UNR Universidad Nacional de Rosario

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Asignatura: Cálculo III (LM-PM) - 2018

Docentes: Pablo Torres, Ana Laura Alet, Brian Luporini.

Práctica 2: Aplicaciones del cálculo diferencial para funciones de varias variables.

1. Hallar la fórmula de Taylor de segundo orden para los siguientes campos escalares en los puntos indicados:

   a) $f(x,y) = e^x \sin y$ alrededor de $(0,0)$ y de $(0,\pi/2)$.

   b) $f(x,y) = \; 3x^3 + 2x^2 + y^2 + 2x - 2y$ alrededor de $(1,2)$ y alrededor de $(-1,2)$.

   c) $f(x,y,z) = x^2 - 3xz + z^2 - 4xy + x^4y^2$ alrededor de $(0,0,0)$.

   d) $f(x,y,z) = xyz^2$ alrededor de $(0,1,2)$.

2. Sea $f(x,y,z) = \dfrac{x}{\sqrt{y+\sqrt[3]{z}}}$. Usando el hecho señalado varias veces: $f(a+h) \cong f(a) + \nabla f(a) \times h$.

   a) Si $a = (2,3,1)$, calcular aproximadamente $A = \dfrac{1{,}97}{\sqrt{3{,}03 + \sqrt[3]{0{,}98}}}$, el valor exacto de A es 0. 982 15 . . .

   b) Si $a = (1,15,1)$, calcular aproximadamente $A = \dfrac{0{,}96}{\sqrt{15{,}05 + \sqrt[3]{0{,}98}}}$, el valor exacto de A es 0,2396759943 . . .

3. Sean f y g dos campos escalares definidos en el abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ tales que tienen un máximo local en el punto $p \in U$. Mostrar que la función suma $f+g$ tiene un máximo local en p. ¿Se puede concluir lo mismo para la función producto fg?

4. Mostrar que la función $f(x,y) = |x| + |y|$ tiene un mínimo local en $(0,0)$. Observar que f no es diferenciable en $(0,0)$. Hacer un esquema mostrando las curvas de nivel cerca de ese punto.

5. Mostrar que las siguientes funciones no poseen extremos locales o relativos:

   a) $f(x,y) = x^3 + 3x + y^3 + y$ b) $f(x,y,z) = x^5 + y^5 + z^3 + 4x + 2y + 9z + 2$

   c) $f(x,y,z) = \arctan(x + 2y + 3z)$ d) $f(x_1,\dots,x_n) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b$, con al menos un $a_j \neq 0$

6. Demostrar:

   a) La función de dos variables $f(x,y) = ax^2 + by^2$, donde $a,b \in \mathbb{R}$ tales que $ab < 0$, tiene un punto de ensilladura en el origen.
   Sugerencia: Mostrar que en cualquier entorno del origen hay puntos donde f es positiva y otros donde es negativa.

   b) Generalización. La función de n variables $f(x_1,\dots,x_n) = a_1x_1^2 + \cdots + a_nx_n^2$, donde los a_j son no nulos y no todos del mismo signo, tiene un punto de ensilladura en el origen.

7. Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ derivable con derivada positiva. Demostrar que la función $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x,y) = f(1 + x^2 + y^2)$ tiene un mínimo local en el origen. Más generalmente, $G(x_1,\dots,x_n) = f(1 + x_1^2 + \cdots + x_n^2)$ tiene un mínimo local en el origen de $\mathbb{R}^n$.

8. Identificar y clasificar los puntos estacionarios (críticos) de las siguientes funciones:
   a) $f(x,y) = x^2 - (y-1)^2$; b) $f(x,y) = x^3 + y^3$;
   c) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$; d) $f(x,y) = 2x^2 - xy - 3y^2 - 3x + 7y$;
   e) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 3z^2 - 1$; f) $f(x,y) = (8x^2 - 6xy + 3y^2)\exp(2x+3y)$;
   g) $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + xz + 2yz + x + 2y + z$;
   h) $f(x,y,z) = x^3 + 3x^2 - 2y^2 + 4y - 2z^2 + 6z$.

   (Pequeña ayuda para g) el punto estacionario es $(0,-1/2,0)$ y los puntos estacionarios de h) son $(0,1,3/2)$ y $(-2,1,3/2)$).

9. Sea $f(x,y) = 6x^4 - 5x^2y + y^2$. Mostrar que en $(0,0)$ no hay extremo local.

   (Sugerencia: Ver que $f(x,y) = (y-2x^2)(y-3x^2)$ y estudiar el signo de f en un entorno cualquiera del origen.)

10. Mostrar que la función $f(x,y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}$ tiene exactamente un punto estacionario, en el cual f tiene un máximo local. Sin embargo f no tiene máximo en $\mathbb{R}^2$. Es posible esto para funciones derivables de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$?

11. Se considera el polinomio $p(x,y) = 3x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 2y$. a) Mostrar que no tiene máximo en $\mathbb{R}^2$. b) Hallar el punto (x_0, y_0) donde p, tiene un mínimo local. c) Mostrar que $p(x_0,y_0)$ es el mínimo valor del polinomio p en $\mathbb{R}^2$. (Sugerencia para c): Desarrollar p, alrededor de (x_0,y_0) en potencias de $(x-x_0)$ e $(y-y_0)$.

12. Sea $f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey$, donde a,b,c,d,e son constantes, $a > 0$ y $ac - b^2 > 0$. Demostrar que existe un punto (α,β) en el cual f toma su mínimo valor en $\mathbb{R}^2$.

13. Verificar que las siguientes ecuaciones definen a y como función de x alrededor de los puntos indicados y calcular las dos primeras derivadas en esos puntos:

    a) $x^3 - xy - xy^2 - y^3 - 1 = 0$ en $x = 0$
    b) $\sin x + \cos y + 2y - \pi = 0$ en $x = 0$

14. Hallar los extremos locales de la función $y = f(x)$ definida implícitamente por la ecuación

    $$x^2 + xy + y^2 - 27 = 0$$

    En este ejemplo todavía es posible explicitar y en términos de x, pero es aconsejable ignorar esa posibilidad.

15. La ecuación $z + x + (y+z)^4 = 0$ define implícitamente la función $z = f(x,y)$. Calcular $\triangle f$.

16. Encuentre el volumen de la máxima caja rectangular con aristas paralelas a los ejes que se puede inscribir en el elipsoide de ecuación $9x^2 + 36y^2 + 4z^2 = 36$.

17. Una caja de cartón sin tapa debe contener un volumen de 32000cm^3. Encuentre las dimensiones de la caja que minimizan la cantidad de cartón empleada.

18. Calcular el volumen de la caja rectangular más grande que esté en el primer octante con tres de sus caras en los planos coordenados y un vértice en el plano $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, donde a,b,c son números positivos.

19. Hallar el valor máximo y mínimo del producto de tres números reales x,y,z si su suma debe ser 0 y la suma de sus cuadrados debe ser 1.
    Solución: el valor máximo es $\sqrt{6}/18$, cuando dos de los números son $-\sqrt{6}/6$ y el otro es $\sqrt{6}/3$. El valor mínimo es $-\sqrt{6}/18$, cuando dos de los números son $\sqrt{6}/6$ y el otro es $-\sqrt{6}/3$.

20. El cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $x + y + z = 0$ se intersecan en una elipse (cuyo centro es el origen de coordenadas). Hallar los semiejes de la elipse determinando los extremos de la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sujeta a las dos restricciones $x^2 + y^2 = 1$, y $x + y + z = 0$. (Solución: los puntos de la elipse donde se obtiene el máximo de f son $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -2\sqrt{2})$ y $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 2\sqrt{2})$, el cual vale 3. El semieje mayor es $\sqrt{3}$. El mínimo de f ocurre en $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ y $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ y vale 1. El semieje menor es 1).

21. Hallar la distancia del punto $(-2, 3, 2)$ a la recta $x - 1 = -(y + 1) = z + 1$.
Solución: Distancia es $\frac{\sqrt{258}}{3}$, en el punto $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{7}{3})$.

22. Hallar los extremos absolutos de las siguientes funciones en los dominios indicados:

    a) $f(x, y) = xy(1 - x^2 - y^2)$ en el cuadrado $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\right\}$.

    b) $f(x, y) = \dfrac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x + y^2 - 2y + 1$ en el triángulo limitado por las rectas $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$.

    c) $f(x, y) = x^2y^3(1 - x - y)$ en el cuadrado $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$. Solución: el mínimo es $f(-\frac{2}{5}, -\frac{3}{5}) = \frac{-216}{3125}$ y el máximo es $f(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{32}$.

    d) $f(x, y) = \sin x - \cos y$ en el cuadrado $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right\}$.