancia del campo de problemas asociado a cada conocimiento, de las variables que lo estructuran y de los sistemas ostensivos utilizables, dado que el conocimiento sobreviene de las actuaciones de las personas ante las situaciones problemáticas, mediatizadas por las herramientas lingüísticas disponibles. El sistema de prácticas operativas y discursivas puede servir de ayuda en las tareas de diseño, desarrollo y evaluación de procesos de enseñanza y aprendizaje, para orientar la búsqueda y selección de muestras representativas de las prácticas que caracterizan la competencia y comprensión matemática en cada contexto institucional.

Como hemos descrito en el capítulo 9, las nociones de *semiometría* (determinación de significados) y *ecología de significados* (relaciones y dinámica de significados) pueden ayudar a definir una problemática de investigación para la didáctica de las matemáticas.

Por otro lado, en el análisis de las actuaciones de los alumnos y profesores en el aula nos interesa con frecuencia fijar la atención en procesos interpretativos específicos y en las dificultades inherentes a los mismos. Para este análisis la tipología de objetos y facetas desde las cuales se pueden considerar se revela como un instrumento necesario. Las restantes facetas del conocimiento matemático identificadas, ostensiva - no ostensiva, elemental - sistémica, ejemplar - tipo, proporcionan nuevos elementos de análisis de los procesos de cognición matemática.

Las funciones semióticas y sus tipos

Se trata de las correspondencias (relaciones de dependencia o función) entre un antecedente (expresión o significante) y un consecuente (contenido o significado), establecidas por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia. Estos códigos pueden ser reglas (hábitos, convenios) que informan a los sujetos implicados sobre los términos (funtivos) que se deben poner en correspondencia en las circunstancias fijadas.

Un postulado que adoptamos es que cualquier objeto matemático (ostensivo o no ostensivo) puede ser expresión o contenido, como ocurre en la semiótica que propone Peirce (las ideas también funcionan como signos, Eco, 1991). Además, las relaciones de dependencia entre expresión y contenido pueden ser de tipo representacional (un objeto se pone en lugar de otro), o instrumental u operatoria (un objeto usa a otro u otros como instrumento).

La comprensión (o lo que es equivalente, el conocimiento) de un objeto O (sea ostensivo o no ostensivo) por parte de un sujeto (persona o institución) se describe en términos de las funciones semióticas que el sujeto puede establecer, en unas circunstancias fijadas, en las que O se pone en juego como funtivo (expresión o contenido). Cada función semiótica implica un acto de semiosis por un agente interpretante y constituye un conocimiento, un acto de comprensión. Hablar de conocimiento y de comprensión equivale a hablar de significado, esto es, de función semiótica, resultando una variedad de tipos y grados de conocimientos (y de comprensiones) en consonancia con la diversidad de objetos que se ponen en juego en la actividad matemática.

El modelo semiótico que proponemos para describir la cognición matemática incorpora aspectos propios tanto de las teorías pragmáticas (u operacionales) del significado como de las realistas (o referenciales). El significado de los términos y expresiones se debe buscar en el uso que se hace ellas en los contextos institucionales y en los juegos de lenguaje específicos de los que forman parte. Pero esto no implica que tengamos que renunciar a la posibilidad de encontrar usos prototípicos que indicamos con nuevos términos y expresiones. La metáfora del objeto matemático resulta útil para comprender el funcionamiento del pensamiento y no tenemos necesidad de rechazarla si logramos controlar su empleo. Como indicamos en la sección 2.3.3, esta compatibilidad entre las teorías operacionales y referenciales del significado está apoyada en posiciones como las de Ullmann (1962).

Algunas consecuencias o corolarios

Pensamos que las nociones teóricas introducidas aportan elementos nuevos para definir una semiótica cognitiva especialmente adaptada a la investigación en didáctica de las matemáticas. Indicamos a continuación algunas consecuencias que se derivan de este enfoque de la cognición matemática.

1. Puesto que los estudiantes son sujetos de distintas instituciones, su conocimiento está mediatizado por éstas. En consecuencia, la caracterización del conocimiento institucional debe constituir una etapa previa a la evaluación del conocimiento de los estudiantes y la planificación de la enseñanza.

2. Dada la complejidad del significado sistémico de los conceptos matemáticos el estudio de los mismos y los significados personales logrados por los alumnos, dependen de manera determinante de la selección que se haga de los distintos componentes de los sistemas de prácticas pretendidas.

3. Parcialidad de la comprensión y competencia matemática.

Los significados construidos por los participantes en un proceso instruccional sobre un objeto matemático -o lo que viene a ser equivalente, su conocimiento, comprensión o relación personal a dicho objeto- será siempre parcial y relativa al contexto institucional, material y temporal en que tiene lugar el proceso. Sólo nos queda la pretensión de que éste conocimiento sea lo más completo posible en cada circunstancia y que se facilite su evolución futura, contando además con estimular su interés personal.

4. Los significados sistémicos y la tipología de prácticas (y objetos emergentes) identificadas aportan nuevos elementos a tener en cuenta en el diseño y evaluación de los procesos de estudio de las matemáticas. Así mismo, la generalización del modelo aportada por la teoría de las funciones

semióticas proporciona nuevos instrumentos de análisis de procesos cognitivos y microinstruccionales, al revelar el sistema de objetos e interpretaciones que se ponen en juego.

5. Relatividad socio-epistémica del conocimiento matemático en los contextos de la enseñanza.

El diseño e implementación de los procesos de enseñanza y aprendizaje de un objeto formal matemático (procedimiento, concepto, teoría) para cada nivel educativo y circunstancias institucionales dadas exigen una selección de situaciones-problemas, instrumentos semióticos y propiedades características del objeto. Estos sistemas de prácticas locales específicas dan lugar a una multiplicidad de objetos matemáticos (informales), tanto a nivel personal como institucional. En consecuencia, cada objeto formal matemático, por ejemplo, número, función, etc, tiene que ser progresivamente abstraído o generalizado de dicha variedad de objetos informales.

12.3. HERRAMIENTAS INSTRUCCIONALES

Para la dimensión instruccional del análisis didáctico asumimos los supuestos de un "aprendizaje interaccionista", que atribuye un papel clave a la interacción social, la cooperación, el discurso, la comunicación, además de la interacción del sujeto con las situaciones problemas: el sujeto aprende mediante su interacción con un medio instruccional.

Además de adoptar estos supuestos interaccionistas del aprendizaje, proponemos modelizar la instrucción matemática como proceso estocástico multidimensional en el que distinguimos seis trayectorias:

- Epistémica (relativa a los significados institucionales y cuyos estados posibles son los seis tipos de entidades primarias descritas en el capítulo 4).
- Docente (relativa a las funciones o tareas docentes).
- Discente (relativa a las funciones o tareas de los estudiantes).
- Mediacional (que describe los diversos recursos instruccionales).
- Cognitiva (cronogénesis de significados personales)
- Emocional (que tiene en cuenta los afectos, valores, sentimientos)

La noción de *configuración didáctica*, *trayectoria didáctica* y los *patrones de interacción* completan el sistema de nociones propuesto como herramientas para el análisis de los procesos de instrucción matemática.

La aplicación de nuestro modelo cognitivo nos ha permitido proponer un conjunto de estados posibles de las trayectorias epistémicas (estados situacional, notacional, actuativo, conceptual, proposicional y argumentativo). Así mismo, la inclusión explícita como elementos de los significados sistémicos de los conceptos y proposiciones, entendidos como reglas en el sentido propuesto por Wittgenstein, nos lleva a identificar como un estado importante de las trayectorias docente y discente el correspondiente al "recuerdo e interpretación de reglas", así como la negociación de los significados de los elementos lingüísticos.

Por otra parte, el significado de los objetos matemáticos es complejo y sistémico poniendo en juego prácticas operativas y discursivas diversas. Como consecuencia, el estudio de los campos de problemas, y de las estructuras conceptuales que los organizan, requiere diseñar e implementar trayectorias didácticas que involucren muestras representativas de los distintos componentes del significado, así como crear las condiciones para resolver los conflictos semióticos.

12.4. ENFOQUE Y HERRAMIENTAS METODOLÓGICAS

Una nueva técnica: El análisis ontológico-semiótico

Hemos mostrado la utilidad de la metodología de *análisis ontológico-semiótico,* que hemos desarrollado y aplicado en diversos trabajos (capítulo 7), para la investigación en didáctica de las matemáticas. Por una parte, y a un nivel que podemos calificar de "microscópico", permite identificar significados puestos en juego en una actividad matemática puntual como es el uso de términos y expresiones en la realización de una tarea o en un acto de comunicación matemática. A un nivel más general permite describir la estructura de una organización matemática compleja implementada en un proceso de estudio particular. En ambos niveles, el análisis semiótico sirve para identificar discordancias o disparidades entre los significados atribuidos a las expresiones por dos sujetos (sean personas o instituciones) en interacción didáctica. Estos *conflictos semióticos* pueden explicar, al menos parcialmente, las dificultades potenciales de los estudiantes en el proceso de enseñanza y aprendizaje, así como identificar las limitaciones de las competencias y comprensiones matemáticas efectivamente puestas en juego. La información obtenida con este análisis es útil si se desea abordar con criterios rigurosos el diseño, implementación y evaluación de los procesos de estudio de las matemáticas.

Enfoque metodológico

Consideramos que los métodos de investigación son subsidiarios de los problemas planteados y éstos a su vez dependen de los instrumentos teóricos con los cuales se analiza la actividad humana objeto de estudio. En nuestro caso el marco teórico trata de tener en cuenta las facetas cognitiva (en su doble faceta individual e institucional) e instruccional que se pone en juego en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, introduciendo elementos ontológicos y semióticos adaptados a los objetivos de la investigación didáctica. Además se aboga por tener en cuenta tanto las regularidades observables como la variabilidad propia de los fenómenos psico-sociales. Por este motivo, necesitamos usar tanto métodos cualitativos como cuantitativos, y las diversas técnicas (análisis de documentos, observación, encuesta y medida) en una racional combinación metodológica para tratar de lograr el grado óptimo en la validez y fiabilidad de los resultados.

El relativismo epistemológico postulado por el Enfoque Ontológico-Semiótico de la Cognición e Instrucción Matemática obliga a pensar en el conocimiento, el significado y la comprensión como nociones relativas y siempre determinables de manera parcial. Esto lleva a considerar el problema de la validez de las investigaciones desde la misma perspectiva relativista, multicomponente y parcialmente determinable. Nuestro modelo aporta elementos para controlar y en su caso optimizar la *correlación epistémica* (Dane, 1990, p. 260), esto es, la relación teórica entre el componente verdadero de una medida y el concepto que representa.

12.5. HACIA UN MODELO UNIFICADO DEL ANÁLISIS DIDÁCTICO MATEMÁTICO

El modelo teórico que estamos desarrollando para la didáctica de las matemáticas, que hemos designado brevemente como Teoría de las Funciones Semióticas (TFS), pretende dotar a nuestra disciplina de una epistemología y una semiótica cognitiva adaptada a las características de los procesos de estudio de las matemáticas. Pretende buscar explicaciones de las dificultades del aprendizaje matemático, en primer lugar, en los elementos estructurales del conocimiento puestos en juego, los factores institucionales y procesuales sobre los cuales tenemos posibilidad de actuar. Una atención particular deberá recibir la interacción comunicativa y los procesos interpretativos que tienen lugar en las clases de matemáticas. Secundariamente debemos buscar las causas de las dificultades y conflictos en las carencias cognitivas intrínsecas de los sujetos.

Los elementos teóricos desarrollados hasta este momento se han centrado en las dimensiones cognitiva e instruccional. Sin embargo, somos conscientes que será necesario ampliar el modelo teórico con la inclusión de otras dimensiones que condicionan globalmente la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Se trata de las dimensiones afectivas (creencias, actitudes y emociones), axiológica (valores y fines de la educación matemática), política, curricular, etc. Estas dimensiones deberán ser objeto de atención en un enfoque unificado del análisis didáctico matemático.

Observaciones finales

1. En el trabajo de elaboración teórica de cualquier disciplina es importante respetar el llamado "principio de parsimonia": incluir en la "caja de herramientas" aquellas que realmente sean necesarias. Pero esto no debe llevarnos a caer en la ilusión de poder estudiar, por ejemplo, la estructura celular con una simple lupa. Ciertamente el microscopio electrónico es un instrumento muy complejo y costoso, pero estrictamente necesario para progresar en el conocimiento de una realidad que cada vez se nos revela más compleja.

Nuestro modelo ontológico-semiótico se ha ido complicando a medida que lo aplicamos al análisis de la actividad matemática: de la lupa del triángulo semiótico (signo, objeto, concepto) hemos pasado al "microscopio" constituido por las seis entidades básicas (situaciones, lenguaje, acciones, conceptos, propiedades y argumentos) y los cinco pares de facetas duales, que operan como "apellidos" de las entidades básicas. Esto nos lleva a un modelo ontológico ciertamente mucho más complejo que el triángulo primitivo. Pero estamos convencidos que el modelo permitirá desvelar nuevas dimensiones de la cognición matemática y su desarrollo.

2. El enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática descrito en esta Monografía es obra de un equipo de investigación en el que ha contribuido de manera esencial Carmen Batanero y otros investigadores que forman parte del Grupo de Investigación "Teoría de la Educación Matemática y Educación Estadística" de la Universidad de Granada. El trabajo realizado hasta este momento muestra una evolución progresiva que está lejos de haber concluido, no solo por las aplicaciones y reflexiones que continúan realizándose en nuestro propio Grupo, sino también por las aportaciones de otros investigadores. Entre estos investigadores debemos destacar los trabajos de A. Contreras (Universidad de Jaén), de V. Font (Universidad de Barcelona) y de S. Etchegaray (Universidad de Río Cuarto, Argentina) con sus respectivos equipos de investigación. En realidad concebimos esta Monografía como un proyecto de investigación abierto a la contribución de la comunidad de investigadores en didáctica de las matemáticas interesados por el enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática.

REFERENCIAS

Alley, Th. R. (1985). Organism-environment mutuality epistemics, and the concept of an ecological niche. *Synthesis* 65, 411-444.

Arrieche, M. (2002). *La teoría de conjuntos en la formación de maestros: Facetas y factores condicionantes del estudio de una teoría matemática*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Artigue, M. (1990). Epistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10 (2,3): 241-286.

Atweh, B., Forgasz, H. y Nebres, B. (2001). *Sociocultural research on mathematics education. An international perspective*. London: Lawrence Erlbaum.

Austin, J. L. (1971). *Cómo hacer cosas con palabras: palabras y acciones*. Barcelona: Piados.

Ausubel, D. P. (2000). *Adquisición y retención del conocimiento. Una perspectiva cognoscitiva*. Barcelona: Piados, 2002.

Ausubel, D. P., Novak, J. D. y Hanesian, H. (1983). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo.* Mexico, Trillas.

Balacheff, N. (1990). Towards a "problématique" for research on mathematics teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21, (4), p. 259-272.

Barr, G. V. (1980). Some students ideas on the median and mode. *Teaching Statistics*, 2, 38-41.

Baker G. P. y Hacker P. M. S. (1985). *Wittgenstein. Rules, grammar and necessity. An analytical commentary on the Philosophical Investigations.* Glasgow: Basil Blackwell.

Batanero, C. Godino, J. D. y Navarro-Pelayo, V. (1994). *Razonamiento combinatorio*. Madrid: Síntesis.

Batanero, C., Godino, J. D. y Navas, F. (1997). Some misconceptions about averages in prospective primary school teachers. (Presentación de Poster). En: E. Pehkonen (Ed.), *Proceeding of the 21nd International Conference for the Psychology of Mathematics Education.* Lahti, Finlandia.

Bauersfeld, H. (1994). Theoretical perspectives on interaction in the mathematics classroom. En R. Biehler; R. Scholz; R. Strässer y B. Winkelmann (Eds.). *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp. 133-146). Dordrecht, NL: Kluwer Academic Pb.

Bauersfeld, H. (1995). "Language Games" in the mathematics classroom: their function and their effects. En Cobb, P. y Bauersfeld, H. (Eds.). *The Emergence of Meaning: Interaction in Classroom Cultures* (pp.271-292). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, Pub.

Bauersfeld, H., Krummheuer, G. y Voigt, J. (1988). Interactional theory of learning and teaching mathematics and related microethnographical studies.En H.G. Steiner y A. Vermandel (Eds.). *Foundations and Methodology of the Discipline Mathematics Educatíon (Didactics of Mathematics)* (pp. 174-168). Antwerp: Proccedings of the 2nd TME-Conference. University of Antwerp.

Berger, P. y Luckmann, T. (1968). *La construcción social de la realidad*. Buenos Aires: Amorrortu.

Bloch, I. (1999). L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'ensignement d l'analyse en première scientifique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19 (2): 135-194.

Bloor, D. (1983). *Wittgenstein. A social theory of knowledge.* London: The Macmillan Press.

Blumer, H. (1969). *Symbolic interactionism: Perspective and method.* Englewood Cliffs, NJ.: Prentice-Hall. [El interaccionismo simbólico: Perspectiva y método. Barcelona: Hora, 1982].

Bosch, M., Espinoza, L. y Gascón, J. (2003). El profesor como director del proceso de estudio: Análisis de organizaciones didácticas espontáneas. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 23 (1): 79-136.

Bosch, M. y Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19 (1): 77-124.

Bruner, J. (1990). *Actos de significado. Mas allá de la revolución cognitiva*.

Madrid, Alianza. Col. Psicología Minor, 1991.

Brousseau, G. (1980). Address of members of the G.R.D.M. (France) at the ICME IV. August 1980. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 1: 10-15.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7 (2): 33-115.

Brousseau, B. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer A. P.

Bunge, M. (1985). *La investigación científica*. Madrid, Ariel.

Calot, G. (1974). *Curso de Estadística Descriptiva*. Madrid: Paraninfo.

Cañón, C: 1993, *La Matemática: Creación o Descubrimiento,* Universidad Pontificia de Comillas, Madrid.

Cassirer, E. (1964). *Filosofía de las formas simbólicas.* México: Fondo de Cultural Económica, 1971.

Carvalho, C. (1998). Tarefas estatísticas e estratégias de resposta. Comunicación presentada en el *VI Encuentro en Educación Matemática de la Sociedad Portuguesa de Ciencias de la Educación*. Castelo de Vide, Portugal.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1991), Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble*. LSD2-IMAG, Université Joseph-Fourier, Grenoble.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approache anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12 (1): 73-112.

Chevallard, Y. (1997). Familière et problématique, la figure du professeur, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 17 (3): 17-54.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.* Barcelona: Horsori e ICE de la Universidad de Barcelona.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19 (2): 221-266.

Cobb, P. (1989), Experiential, cognitive, and anthropological perspectives in mathematics education. *For the Learning of Mathematics* 9, 2 (June 1989): 32-42).

Cobb, P. y Bauersfeld, H. (Eds.) (1995). *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures.* Hillsdale,N.Y.: Lawrence Erlbaum A. P.

Cobb, P., Yackel, E. y McClain, K. (2000) (Eds.). *Symbolizing and communicatins in mathematics classrooms.* London: Lawrence Erbaum Associates.

Colombo, S. y Etchegaray, S. (2003). Cambios de significados personales: Análisis de un momento de interacción entre alumnos en una clase de matemáticas. En J. E. Sagula (Ed.). *Memorias del V Simposio de Educación Matemática*. Chivilcoy: EMAT, Editora.

Contreras, A. (2002). Aplicación de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis. *I Seminari d' investigació en didáctica de les matemàtiques. Aplicacions a la didáctica de l'anàlisi infinitesimal*. Departamento de Didàctica de les CC i de la Matemática. Universidad de Barcelona.

Contreras, A. y Font, V. (2002). ¿Se aprende por medio de los cambios de representaciones semióticas de un mismo objeto matemático? XVIII Reunión del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (Castellón)

Contreras, A., Font, V., Luque, L. y Ordóñez, L. (2001). Una análisis semiótico de la noción de límite de una función. (Taller). *V Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*. Almería, Septiembre 2001.

Contreras, A., García, M. y Sánchez, C. (2003), Investigación acerca de la enseñanza del límite en el marco de la teoría de las funciones semióticas. En, Enc. Castro y cols (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*(pp. 189-199). Granada: Universidad de Granada.

D' Amore, B. (2001). Una contribución al debate sobre conceptos y objetos matemáticos. *Uno*, 27: 51-76.

Dane, F. C. (1990). *Research methods.* Belmont, CA: Brooks/Cole.

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. En A. J. Bishop et al. (Eds.), *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching* (pp. 63-85). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7 (2): 5-31.

Douady, R. (1991). Tool, object, setting, window: elements for analysing and constructing didactical situations in mathematics. *En:* A. J. Bishop & S. Melling Olsen (Eds). *Mathematical knowledge: its grouth through teaching*, (pp. 100-130). Dordrecht, Kluwer A. P.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Dummett, M.A.E. (1991). ¿Qué es una teoría del significado?. *En:* L.M. Valdés (Ed.), *La búsqueda del significado.* Madrid: Tecnos. [original en inglés publicado en 1975]

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et functionnement cognitive de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5: 37-65 (IREM de Strasbourg).

Duval, R. (1995). *Sémiosis et penseé humaine.* Berna: Peter Lang.

Eco, U. (1991). *Tratado de semiótica general.* Barcelona, Lumen, 1979).

Eco, U. (1984). *Semiótica y filosofía del lenguaje*. Madrid: Lumen, 1990.

Eco, U. (1999). *Kant y el ornitorrinco*. Barcelona: Lumen.

Eisenbach, R. (1994). What does de mean mean? Comunicación presentada en el *Fourth International Conference on Teaching Statistics*. Marrakesh, Marruecos.

Ellerton, N. F. y Clarkson, P. C. (1996). Language factors in mathematics teaching and learnin. En A. J. Bishop et al. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 987-1034). Dordrecht: Kluwer A. P.

English, L. D. (Ed.) (1997). *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors and images*. Hillsdale, N.J.: Erlabaum.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. London, Falmer Press.

Ernest, P. (1993). Mathematical activity and rhetoric: A social constructivist account. En I. Hirabasash, N. Nohda, K. Shigematsu and F. Lin (Eds.), *Proceedings of Seventeenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. II-238-245). University of Tsukuba. Japan.

Ernest, P. (1994). Varieties of constructivism: Their metaphors, epistemologies and pedagogical implications. *Hiroshima Journal of Mathematics Education* 2: 1-14,

Ernest, P. (1997). Introduction: Semiotics, mathematics and mathematicas education. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, nº 10.

URL: http://www.ex.ac.uk/~PErnest/pome10/art1.htm

Ernest, P. (1998). *Social constructivism as a philosopy of mathematics*. New York: SUNY.

Etchegaray, S. (2001). *Análisis epistemológico y didáctico de nociones elementales de teoría de números.* Tesis de Maestría. Universidad Nacional de Río Cuarto. Argentina.

Feldt, L. S. y Brennan, R. L. (1991). Reliability. *En:* R. L. Linn (Ed.) *Educational measurement* (Third ed.), pp. 263-331). New York, American Council on Education and Macmillan Publ.

Fennema, E. Y Romberg, Th. (1999). *Mathematics classrooms that promote understanding*. London: Lawrence Erlbaum.

Font, V. (2000a). *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfique*s. Tesis doctoral. Universitat de Barcelona.

Font, V. (2000b). Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas. *Philosophy of Mathematics Education Journal,* 14: 1-35. [http://www.ex.ac.uk/~PErnest/pome14/contents.htm].

Font, V. (2002). Una organización de los programas de investigación en Didáctica de la Matemática. Revista *EMA*, 7 (2): 127-170.

Fortuny, J. M., Giménez, J. y Alsina, C. (1994). Integrated assessment on mathematics 12-16. *Educational Studies in Matematics*, 27: 401-412.

Freudenthal, H. (1982). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Kluwer, A. P.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Dordrecht, Kluwer

AC.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18(1): 7-33.

Gatica, N. (2001). *Las inecuaciones lineales con dos variables en el último ciclo de la Enseñanza General Básica*. Tesis de Maestría. Universidad Nacional de Río Cuarto. Argentina.

Giménez, J. (1997). *Evaluación en matemáticas. Una integración de perspectivas.* Madrid: Síntesis.

Glasersfeld, E. von (1989). Cognition, construction of knowledge, and teaching. *Synthese* 80: 121-140.

Godino, J. D. (1991). Hacia una teoría de la Didáctica de la Matemática. En: A. Gutierrez (Ed.), *Área de conocimiento: Didáctica de la Matemática* (pp. 105-148). Madrid: Síntesis.

Godino, J. D. (1993), La metáfora ecológica en el estudio de la noosfera matemática. *Quadrante*, Vol 2, nº 2, pp. 69-79 (Revista Teórica e de Investigaçao; Associaçao de Professores de Matemática, Lisboa).

Godino, J. D. (1996). Mathematical concepts, their meaning, and understanding. En: L. Puig y A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 2-417-424), Universidad de Valencia.

Godino, J. D. (1999a). Implicaciones metodológicas de un enfoque semiótico-antropológico para la investigación en didáctica de las matemáticas. En T. Sierra (Ed.), *Actas del III Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 196-212). Valladolid: Universidad de Valladolid.

Godino, J. D. (1999b). Análisis epistémico, semiótico y didáctico de procesos de instrucción matemática. Comunicación presentada en el Grupo de Trabajo "*La Didáctica de la Matemática como Disciplina Científica*". III Simposio de la SEIEM, Valladolid, Septiembre de 1999.

Godino, J. D. (2000). Significado y comprensión en matemáticas.*UNO*, 25: 77-87.

Godino, J. D. (2001). Confrontación de herramientas teóricas para el análisis cognitivo en didáctica de las matemáticas. *XVI Reunión del Seminario*

Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SIIDM). Huesca, 31 Marzo 2001.[http://www.ugr.es/local/jgodino/si-idm/]

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 22 (2/3): 237-284.

Godino, J. D. (2002). Competencia y comprensión matemática, ¿Qué son y como se consiguen?. *UNO*, 25: 77-87.

Godino, J. D. (2003). Prospettiva semiotica della competenza e della comprensione matemática. *La Matematica e la sua Didattica*, 4 (2002): 434-449.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*,14 (3): 325-355.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En: A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1999). The meanings of mathematical objects as análisis units for didactic of mathematics. En I. Schwank (Ed.). *European Reseach in Mathematics Education III*. CERME 1 (pp. 236-248). Osnabrück: Forschungsinstitu für Mathematikdidaktik.

Godino, J. D., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1987). *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Madrid: Síntesis.

Godino, J. D., Batanero, C. y Roa, R. (2002). A semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. Pendiente de publicación.

Godino, J. D. y Llinares, S. (2000). El interaccionismo simbólico en educación matemática. *Educación Matemática,* 12 (1): 70-92.

Godino, J. D. y Recio, A. M. (1997). Meanings of proof in mathematics education. En, E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21th International Conference of PME.(* v. 2. pp. 313-321). Lahti, Finland.

Godino, J. D. y Recio, A. M. (1998). A semiotic model for analysing the relationships between thoughy, language and context in mathematics education. En A. Olivier y K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics*

Education, Vol 3: 1.8. University of Stellenbosch, South Africa.

Godino, J. D. y Recio, A. M. (2001). Significados institucionales de la demostración matemática. Implicaciones para la educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, 19 (3): 405-414.

Goldin, G. (1998). Representations and the psychology of mathematics education: part II. *Journal of Mathematical Behaviour*, 17 (2): 135-165.

Goldin, G. y Janvier, C. (1998). Representacion and the psychology of mathematics education. *Journal of Mathematics Behaviour*, 17 (1): 1-4

Goldin, G. y Stheingold, (2001). System of representations and the development of mathematical concepts. En A. Cuoco y F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 1-23).Yearbook 2001. Reston, VA: NCTM.

Hache, C. y Robert, A. (1997). Un essai d'analyse de pratiques effectives en classe de seconde, ou comment un enseignant fait "fréquente" les mathématiques à ses eleves pendant la classe?. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 17 (3): 103-150.

Hiebert, J. & Carpenter, Th. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In: D. W. Grouws (Ed.), *Handbook of research in teaching and learning of mathematics* (pp. 65-97). New York: Macmilan.

Hjemslev, L. (1943). *Prolegómenos a una teoría del lenguaje.* Madrid: Gredos, 1971.

Inglada, N. y Font, V. (2002). Le rôle des livres de texte comme médiateurs d'activation de la connaisance mathématique commune. Le cas des dérivées des fonctions élémentaires. *Actas de la 54 Reunión de la CIEAEM*. Vilanova i la Geltrú (Barcelona).

Kaput, J.J. (1998). Representations, inscriptions, descriptions and learning: A kaleidoscope of windows. *Journal of Mathematical Behaviour,* 17 (2), 266-281.

Kieran, C., Forman, E. y Sfard, A. (2001). Learning discourse: Sociocultural approaches to research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics* 46: 1-12.

Kieren, T. y Pirie, S. (1991). Recursion and the mathematical experience. En L. P. Stefee (Ed.), *Epistemological foundation of mathematical experience* (pp. 78-101). New York: Springer-Verlag.

Koyama, M. (1993). Building a two axes process model of understanding mathematics. *Hiroshima Journal of Mathematics Education* 1: 63-73

Kutschera, F. von (1971). Filosofía del lenguaje. Madrid: Gredos. [Sprachphilosphie. Vilhem Fink Verlag, München, 1979]

Johnson, M. (1987). *The body in the mind. The bodily basis of meaning, imagination, and reason*. Chicago: The University of Chicago Press

Lakatos, I. (1983). *La metodología de los programas de investigación científica*. Madrid: Alianza.

Lakoff, G. y Johnson, M. (1980). *Metaphors we live by.* Chicago: University of Chicago.

Lakoff, G. y Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. New York: Basic Books.

Lester, F.K. (1980). Research on mathematical problem solving. *En:* R.J. Shumway (Ed.), *Research in mathematics education*. Reston, VA. National Council of Teachers of Mathematics.

Lin, F, y Cooney, Th. J. (Eds.) (2001). *Making sense of mathematics teacher education*. Dordrecht: Kluwer A. P.

Llinares, S. (2000). Intentando comprender la práctica del profesor de matemáticas. En J. Ponte y L. Serrazina (Eds.), *Educaçao matemática en Portugal, Espanha e italia*. Acta da Ecola de Verao-1999. (pp. 109-132). Sociedade de Educaçao Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciencias de Educaçao.

Luque, L., Sánchez, C. y Contreras, A. (2002). Una aproximación al análisis semiótico del límite de una función en un punto. *Actas de las X Jornadas de la Sociedad Thales sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas.* Almería.

Maier, H. (1992). Du concept de comprehension dans l'enseignement des mathematiques. *Actes du Premier Colloque Franco-Allemand de Didactique,* (pp. 29-39).

Margolinas, C. (1992). Éléments pour l'analyse du rôle du maître: les phases de conclusión. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 12 (1): 113-158.

Markiewicz, M. E. y Etchegaray, S. (2003). Abordaje de un tema de investigación didáctica desde el enfoque semiótico-antropológico: El papel del razonamiento plausible en la enseñanza de la matemática del nivel medio. *Departamento de Matemáticas. Universidad Nacional de Río Cuarto* (Argentina).

McDonough, R.(1989). Towards a Non-Mechanistic Theory of Meaning. *Mind, xcviii* (389), 1-21.

McGinn, C.(1984). *Wittgenstein on Meaning*, Basil Blackwell, Oxford.

Morin, E. (1986). *El método I; la naturaleza de la naturaleza*. Madrid, Cátedra (orig. fr. 1977; Editions du Seuil).

Morin, E. (1992). *El método. Las ideas.* Madrid: Cátedra (orig. francés, Editions du Seuil, 1991).

Morin, E. (1994). *Introducción al pensamiento complejo*. Barcelona: Gedisa.

Messick, S. (1991), Validity. *En:* R. L. Linn (Ed.), *Educational measurement* (Third ed.), pp. 13-104). New York, American Council on Education and Macmillan Publ.

Mokros, J. y Russell, S. J. (1995). Children's concepts of average and representativeness. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26, 20-39.

Niss, M. (Ed.) (1993). *Investigations into assessment in mathematics education; an ICMI Study*. Dordrecht, Kluwer A.P.

Nunes, T.(1992). Ethnomathematics and Everyday Cognition. En, D.A. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 557-574), Macmillan, New York.

Ogden, C.K. y Richards, I.A. (1923). *El significado del significado.* Barcelona, Paidos, 1984.

Ordóñez, L. Y Contreras, A. (2003). El análisis de manuales en la enseñanza de la integral definida. En Enc. Castro y cols (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*(pp. 277-287). Granada: Universidad de Granada.

Ordóñez, L., Contreras, A., García, M. y Luque, L. (2002). Significado institucional de la integra. *Actas de las X Jornadas de la Sociedad Thales sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas.* Almería.

Ortiz, J. J. (1999). *Significados de los conceptos probabilísticos en los libros de texto de bachillerato*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada. [http://www.ugr.es/local/batanero]

Patten, B.C. y Auble, G.T. (1980). System approach to the concept of niche. *Synthese 43, 155-181*.

Peirce, Ch. S. (1965). *Obra lógico-semiótica*. Madrid: Taurus, 1987.

Piaget, J. (1979). *Introducción a la epistemología genética*. Buenos Aires: Paidos.

Piaget, J. (1979). Los problemas principales de la epistemología de la matemática. *En:* J. Piaget (Director), *Tratato de lógica y conocimiento científico. 3: Epistemología de la matemática*. Buenos Aires, Paidós.

Pimm, D. (1995). *Symbols and meanings in school mathematics*. London: Routledge.

Pirie, S.E.B. & Kieren, T. E. (1994). Grouth in mathematical understanding: How can we characterize it and how can we represent it?. *Educational Studies in Mathematics*, 26 (3): 165-190.

Pozo, J.I. (1989), *Teorías cognitivas del aprendizaje*. Madrid, Morata.

Puig, L. (1994). Semiótica y matemáticas. *Eutopías 2ª época*, nº 51. Valencia: Episteme.

Putnam, H. (1975), El significado de "significado". *En:* L.M. Valdés (Ed.), *La búsqueda del significado.* Madrid, Tecnos.

Recio, A. M. (1999). *Una aproximación epistemológica a la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Recio, A. M. y Godino, J. D. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, 48 (1): 83-99.

Rico, L. (1997). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria*. Madrid: Síntesis.

Ríos, S. (1967). *Métodos estadísticos.* Madrid: Ediciones del Castillo.

Roa, R. (2000). Razonamiento combinatorio en estudiantes con preparación matemática avanzada. Tesis Doctoral. Universidad de Granada. [http://www.ugr.es/local/batanero]

Rotman, B.(1988). Toward a semiotics of mathematics. *Semiotica 72* (1/2), 1-35.

Sánchez, E. (2000). Investigaciones didácticas sobre el concepto de eventos independientes en probabilidad. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 20 (3): 305-330.

Sánchez-Cobo, T. F. (1999). *Significado de la regresión y correlación para estudiantes universitarios*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Santos, D y cols. (1995). Matemáticas 3º. Madrid: Santillana .

Saussure, F. (1915). *Curso de lingüística general.* Madrid: Alianza, 1991.

Searle, J. R. (1997). *La construcción de la realidad social.* Barcelona: Piados.

Serrano, L. (1996). *Significados institucionales y personales de objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial de la enseñanza de la probabilidad*.Tesis Doctoral. Universidad de Granada.0

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics,* 22 (1): 1-36.

Sfard, A. (2000). Symbolizing mathematical reality into being -or how mathematical discourse and mathematical objects create each other. En, P. Coob, E. Yackel y K. McClain (Eds.), *Symbolizin and communicating in mathematics classrooms* (pp.38-75). London: Lawrence Erlbaum.

Sfard, A. (2001). There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics*, 46: 13-57.

Sierpinska, A. (1990), Some remarks on understanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 10, 3, p. 24-36.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. London: The Falmer Press.

Sierpinska, A. y Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. En A. J. Bishop et al. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 827-876). Dordrecht: Kluwer A. P.

Sierpinska, A. y Kilpatrick, J. (1998) (Eds.). *Mathematics Education as a research domain: A search for identity*. Dordrecht: Kluwer, A. P.

Simon, H.A. (1978), Information-processing theory of human problem solving. *En:* W. K. Estes (Ed.), *Handbook of learning and cognitives processes,* Vol 5: Human information processing. Hillsdale, Lawrence Erlbaum

Associates.

Skemp, R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, December, 1976.

Schneider, M. (2001). Praxéologies didactiques et praxéologies mathématiques à propos d'un enseignement *des* limites au secondaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 21 (1.2): 7-56.

Snow, R.E. y Lohman, D.R. (1991), Implication of cognitive psychology for educational measurement. *En:* R. L. Linn (Ed.) *Educational measurement* (Third ed.), pp. 263-331). New York, American Council on Education and Macmillan Publ.

Steinbring, H. (1991), Mathematics in teaching processes. The disparity between teacher and student knowledge. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 11 (1): 65-108.

Steinbrigng, H. (1997). Epistemological investigation of classroom interaction in elementary mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics,* 32: 49-92.

Steiner, H.G. (1984). Theory of mathematics education (TME) - an introductory talk. En: H.G. Steiner & al. (Eds). *Theory of mathematics education (TME). ICME 5.* Occasional paper 54. Institut fur Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld.

Steiner, H.G. (1985). Theory of mathematics education (TME): An introduction. *For the Learning of Mathematics*, 5 (2): 11-17.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12 (2): 151-169.

Tauber, L. (2001). *La construcción del significado de la distribución normal a partir de actividades de análisis de datos*. Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla. [http://www.ugr.es/local/batanero]

Tirosh, D. (1999). Forms of mathematical knowledge: learning and teaching with understanding. *Educational Studies in Mathematics*, 38: 1-9.

Toulmin, S. (1977). *La comprensión humana (I). El uso colectivo y la evolución de los conceptos***.** Madrid: Alianza (ed. orig. inglesa de 1972).

Tukey, J. W. (1962). The future of data analysis. *Annals of Mathematics Statistics*, 33, 1-67.

Tymoczko, T. (ed.) (1986). *New directions in the philosopy of mathematics*. Boston: Kirkhauser.

Ullmann, S. (1962). *Semántica. Introducción a la ciencia del significado.* Madrid: Aguilar, 1978.

Van Dormolen, J. (1991). Metaphors mediating the teaching and understanding of mathematics. En A. J. Bishop and S. Melling Olsen (Eds.), *Knowledge: Its growth through teaching* (pp. 89-106). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Varela, F. J. (1988). *Conocer. Las ciencias cognitivas: tendencias y perspectivas; cartografía de las ideas actuales.* Barcelona: Gedisa, 1990.

Vergnaud, G. (1982). Cognitive and developmental psychology and research in mathematics education: some theoretical and methodological issues. *For the Learning of Mathematics* 3 (2): 31-41.

Vergnaud, G. (1990), La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 10 (2,3): 133-170.

Vergnaud, G. (1998). A comprehensive theory of representation for mathematics education. *Journal for Mathematical Behaviour*, 17 (2): 167-181.

Vile, A. y Lerman, S. (1996). Semiotics as a descriptive framework in mathematics domain. En: L. Puig y A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 4-395-402), Universitat de Valencia.

Voigt, J. (1985). Patterns and routines in classroom interaction. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 6 (1): 69-118.

Voigt, J. (1994). Negotiation of mathematical meaning and learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* 26: 275-298.

Voigt, J.(1995). Thematic patterns of interaction and sociomathematical norms. En P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.). (pp. 163-199).

Vygotsky, L. S. (1934). *Pensamiento y lenguaje*. [Obras escogidas II, pp. 9-287]. Madrid: Visor, 1993.

Vygotsky L. S. (1979). *El desarrollo de las funciones psicológicas superiores*. Barcelona: Grijalbo.

Watson, J. M. y Moritz, J. B. (2000). The longitudinal development of understanding of average. *Mathematical Thinking and Learning*.

Webb, N. L. (1992), Assessment of student's knowledge of mathematics: step toward a theory. *En:* D.A. Grouws, (Ed.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York, Macmillan.

Weinberg, D. y Gavelek, J. (1987). A social constructivist theory of instruction and the development of mathematical cognition. *Proceeding of the International Conferencie for the Psychology of Mathematics Education*.

Wheeler, D. (1993). Epistemological issues and challenges to assessment: What is mathematical knowledge? *En*: M. Niss (Ed.) *Investigations into assessment in mathematics education, An ICMI Study*. Dordrecht, Kluwer A.P.

White, L.A. (1983). *La ciencia de la cultura. Un estudio sobre el hombre y la civilización*. Barcelona: Paidos.

Wilder, R.W. (1981). *Mathematics as a cultural system.* New York: Pergamon

Wittgenstein, L. (1953). *Investigaciones filosóficas.* Barcelona: Crítica.

Wittgenstein, L. (1976). *Observaciones sobre los fundamentos de las matemáticas.* Madrid: Alianza.

Yackel, E. y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27: 458-477.

ANEXOS

1. Proceso de estudio de la mediana en un libro de 3º de E.S.O.
2. Significado referencial de la mediana
3. Transcripción de un segmento de una clase sobre cálculo de derivadas en Bachillerato

ANEXO 1

PROCESO DE ESTUDIO DE LA MEDIANA EN UN LIBRO DE 3º DE E.S.O[275]

Mediana de un número Impar de datos

La mediana es el dato central.

Sueldos

60.000 pts
70.000 pts
80.000 pts
90.000 pts
380.000 pts

Mediana = 80.000 pts

Mediana de un número par de datos

La mediana es la media de los dos datos centrales.

Sueldos

70.000 pts.
80.000 pts
90.000 pts
380.000 pts.

Mediana = 85.000 pts

♦E17♦

La mediana

Entre las medidas de centralización, la media aritmética es generalmente la que mejor representa a un conjunto de datos♦, ya que en el cálculo de la media U1
intervienen todos los datos. ♦ Sin embargo, hay casos en que la mediana U2
representa mejor a un conjunto de datos, ♦ como ocurre en el siguiente ejemplo: U3
En una oficina, los sueldos de las cinco personas que trabajan en ella son 60.000 pts, 70.000 pts, 80.000 pts, 90.000 pts y 380.000 pts ¿Qué cantidad puede representar mejor estos cinco sueldos? ♦ U4

Calculemos la media: U5

X = (60.000 + 70.000 + 80.000 + 90.000 + 380.000) : 5 = 136.000 pts♦

Es evidente que esta media no representa bien a los sueldos de los trabajadores de la oficina, ya que los sueldos de cada una de las cinco personas están bastante alejados de las 136.000 pts. Esta falta de representatividad de la media es debida a la existencia de un sueldo muy elevado (380.000 pts) comparado con los demás, que influye en la media. ♦ U6

En este caso, la mediana resulta ser un número más representativo que la media aritmética.♦ U7

La mediana de un conjunto ordenado de datos de una variable es el valor que deja igual número de datos por encima de él que por debajo de él. ♦ U8

La mediana se obtiene ordenando en forma creciente los cinco sueldos y eligiendo aquel que deja por debajo el mismo número de sueldos que por arriba. Como el número de datos es impar, la mediana es el dato central. U9

60.000 pts, 70.000 pts, 80.000 pts, 90.000 pts, 380.000 pts. U10

La mediana de los cinco sueldos es 80.000 pts, ♦ es decir, Me = 80.000. ♦ U11

Cuando el número de datos es par, ♦ la mediana es la media aritmética de los U12
dos datos centrales. ♦ Por ejemplo, si en la oficina que hemos considerado antes U13
hay sólo cuatro empleados con sueldos de 70.000 pts, 80.000 pts, 90.000 pts y 380.000 pts, ♦ la mediana es: U14

[275] Santos, D y cols. (1995). Matemáticas 3º. Madrid: Santillana (pp. 233 y 234).

$Me = (80.000 + 90.000):2 = 85.000$♦

Como se ve, también en este caso la mediana deja por encima el mismo número de datos que por debajo. ♦ U15

U16

La mediana se puede utilizar en distribuciones de tipo cualitativo, siempre que las modalidades se puedan ordenar, como es el caso de las calificaciones (Insuficiente, Suficiente, Bien, Notable y Sobresaliente). ♦

Actividades

1. ♦Las calificaciones obtenidas por 7 amigos en Lengua han sido: Suficiente, Sobresaliente, Insuficiente, Notable, Bien, Insuficiente y Notable. ¿Qué calificación los representa?

2. Las calificaciones obtenidas en Inglés por 8 alumnos han sido:
   10, 6, 7, 4, 5, 8, 2, 8
   ¿Es representativa la media arimética? ¿Y la mediana? Explícalo.

3. El peso en kilos de 8 compañeros de clase de Inglés es: 53, 48, 47, 43, 52, 58, 62, 49. U18
   ¿Cuál es la mediana de los 8 compañeros? ¿Cuál es la mediana, sin incluimos al profesor que pesa 73 kg? ♦

Cálculo de la mediana cuando hay datos repetidos

U19

Tabla con frecuencias absolutas acumuladas

Si queremos obtener la mediana de la edad de los 25 alumnos de la clase♦, ordenamos en forma creciente las edades.

13, 13, 13, 13, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 15, 15, 15, 15, 15, 15, 15, 16

En esta serie ordenada, la mediana es el número que ocupa el lugar central, es decir, el 14, $Me = 14$. ♦ U20

Mitad de los datos = 12.5

Mediana = 14

Como escribir todos los datos ordenados en forma creciente es complicado cuando el número de datos es grande, ♦ se sigue el procedimiento de agregar a la tabla estadística una nueva columna con las frecuencias absolutas acumuladas (ver margen). U21

El primer número de la columna, el 4 representa los alumnos con edad igual a 13 años.

El segundo número, el 17, representa los alumnos con edad igual o inferior a 14 años. U22

Análogo significado tienen las frecuencias acumuladas 24 y 25.

♦ ***La mediana es el primer valor de la variable, que corresponde a la frecuencia absoluta acumulada, inmediatamente superior a la mitad del número de datos.*** ♦ U23

Como 25 : 2 = 12.5, la frecuencia acumulada inmediatamente superior a 12.5 es 17; luego $Me = 14$.

ANEXO 2

SIGNIFICADO REFERENCIAL DE LA MEDIANA

En este Anexo fijamos el sistema de prácticas descriptivas, actuativas y discursirvas que tomaremos como referencia para el objeto *mediana* en el trabajo y cuyos elementos característicos describimos a continuación. Este conjunto de prácticas recoge la descripción de la mediana en una serie de libros de estadística a nivel universitario, que son los siguientes:

Calot G. (1974). *Curso de Estadística Descriptiva*. Madrid: Paraninfo.

Somos conscientes de que la lista de prácticas que incluimos a continuación no agotan el significado sistémico integral de la mediana dentro de la matemática. Sin embargo, lo consideramos suficiente para el propósito de ejemplificar nuestras nociones teóricas en el presente trabajo

Situaciones- problemas

El campo de problemas de cuya resolución emerge el objeto mediana son aquellos en las cuales se requiere determinar un valor representativo de los valores de una variable estadística en los siguientes casos:

- La variable es de tipo ordinal.
- La variable se mide según una escala de razón pero es asimétrica, o bien presenta valores atípicos (lo que haría poco representativa la media).
- Se requiere estimar el valor representativo de un conjunto de datos cuya distribución es desconocida con una muestra pequeña (en este caso la mediana de la muestra es un estimador mejor que la media porque no es sensible a los valores atípicos).

Elementos lingüísticos

El valor de la variable estadística que resuelve la clase de situaciones descrita se denomina y simboliza de diversos modos:

- Mediana (M, Me), percentil del 50% (P50%) , 2º cuartil (Q_2), 5º Decil (D5); $F^{-1}(½)$

- Abscisa del punto de la curva empírica de distribución cuya ordenada es ½.

- Abscisa del punto del polígono acumulativo de frecuencias absolutas (respect. relativas) cuya ordenada es n/2 (respect. 0.5).

- Gráfico del tronco en el que se muestran los valores atípicos y la mediana.

Algoritmos y procedimientos

Las situaciones-problemas descritas se pueden resolver aplicando la siguiente técnica general:

- Ordenación de los datos de menor a mayor
- Identificación del valor central M, o sea el valor de la variable tal que la mitad tiene un valor menor o igual que M, y la otra mitad mayor o igual que M.

Si se trata de una variable aleatoria la técnica general será resolver el siguiente sistema de inecuaciones,

$F(x^-) \leq 1/2$; $F(x^+) \geq 1/2$, [F(x), función de distribución]

Esta técnica general se concreta en otras específicas según que la variable estadística sea discreta (con número par o impar de valores), haya datos repetidos, o se trate de una variable continua cuyos datos se agrupan en intervalos de clase.

La técnica se adapta o generaliza según los datos vengan dados por diversos ostensivos:

- Datos directos (en forma de listado)
- Datos presentados en tablas de frecuencias
- Datos presentados en diagrama del tronco
- Datos presentados en un polígono acumulativo de frecuencias

La disponibilidad de ordenadores introduce también cambios en las técnicas de cálculo. Si el problema es inferencial se calcula un intervalo de confianza.

Definiciones

Definición 1: La mediana es el valor de la variable estadística que divide en dos subconjuntos de igual cardinal al conjunto de datos de la población supuestos ordenados por valor creciente del carácter.

Definición 2: La mediana de una distribución de frecuencias de una variable estadística (F(x)) es el valor M solución del sistema de ecuaciones, $F(M) \leq ½$, $F(M) \geq ½$.

Definición 3: La mediana de una variable estadística es el valor de la variable tal que la ordenada correspondiente a dicho valor en el diagrama acumulativo de frecuencias absolutas es igual a n/2, siendo n el número de datos.

Definición 4: La mediana de una variable estadística es el valor de la variable tal que la ordenada correspondiente a dicho valor en el diagrama acumulativo de frecuencias relativas es igual a 0.5.

Definición 5:La mediana de una variable estadística es el percentil del 50%. (el segundo cuartil; el 5º decil)

Propiedades y relaciones con otros conceptos

Propiedades estadísticas:

E1: La mediana es una medida de tendencia central, aunque puede que no coincida con el punto medio del recorrido. Se puede adoptar como valor típico o representativo de un conjunto de datos, tanto si la variable es cuantitativa medida en escala de razón, de intervalo u ordinal. (Ser representativo quiere decir que el valor M está próximo a la mayor parte de los datos)

E2: La media ponderada de las desviaciones absolutas de los valores x_i de la variable estadística respecto a un valor *a* es mínima si *a* = M.

E3: La mediana M no queda afectada por cambios en los valores menores que M (respec. mayores) si esos cambios hacen que dichos valores sigan siendo menores (respec. mayores) que M (no se ve afectada por valores atípicos).

E4: En una distribución simétrica la mediana coincide con la media y la moda.

E5: Si la distribución es asimétrica a la derecha el orden en que aparecen los tres estadísticos de posición central es moda-mediana-media. Si la asimetría es la izquierda el orden es media-mediana-moda (para distribuciones unimodales)

E6: Si los datos son ordinales la mediana existe, mientras que la media no tiene sentido.

E7: Si la distribución es asimétrica la mediana es una medida de centralización preferible a la media.

E8: la mediana es un dato (información contextualizada) y por tanto tiene las dimensiones de la variable estadística correspondiente (kg, m. etc.)

Propiedades numéricas:

N1: La mediana está comprendida entre el mínimo y el máximo valor de la variable estadística.

N2: La mediana puede no coincidir con ninguno de los valores de los datos (en el caso de indeterminación, número par de valores en distribuciones discretas, o cuando se interpola dentro de un intervalo de clase en variables continuas)

N3: La mediana es invariante si se disminuye una observación inferior a ella o si se aumenta una superior.

Propiedades algebraicas:

A1: No es una operación interna en el conjunto numérico empleado

A2: Conserva los cambios de origen y de escala

A3: No tiene elemento neutro ni elemento simétrico

A4: No tiene la propiedad asociativa

Argumentos

Son las argumentaciones que establecen la validez de las proposiciones enunciadas y la equivalencia de las diversas definiciones.

ANEXO 3

TRANSCRIPCIÓN DE UN SEGMENTO DE CLASE SOBRE CÁLCULO DE DERIVADAS EN BACHILLERATO

Curso: 3º de BUP (1er curso de Bachillerato). Una clase de 35 estudiantes. Pupitres individuales, dispuestos de manera contigua dos a dos, mirando a la pizarra.

La grabación comienza con la siguiente ecuación escrita en la pizarra. $e(t) = 3t^2 - t + 1$, *t = 1 seg.*
Se trata de la corrección de ejercicios propuestos el día anterior. El ejercicio pide calcular la velocidad de un móvil en t = 1 segundo, conocida la relación entre el espacio y el tiempo que viene dada por la función polinómica escrita.

Profesor:
1. De acuerdo, entonces derivamos la función espacio y vamos a hallar la función velocidad
2. e'(t) =6t-1, en el instante 1 seg., sustituimos la t por 1 y sale 5, que serán metros por segundo, la velocidad.
3. e'(1) =6.1-1=5
4. ¿De acuerdo?

[1.10] (1 minuto y 10 segundos, tiempo desde el comienzo de la clase)
5. **Alumno**: Pero, D. José, ¿al derivar la ecuación qué es lo que hemos hecho?
6. Hemos aplicado la regla que hemos visto estos días.
7. La derivada de una suma es la suma de las derivadas de cada uno de los sumandos
8. El primer sumando es una constante por la derivada de una potencial,
9. $(3t^2)' = 3.\ 2.t^{2-1} = 6t$

[Va indicando en la pizarra el desarrollo de los cálculos]
10. La constante permanece, la derivada de t cuadrado 2, por t elevado a dos menos uno, la constante permanece, tres por dos seis, igual a 6t.
11. Eso seria el primer miembro.
12. El segundo, la derivada de t 1, la derivada de una constante sumatoria 0.

[2. 01]
13. Vas aplicando las reglas que hemos deducido estos días.
14. Luego me decías que había otro ejercicio que habéis tenido dificultad, que era,

[Toma una hoja de una mesa]
15. Este, uno de ellos,
16. $y = (x^2 + 1).\sqrt{x}$
17. A ver, ¿cómo lo haríais?
18. ¿Quién va a tener dificultad en este?
19. A ver, *[refiriéndose a una alumna]*, ¿cómo lo harías?

20. **Alumna**: Derivamos equis cuadrado mas 1 y después derivamos la raíz cuadrada de x, uno partido por dos raíz de equis.
21. Una de las reglas que vimos el viernes era,
22. La derivada de un producto de dos funciones, ¿qué se aplica?,

[Varios alumnos responden apoyados en lo que va diciendo el profesor mientras va escribiendo en la pizarra]

23. La derivada de la primera, por la segunda sin derivar, más la primera por la derivada de la segunda.
24. (f.g)' = f'.g + f.g'
25. Vamos a llamar a (x^2+1) , f(x), y a raíz de x, g(x),
26. y tenemos el producto de dos funciones.

[4.09]

27. Hemos llamado $f(x) = x^2+1$, y $g(x) = \sqrt{x}$, pues calcular f'(x) y g'(x)
28. Y luego aplicáis

(Señala la formula de la derivada del producto)

29. Si no lo habéis hecho, hacedlo.
30. Parece que nadie lo ha hecho.
31. ¿Cómo se deriva x^2+1, y cómo se deriva $\sqrt{x}$?
32. Si no lo habéis estudiado este fin de semana, pues coger los apuntes si los tenéis, o el libro.
33. Despabilar con las derivadas, que ya veis que es fundamental que las hagáis.

[5.37]

33bis. *[Deja un tiempo para que los alumnos traten de resolver el ejercicio]*

34. La derivada de $f(x)= x^2-1$, $f'(x) = 2x$, la constante sumatoria 0.
35. La derivada de $g(x) = \sqrt{x}$ $\quad g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
36. Si no os acordáis lo ponéis de la forma x elevado a un medio, y es la función potencial.
37. Según este resultado, y' ¿a quien seria igual?.
38. La derivada del primero por el segundo sin derivar más el primero (x^2+1) por la derivada del segundo:
39. $y' = (2x)\sqrt{x} + (x^2+1)\dfrac{2}{2\sqrt{x}}$

[6.21]

40. Ahora mismo lo vamos a dejar así, ya veremos el problema de simplificar.
41. Ahora vamos a aprender a derivar y luego veremos el tema de simplificar las derivadas.

[6.30]

42. ¿Y el siguiente qué? ¿ No os ha salido?
43. *(Se acerca a un alumno y ve en el libro el ejercicio en el que han tenido dificultad.)*
44. Intentarlo ahora aplicando esto.
45. ¿Alguna duda más de los ejercicios del viernes?. No, ¿todo el mundo?, ¿seguro?

[7.03]

46. Pues vamos a seguir entonces deduciendo reglas para hallar de una forma más sencilla la derivada, sin tener siempre que aplicar el limite.

47. Vamos a tomar las funciones trigonométricas, vamos a ver qué pasa con el seno de x y el coseno de x.
48. Empezamos con el seno de x.
49. y=sen x
50. ¿Si queremos calcular la derivada de esta función, qué haríamos?

(Deja unos segundos, esperando que respondan)

51. No os cortéis, ¡vamos decirlo!.
52. Aplicamos la definición.
53. ¿Cuál es la definición de derivada? ¿Cuál?

(Algunos alumnos van recitando al mismo tiempo que el profesor. Va leyendo la fórmula, mientras la escribe en la pizarra)

54. $y' = \lim \dfrac{sen(x+h) - senx}{h}$

    h →0

55. Esa es la definición. Y nos saldrá, seno de x menos seno de x, cero, partido por cero, una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$.
56. Vamos a resolverla.
57. ¿Cómo podríamos resolver esa indeterminación?
58. ¿A quién se le ocurre algo?
59. Habrá que hacer alguna transformación que ponga eso de otra forma. ¿Esto qué es?

(Deja unos instantes; señala el seno de la suma del numerador; una alumna dice algo inaudible).

[8.57]

60. El seno de la suma de dos ángulos, ¿cómo era?
61. El seno de x+h, a qué seria igual.

(Espera a que los alumnos digan algo. Los alumnos no responden)

62. Ya se os ha olvidado la trigonometría. Ya se han acabado los exámenes y ya se os ha olvidado todo.

(Algunos murmullos)

63. Seno coseno, más seno coseno, ¿os acordáis?

(Escribe la formula en la pizarra)

64. $= \lim \dfrac{senx.\cosh + senh\cos x - senx}{h}$

    h → 0

65. Vamos a sacar factor común el senx,

(Escribe la nueva expresión, marcando con arcos el seno x que hay que sacar factor común)

66. $= \lim \dfrac{senx(\cosh - 1) + senh\cos x}{h}$

    h → 0

67. Aquí han quedado dos sumando.
68. Podemos calcular el limite de una suma como la suma de los límites.
69. Si miráis, porque estoy seguro que tampoco os vais a acordar, la tabla de infinitésimos equivalentes (señala en la pizarra a cosh – 1), que tenéis en vuestro libro, en la lección inmediatamente anterior

(Va a hojear el libro).

70. En la página 156, el coseno de un ángulo menos 1, cuando el ángulo tiende a cero. ¿a qué es igual?.
    1- cos x es equivalente a $x^2/2$, entonces
71. cosh-1 es equivalente a $-\frac{h^2}{2}$
72. ¿De acuerdo?

(Escribe en la pizarra)

73. $$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{senx(-\frac{h^2}{2})}{h} + \frac{senh \cos x}{h} \right] = \cos x$$

74. Hemos logrado descomponer en dos sumando.
75. En este primer sumando podemos suprimir una h en el numerador y en el denominador.
76. Cuando h tiende a 0, 0 por lo que sea, 0.
77. Y este segundo sumando, ¿a qué tiende senh/h cuando h tiene a 0?.
78. Eso ya lo vimos, haciendo los tres triángulos, ¿os acordáis?
79. Eso tendía a 1.
80. ¿Qué va a quedar al final? Coseno de x.
81. O sea, que al final y' = cos x.
82. Cuando la función es seno, su derivada es el coseno.

(Recuadra en la pizarra, la función y = sen x, y la derivada, y' = cos x

[13.09]