UNR Universidad Nacional de Rosario

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Asignatura: Cálculo III (LM-PM) - 2018

Docentes: Pablo Torres, Ana Laura Alet, Brian Luporini.

Práctica 5: Integrales de superficie.

1. Calcular el área de la porción del plano $3x-2y+z=9$ cortada por la superficie cilíndrica $x^2+y^2=9$.

2. Calcular el área de la parte del paraboloide hiperbólico $z=y^2-x^2$ que está entre los cilindros $x^2+y^2=1$ y $x^2+y^2=4$.

3. Sea S una esfera de radio R centrada en el origen. Razonar (cuestiones de simetría más que cálculos) para mostrar que $\int_S x^2 dS = \int_S y^2 dS = \int_S z^2 dS$. Usar este hecho para calcular $\int_S x^2 dS$, con muy pocos cálculos.

4. Si S es la superficie esférica de centro 0 y radio a, calcular $\iint_S (x^2+y^2-2z^2)dS$.

5. Calcular el área de la porción de esfera $x^2+y^2+z^2=4$ interior al cilindro $x^2+y^2=2y$. (La bóveda de Viviani, quien fué discípulo de Galileo).

6. a) Determinar la masa de la superficie cilíndrica homogénea cuya directriz en el plano x,y es $r=\theta$, con $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$, siendo sus generatrices paralelas al eje z. La superficie está limitada inferiormente por el plano $z=0$ y superiormente por el cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$ (Sugerencia: parametrizar S mediante una representación $r=r(\theta,z)$).

   b) Hallar el centro de masa de una semiesfera con densidad superficial de masa constante.

7. Sea S el hemisferio superior de la esfera $x^2+y^2+z^2=1$ y sea $F(x,y,z)=(x,y,0)$. Calcular el flujo de F a través de S usando:

   a) la parametrización $r(u,v)=(\cos v\sin u, \sin u\sin v, \cos u)$ con $0\leq v\leq 2\pi$; $0\leq u\leq\frac{\pi}{2}$

   b) la representación explícita de $S: z=f(x,y)$

8. Calcular el rotor y la divergencia de cada uno de los siguientes campos vectoriales:

   a) $G(x,y,z)=(z+y, x+z, x+y)$

   b) $F(x,y,z)=(x^2+yz, y^2+xz, z^2+xy)$

   c) $H(x,y,z)=(e^{xy}, \cos xy, \cos xz^2)$

9. Verificar que el campo $F(x,y,z)=\frac{r}{\|r\|^3}$, siendo $r=(x,y,z)$, tiene divergencia nula en $\mathbb{R}^3-\{(0,0,0)\}$ y que $\mathrm{rot}(F)=\bar{0}$.

10. Verificar el Teorema de la Divergencia en los casos siguientes:

    a) $F(x,y,z)=(x^2,y^2,z^2)$; S superficie lateral del cubo unitario $[0,1]^3$.

b) $F(x,y,z) = (2xy+z, y^2, -x-3y)$; S frontera de la región limitada por los planos coordenados y el plano $2x+2y+z-6=0$.

11. Usar el Teorema de la Divergencia para calcular el flujo de F a través de S :

    a) $F(x,y,z) = (xy^2, yz, zx^2)$ y S es la superficie del sólido que está entre los cilindros $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$ y los planos $z=1$, $z=3$.

    b) $F(x,y,z) = (z^2x, \frac{1}{3}y^3+\tan z, x^2z+y^2)$ y S es la mitad superior de la esfera $x^2+y^2+z^2=1$. Sug.: Si bien S no es cerrada, agregarle "la tapa inferior" para cerrarla y después descontar el flujo a través de esa tapa.

12. Sea $r=(x,y,z)$. Si S es una superficie cerrada, V el volumen del sólido limitado por S y n la normal exterior a S, demostrar que $V = \frac{1}{3}\iint\limits_S (r\cdot n)dS$.

13. Demostrar: a) El gradiente de una función armónica tiene divergencia nula. b) Todo campo de gradiente es irrotacional. c) Todo campo de rotores es solenoidal. d) $\iint\limits_S (rot\,(F)\cdot n)dS = 0$ para toda superficie S cerrada.

14. En los siguientes casos calcular el flujo del rotor del campo a través de S por medio de integrales curvilíneas:

    a) $F\,(x,y,z) = (xyz, x, \exp(xy)\cos z)$ y S el hemisferio $x^2+y^2+z^2=1$, $z\geq 0$.

    b) $F\,(x,y,z) = (y-z, yz, -xz)$; S consta de las cinco caras del cubo $[0,2]^3$ que no están en el plano $z=0$.

15. Sea $n=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ la normal exterior a una superficie cerrada S que limita a V (sólido de densidad constante). Si se conocen el volumen y las coordenadas del baricentro de V expresar, en términos de esas cantidades:

    a) $\iint\limits_S (xz\cos\alpha + 2yz\cos\beta + 3z^2\cos\gamma)dS$

    b) $\iint\limits_S (y^2\cos\alpha + 2yz\cos\beta - 2xz\cos\gamma)dS$