FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Asignatura: Cálculo III (LM-PM) - 2018

Docentes: Pablo Torres, Ana Laura Alet, Brian Luporini.

Práctica 4: Integrales curvilíneas.

1. Calcule la longitud de las siguientes curvas: a) C es el arco de parábola $y = x^2$ que va desde el punto $(-1, 1)$ hasta el punto $(1, 1)$.
   b) C es la curva intersección de las superficies $\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y) \end{cases}$

2. Calcular $\int_C f ds$ para los siguientes campos escalares y las curvas:

   a) $f(x, y) = x^2 + y^2$ y $C : \bar{\alpha}(t) = (\cos t + t \sin t, \sin t - t \cos t)$ en $[0, 2\pi]$.

   b) $f(x, y) = 2x + y$ y C el arco de circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ desde el punto $(3, 4)$ al punto $(4, 3)$.

   c) $f(x, y) = x^2 + y^2$ y C es una circunferencia de radio a centrada en el origen.

3. Consideramos un alambre semicircular uniforme (densidad constante) de radio a. a) Pruebe que el centro de gravedad está situado en el eje de simetría a distancia $\dfrac{2a}{\pi}$ del centro. b) Demuestre que el momento de inercia respecto del diámetro es $\dfrac{Ma^2}{2}$, siendo M la masa del alambre.

4. Halle la masa y el centro de gravedad del alambre helicoidal descripto por $\bar{\alpha}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ en $[0, 2\pi]$ y cuya densidad es $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

5. Halle la integral de línea de los siguientes campos vectoriales a lo largo de las curvas indicadas:

   a) $\bar{f}(x, y) = (\exp(x - 1), xy)$, $C = \{\bar{\alpha}(t) = (t^2, t^3) : 0 \leq t \leq 1\}$.

   b) $\bar{f}(x, y) = (x + y, x - y)$ a lo largo de la elipse $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ en sentido antihorario.

   c) $\bar{f}(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ a lo largo de la intersección del paraboloide $z = x^2 + y^2$ con el plano $z = 4$.

   d) $\bar{f}(x, y, z) = (z^2, -z, 2y)$ a lo largo de la curva poligonal que une los puntos $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 2, 3)$ y $(1, 2, 4)$.

   e) $\bar{f}(x, y, z) = (x^4 \exp(y), \ln(z), \sqrt{y^2 + z^2})$ a lo largo del segmento que va de $(1, 2, 1)$ a $(6, 4, 5)$.

6. Calcular el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\bar{f}(x, y, z) = (3x^2 - 6yz, 2y + 3xz, 1 - 4xyz)$ a lo largo de las curvas: a) C : segmento que va de $(0, 0, 0)$ a $(1, 1, 1)$. b) C : la poligonal que une los puntos $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ y $(1, 1, 1)$.

7. El trabajo del campo $\bar{f}(x, y) = (3y^2 + 2, 16x)$ al mover una partícula desde $(-1, 0)$ hacia $(1, 0)$ a lo largo de la mitad superior de la elipse $x^2 + \dfrac{y^2}{b} = 1$ depende de b. Hallar b tal que el trabajo sea mínimo.

8. Un campo bidimensional de fuerzas $\bar{f}$ es tal que en cada punto (x, y) de $\mathbb{R}^2$ el vector $\bar{f}$ es tangente a la circunferencia con centro en el origen que pasa por (x, y) y su sentido es el de las agujas del reloj. Determinar si la integral a lo largo de C es positiva o negativa cuando: a) C es el segmento de recta vertical que va de $(-3, -3)$ a $(-3, 3)$; b) C es el segmento de recta vertical que va de $(3, -3)$ a $(3, 3)$.

9. Verificar que los siguientes campos no son campos de gradientes en ningún abierto de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$:

$$\text{a)}\bar{f}(x, y) = (x + y, y - x); \qquad \text{b)}\bar{f}(x, y, z) = (x + y, x - 1, 5x + z^2)$$

10. En cada uno de los siguientes casos verificar que existe un potencial para el campo dado y hallarlo:

   a) $\bar{f}(x, y) = (2xy^3 - y^2 \cos x, 1 + 3x^2y^2 - 2y \sin x)$
   b) $\bar{f}(x, y, z) = (2xz + \sin y, x \cos y, x^2)$
   c) $\bar{f}(x, y, z) = (x + z, -y - z, x - y)$
   d) $\bar{f}(x, y, z) = (-xr^{-3}, -yr^{-3}, -zr^{-3})$, siendo $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

11. Verificar el teorema de Green para el disco D con centro en $(0, 0)$ y radio a y los campos escalares: a) $P(x, y) = xy^2$, $Q(x, y) = -yx^2$; b) $P(x, y) = x + y$, $Q(x, y) = y$.

12. Si A es el área de una región D simplemente conexa de $\mathbb{R}^2$ y Γ es su frontera, mostrar que

$$A = \oint_\Gamma xdy = \oint_\Gamma -ydx. \Leftrightarrow \oint_\Gamma -ydx + xdy = 2A$$

13. Evalúe $\oint_\Gamma ydx - xdy$, donde Γ es el cuadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

14. Calcule el área de la región limitada por la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

15. Calcule $\int_C (e^x + \cos x + 2y)\, dx + \left(2x - \dfrac{y^2}{3}\right) dy$ siendo:

   a) C : la elipse de centro $(2, 3)$ y semiejes 2 y 7.
   b) C : el arco de circunferencia de centro $(0, 4)$ y radio 1, que va del punto $(0, 3)$ al punto $(0, 5)$.

16. Una partícula comienza en el punto $(-2, 0)$, se mueve a lo largo del eje x hasta $(2, 0)$, y después por la semicircunferencia $y = \sqrt{4 - x^2}$ hasta el punto inicial. Usar el Teorema de Green para determinar el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\bar{f}(x, y) = (x, x^3 + 3xy^2)$ sobre dicha partícula.

17. Dado el campo vectorial $\bar{f}(x, y) = r^{-2}(-y, x)$, siendo $r^2 = x^2 + y^2$, mostrar que:

   a) $\oint_C \bar{f} \cdot d\bar{\alpha} = 0$ para toda curva C cerrada simple que no contiene al origen en su interior.
   b) $\oint_C \bar{f} \cdot d\bar{\alpha} = 2\pi$ para toda curva C cerrada simple que contiene al origen en su interior.