FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Asignatura: Cálculo III (LM-PM) - 2018

Docentes: Pablo Torres, Ana Laura Alet.

Práctica 1 (extra): Cálculo diferencial para funciones de varias variables.

---

1. *Límite de la composición*

   a) Demostrar el siguiente resultado: *Sean* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ *y* $f : B \subseteq \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^k$*. Si* $P \in \overline{A}$ *es tal que* $\lim\limits_{x \to P} f(x) = L_1 \in B$ *y* $\lim\limits_{y \to P} g(y) = L_2$*, entonces existe el límite de la composición* $\lim\limits_{x \to P} (g \circ f)(x)$ *en* $Dom(g \circ f)$*, y además* $\lim\limits_{x \to P} (g \circ f)(x) = L_2$ *siempre y cuando* $f(x) \neq L_1$ *para* $x \neq P$*.*

   b) Sean $f, g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ con $g(x) = \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ y $g(0) = 0$, y f la función nula. Calcular $\lim\limits_{x \to 0} (g \circ f)(x)$ y comparar con el resultado anterior.

   c) Calcular $\lim\limits_{(x,y,z) \to (0,0,0)} \frac{sen(x^2+y+z)}{x^2+y+z}$ y $\lim\limits_{(x,y,z) \to (3,2,1)} (1 + e^{xy} cos(x^2) ln(z))^{1/(e^{xy} cos(x^2) ln(z))}$.

2. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ un campo vectorial. Demostrar que las siguientes proposiciones son equivalentes:

   a) f es continuo.

   b) Para todo abierto V de $\mathbb{R}^m$, existe un abierto U de $\mathbb{R}^n$ tal que $f^{-1}(V) = A \cap U$.

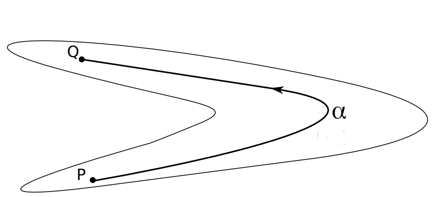
   c) Para todo cerrado W de $\mathbb{R}^m$, existe un cerrado T de $\mathbb{R}^n$ tal que $f^{-1}(W) = A \cap T$.

3. **Definiciones:**

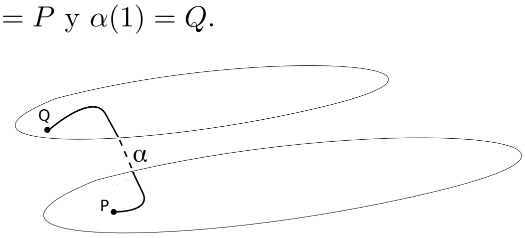
   a) Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es *acotado* si es acotado en norma, i.e. si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $||x|| \leq M$ para todo $x \in A$.

   b) Un conjunto W de $\mathbb{R}^n$ es *compacto* si es cerrado y acotado.

   c) Un conjunto C de $\mathbb{R}^n$ es *arco-conexo* si dados dos puntos cualesquiera P y Q de C, existe una curva continua $\alpha : [0,1] \mapsto C$ tal que $\alpha(0) = P$ y $\alpha(1) = Q$.



Conjunto arco-conexo



Conjunto no arco-conexo

4. Probar que si $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ es continuo y A es arco-conexo entonces $f(A)$ es arco-conexo.

5. Demostrar el *Teorema de Bolzano*: Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ un campo escalar y sean $P, Q \in A$ tales que $f(P) < 0$ y $f(Q) > 0$. Si A es arco-conexo y f es continuo entonces existe $R \in A$ tal que $f(R) = 0$. (Asumir la validez del resultado ya demostrado para funciones reales).

6. Demostrar que existe $P \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{\frac{\pi}{2}} \leq x, y \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}\}$ tal que $ln(x_P^2 + y_P^2 + 1) = cos(x_P \cdot y_P)$.

7. Probar los siguientes corolarios del Teorema de Bolzano. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ un campo escalar continuo con A arco-conexo.

   a) Dados $P, Q \in A$, f asume todos los valores entre $f(P)$ y $f(Q)$.

   b) Sean $P \in A$ y $Q \in \overline{A}$. Si $\lim\limits_{x \to Q} f(x) = L$ y $f(P) < L$ entonces $[f(P), L) \subseteq f(A)$.

8. Sean $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{\frac{\pi}{2}} < x, y < \sqrt{\frac{\pi}{2}}\}$ y $f : A \mapsto \mathbb{R} : f(x, y) = sen(x \cdot y)$. Probar que $(-1, 1) \subseteq f(A)$.

9. *Teorema de Weierstrass*: Sea A un conjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ y f un campo escalar continuo en A. Luego, existen $m, M \in \mathbb{R}$ tales que $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in A$. Más aún, existen dos puntos $P, Q \in A$ tales que $f(P) = \min\{f(x) : x \in A\}$ y $f(Q) = \max\{f(x) : x \in A\}$.

   a) Sea A un conjunto compacto y arco-conexo de $\mathbb{R}^n$ y $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ un campo escalar continuo. Demostrar que $f(A)$ es un intervalo cerrado $[a, b]$. ¿Cuáles son a y b? ¿Ocurre lo mismo si A es compacto pero no arco-conexo?

   b) Para $k \in \mathbb{N}$, sean $A_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -k \leq x, y \leq k\}$. Considerar el siguiente campo escalar:
   $$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$
   Demostrar que para cada $k \in \mathbb{N}$, $f(A_k)$ es acotado. ¿Es acotado $f(\mathbb{R}^n)$?

10. Sea $f(x, y) = \begin{cases} xy \cdot sen\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

    Probar que f es diferenciable en el origen pero ninguna de sus derivadas parciales son continuas en el origen.

11. Sean f y g dos campos escalares diferenciables en un conjunto abierto S. Deducir las siguientes propiedades del gradiente:

    a) $\nabla f = 0$ si f es constante en S.

    b) $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$.

    c) $\nabla(c \cdot f) = c \cdot \nabla f$, si c es una constante.

    d) $\nabla(f \cdot g) = f \cdot \nabla g + g \cdot \nabla f$.

    e) $\nabla \frac{f}{g} = \frac{g \cdot \nabla f - f \cdot \nabla g}{g^2}$, en los puntos en los que $g(x) \neq 0$.