Asignatura: Cálculo III (LM-PM) - 2018

Docentes: Pablo Torres, Ana Laura Alet, Brian Luporini.

Práctica 3: Integrales múltiples.

---

1. Calcule: a) $\int_0^1 \int_y^1 \left(x^2+3y^2\right) dxdy$, b) $\int_0^1 \int_0^{2x} \sqrt{1-x^2}dydx$, c) $\int_0^\pi \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \frac{2}{\sqrt{4-y^2}}dxdy$

2. Supuesta la existencia de las integrales, calcularlas por integración iteradas.

   a) $\int\int_R xy(x+y)dxdy$ donde $R=[0,1]\times[0,1]$
   b) $\int\int_R (\sqrt{y}+x-3xy^2)dxdy$ donde $R=[0,1]\times[1,3]$
   c) $\int\int_R y^{-3}e^{tx/y}dxdy$, donde $R=[0,t]\times[1,t]$, $t>0$

3. En cada caso sea f un campo escalar definido en el rectángulo R. Realice un gráfico del recinto de ordenadas de f sobre R y calcule su volumen por medio de una integral doble. (Supóngase que la integral existe)

   a) $R=[0,2]\times[0,1]$ $f(x,y)=1+2x+2y$
   b) $R=[0,2]\times[0,2]$ $f(x,y)=4-x^2$
   c) $R=[0,1]\times[0,1]$
   $$f(x,y)=\begin{cases} 1-x-y & si \quad x+y\le 1 \\ 0 & si \quad x+y>1 \end{cases}$$
   d) $R=[-1,1]\times[-1,1]$ tal que
   $$f(x,y)=\begin{cases} x^2+y^2 & si \quad x^2+y^2\le 1 \\ 0 & si \quad x^2+y^2>1 \end{cases}$$

4. Esbozar la región de integración, intercambiar el orden de integración y evaluar las siguientes integrales: a) $\int_0^1 \int_{1-y}^1 (x+y^2)dxdy$ b) $\int_0^1 \int_y^1 (e^{-x^2})dxdy$

5. Sea D la región acotada por la curva de ecuación $y=\sqrt{x}$ y la recta de ecuación $y=x$. Sea $f(x,y)=\frac{\sin y}{y}$ si $y\neq 0$ y $f(x,0)=1$. Calcule $\iint\limits_D f(x,y)dA$.

6. Sea $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -\varphi(x)\le y\le\varphi(x), a\le x\le b\right\}$, donde φ es una función continua y no negativa en $[a,b]$. Dado el campo escalar f continuo en D y tal que $f(x,-y)=-f(x,y)$ para todo $(x,y)\in D$. Mostrar que $\iint\limits_D f(x,y)=0$. Presente otras situaciones similares.

7. Calcular los volúmenes de los cuerpos limitados por las superficies

   a) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, $x=0$, $y=0$ y $z=0$.
   b) $z=0$, $x+y+z=3$ y $x^2+y^2=1$.
   c) $z=4-x^2$, $y=x$, $y=0$ y $z=0$.

8. Calcule el volumen de un cono circular recto de radio r y altura h.

9. Sea f un campo escalar continuo en $R = [a,b] \times [c,d]$, para $a < x < b$ y $c < y < d$ se define $G(x,y) = \int_a^x \int_c^y f(u,v)dvdu$. Mostrar que $D_{12}G(x,y) = D_{21}G(x,y) = f(x,y)$.

10. Calcule las siguientes integrales

    a) $\iiint\limits_E (1+x+y+z)^{-3}dxdydz$ donde E está limitado por los planos coordenados y el plano de ecuación $x+y+z=1$.

    b) $\iiint\limits_E x^2yz^3dV$ donde E está limitado por los planos $y=0$ y $z=0$ y las superficies de ecuaciones $y^2 = x - x^2$ y $z^2 = 4x$.

    c) $\iiint\limits_E (yz+3y)dV$ donde E está limitado por los planos $x+y=3$ y $x=0$ y la superficie de ecuación $z^2+y^2=9$.

11. Sea D la región del plano acotada por las rectas $x-2y=0,\ x-2y=-4,\ x+y=4,\ x+y=1$. Calcule $\iint\limits_D 3xydA$.

12. Sea D la región del plano acotada por las curvas $y = x^2+4,\ y = x^2,\ y+x^2=6,\ y+x^2=12$ en el semiplano $x \geq 0$ Calcule $\iint\limits_D xydA$.

13. Combinar la suma de las integrales en una única integral iterada y evaluar

$$\int_0^{8/\sqrt{13}} \int_0^{3x/2} xy\ dydx + \int_{8/\sqrt{13}}^{4} \int_0^{\sqrt{16-x^2}} xy\ dydx$$

14. Transforme a coordenadas polares y calcule: a) $\int_0^1 \int_{x^2}^{x} \sqrt{x^2+y^2}dydx$ b) $\int_0^{2a} \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} \left(x^2+y^2\right)dydx$

15. Transformar cada una de las integrales dadas en una o más integrales iteradas en coordenadas polares: a) $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{3}x} f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dydx$ b) $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dxdy$

16. Considerar la aplicación $T(u,v)$ definida por las ecuaciones $x = u+v$ y $y = v - v^2$

    a) Calcule el Jacobiano de T, $|J_T(u,v)|$.

    b) Un triángulo R en el plano uv tiene vértices $(0,0)$, $(2,0)$ y $(0,2)$. Represente la imagen $S = T(R)$ en el plano xy.

    c) Calcule el área de S mediante una integral doble extendida a S y también mediante integral doble extendida a R.

    d) Calcule $\iint\limits_S (x-y+1)^{-2}dA$.

17. Sea $R = \left\{(x,y) : x^2+y^2 \leq a^2\right\}$. Calcule la integral doble

$$I(p,a) = \iint\limits_R \frac{dA}{(p^2+x^2+y^2)^p}$$

Determine los valores de p para los que existe $\lim\limits_{a\to+\infty} I(p,a)$.

18. Mediante un conveniente cambio de variables, demuestre la siguiente igualdad

$$\iint\limits_{S} f(xy)dA = \ln 2 \int\limits_{1}^{2} f(u)du$$

siendo S la región (del 1° cuadrante) limitada por las curvas $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, y $y = 4x$.

19. Calcule las siguientes integrales triples

   a) $\iiint\limits_{S} \left(x^2 + y^2\right) dV$ donde S es el sólido limitado por las superficies de ecuaciones $x^2 + y^2 = 2z$ y $z + x^2 + y^2 = 6$.

   b) $\iiint\limits_{S} \sqrt{x^2 + z^2} dV$ donde S es el sólido limitado por las superficies de ecuaciones $x^2 + z^2 = 1$ y $y = x$ (en el 1° octante).

20. Exprese las siguientes integrales en coordenadas cilíndricas o esféricas, según considere conveniente y evalúelas: a) $\int\limits_{0}^{1} \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int\limits_{0}^{3} xdzdydx$ b) $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int\limits_{-\sqrt{2-z^2}}^{\sqrt{2-z^2}} \int\limits_{0}^{1+y^2+z^2} z^3 dxdydz$

   c) $\int\limits_{-2}^{2} \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int\limits_{0}^{\sqrt{x^2+y^2}} x^2 dzdxdy$

21. Calcule el volumen de:

   a) El sólido limitado superiormente por el paraboloide de ecuación $x^2 + y^2 = 4z$ e inferiormente por la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 5$.

   b) El sólido interior a $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y a $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$.

   c) El sólido acotado por las gráficas de la esfera $r^2 + z^2 = a^2$ y el cilindro $r = a\cos\theta$.

   d) El sólido interior a los cilindros $x^2 + y^2 = 4$ y $y^2 + z^2 = 4$.

22. Encuentre el centro de masa de una placa triangular delgada limitada por el eje y y las rectas $y = x$, $y = 2 - x$, si la densidad es $\delta(x, y) = 6x + 3y + 3$.

23. El tallo de una seta es un cilindro recto de revolución de diámetro 1 y longitud 8, y su cabeza es un hemisferio de radio R. Si la seta es un sólido homogéneo con simetría axial y su centro de gravedad esta situado en el plano en el que el tallo se une a la cabeza, calcule R.

24. Calcule el momento de inercia de un cilindro de radio a y masa M si su densidad en cada punto es proporcional a la distancia de dicho punto al eje de simetría del cilindro.

25. Sea $f(x) = \int_1^x e^{t^2} dt$ halle el valor medio de la función f en el intervalo $[0, 1]$.