CÁLCULO III

Pablo Torres

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura - Universidad Nacional de Rosario

Parte 4: Integrales curvilíneas

CURVAS

Una trayectoria o camino en $\mathbb{R}^n$ es una función $\alpha : [a,b] \mapsto \mathbb{R}^n$.

- Camino continuo$\rightarrow$ α continua.
- Camino diferenciable$\rightarrow$ α diferenciable.
- Camino regular$\rightarrow$ α es C^1.
- Camino regular a trozos$\rightarrow$ $[a,b]$ puede descomponerse en un número finito de subintervalos en los cuales el camino es regular.

Longitud de arco

Sea $\alpha : [a,b] \mapsto \mathbb{R}^n$ un camino regular. La longitud de α está definida como

$$l(\alpha) = \int_a^b ||\alpha'(t)||dt.$$

Una curva C se dice cerrada si $\alpha(a) = \alpha(b)$ y cerrada simple si además α es inyectiva en $[a,b)$.

Parametrizaciones

Sea α una parametrización de una curva C.

En algunas ocaciones es útil asignar un sentido de recorrido a C, sea éste el que va de $\alpha(a)$ a $\alpha(b)$. Luego, $-C$ es la misma curva recorrida en sentido opuesto.

Sea $h : [c,d] \mapsto [a,b]$ una función inyectiva y C^1, con $h' \neq 0$ en $[c,d]$. sea $\beta = \alpha \circ h$. Luego, β es una reparametrización de C.
En este caso se dice que α y β son equivalentes.
Además, si $h' > 0$ se mantiene el sentido de recorrido de C y si $h' < 0$ se invierte el sentido.

Longitud de arco

Sea $\alpha : [a,b] \mapsto \mathbb{R}^n$ un camino regular. La función parámetro longitud de arco asociada a una curva C de parametrización α es

$$s(t) = \int_a^b ||\alpha'(\tau)||d\tau.$$

Luego, $s'(t) = ||\alpha'(t)||$.

ds: *diferencial longitud de arco*.

$ds = s'(t)dt = ||\alpha'(t)||dt$.

$l(\alpha) = s(b) = \int_a^b ds$.

INTEGRAL RESPECTO A LA LONG. DE ARCO

Sea C una curva de parametrización $\alpha : [a,b] \mapsto \mathbb{R}^n$ regular. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ un campo escalar acotado en A, con $C \subseteq A$.

Si la función compuesta $t \mapsto f(\alpha(t))$ es continua en $[a,b]$, se define la integral (de línea o de trayectoria) de f a lo largo de C respecto a la longitud de arco como

$$\int_{\alpha} f \, ds = \int_a^b f(\alpha(t)) \, ||\alpha'(t)|| dt = \int_a^b f(\alpha(t)) \, s'(t) dt.$$

Si la curva C es cerrada se nota $\oint_C f \, ds$.

Observaciones:

- Si α es C^1 a trozos o $f(\alpha(t))$ es continua a trozos, se define $\int_{\alpha} f \, ds$ *rompiendo* $[a,b]$ en piezas sobre las cuales $f(\alpha(t))||\alpha'(t)||$ sea continua, y sumando las integrales sobre las piezas.
- Si $f = 1$, $\int_{\alpha} f \, ds = \int_{\alpha} ds = l(\alpha)$.

Integral de trayectoria

Proposición

Sea α una parametrización de una curva suave C y f un campo escalar continuo definido en un conjunto que contiene a C. Sea β un reparametrización de C. Luego

$$\int_{\alpha} f\ ds = \int_{\beta} f\ ds.$$

Observaciones:

- Se puede notar $\int_C f\ ds$, cualquiera sea la parametrización de C.
- $\int_C f\ ds = \int_{-C} f\ ds$.

Integral de trayectoria

Proposición

Sean $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ *campos escalares continuos en una curva* C *contenida en* A. *Sean* $c, d \in \mathbb{R}$.*Entonces,*

- *Linealidad respecto al integrando:* $\int\limits_C cf + dg \; ds = c \int\limits_C f \; ds + d \int\limits_C g \; ds$.
- *Aditividad respecto al camino de integración: Si* $C = C_1 \cup C_2$*,* $\int\limits_C f \; ds = \int_{C_1} f \; ds + \int\limits_{C_2} f \; ds$.

ALGUNAS APLICACIONES

- *Masa de un alambre*: Sea C una curva que representa un alambre con densidad de masa $\rho(x,y,z)$. Luego,

  masa del alambre $= m = \int\limits_C \rho(x,y,z)\, ds$.

- *Centro de masa*

  $\bar{x} = \frac{1}{m}\int\limits_C x\rho(x,y,z)\, ds$

  $\bar{y} = \frac{1}{m}\int\limits_C y\rho(x,y,z)\, ds$

  $\bar{z} = \frac{1}{m}\int\limits_C z\rho(x,y,z)\, ds$

  Si la densidad ρ es constante el cuerpo se dice homogéneo o uniforme y el centro de masa se llama centroide.

ALGUNAS APLICACIONES

- *Momento de inercia*: Sea L una recta y C una curva. Para cada $\bar{x} \in C$ sea $d(\bar{x}) = dist(\bar{x}, L)$.

  Momento de inercia respecto a la recta L: $I_L = \int\limits_C d^2(\bar{x})\rho(\bar{x})\, ds$.

  Momentos de inercia respecto a los ejes coordenados:

  $$I_x = \int\limits_C (y^2 + z^2)\rho(x,y,z)\, ds$$

  $$I_y = \int\limits_C (x^2 + z^2)\rho(x,y,z)\, ds$$

  $$I_z = \int\limits_C (x^2 + y^2)\rho(x,y,z)\, ds$$

INTEGRALES DE LÍNEA DE UN CAMPO VECTORIAL

Sea F un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$ continuo sobre la trayectoria regular $\alpha : [a,b] \mapsto \mathbb{R}^n$. Se define la integral de línea de F a lo largo de α, como

$$\int_\alpha F\, d\alpha = \int_a^b F(\alpha(t)).\alpha'(t)dt.$$

Observaciones:

- Como ocurre con los campos escalares, también se puede definir $\int\limits_\alpha F d\alpha$ si $F(\alpha(t)).\alpha'(t)$ es continua a trozos.
- Suponner $\alpha'(t) \neq 0$ en $[a,b]$. si $T(t) = \frac{\alpha'(t)}{||\alpha'(t)||}$ denota al vector tangente unitario, resulta

$$\int_\alpha F\, d\alpha = \int_a^b F(\alpha(t)).\alpha'(t)dt = \int_a^b [F(\alpha(t)).T(t)]\,||\alpha'(t)dt.$$

  Esta fórmula dice que $\int\limits_\alpha F\, d\alpha$ es la integral de trayectoria de la componente tangencial $F(\alpha(t)).T(t)$ de F a lo largo de α respecto a la longitud de arco.

Integrales de línea de un campo vectorial

Teorema

Sea F un campo vectorial continuo en la trayectoria regular $\alpha : [a,b] \mapsto \mathbb{R}^3$ y sea $\beta : [c,d] \mapsto \mathbb{R}^3$ una reparametrización.
Si β preserva la orientación, entonces

$$\int_{\alpha} F \, d\alpha = \int_{\beta} F \, d\beta.$$

Si β invierte la orientación, entonces

$$\int_{\alpha} F \, d\alpha = -\int_{\beta} F \, d\beta.$$

Obs.: De este resultado,

$$\int_{\alpha} F \, d\alpha = \int_{C} F \, d\alpha.$$

$$\int_{-C} F \, d\beta = -\int_{C} F \, d\alpha.$$

Integrales de línea de un campo vectorial

Proposición

Sean $F, G : A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ *campos vectoriales continuos en una curva* $C \subseteq A$. *Sean* $c, d \in \mathbb{R}$, *entonces*

- *Linealidad respecto al integrando:* $\int\limits_C cF + dG \; d\alpha = c \int\limits_C F \; d\alpha + d \int\limits_C G \; d\alpha$.
- *Aditividad respecto al camino de integración: Si* $C = C_1 \cup C_2$, $\int\limits_C F \; d\alpha = \int\limits_{C_1} F \; d\alpha_1 + \int\limits_{C_2} F \; d\alpha_2$.

Independencia del camino. Función potencial.

Un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ es conexo (arco-conexo) si para todo par de puntos en S, el segmento que los une está contenido en S.
Un conjunto abierto y conexo S es simplemente conexo si dadas dos curvas contenidas en S con iguales extremos es posible deformar con continuidad una en la otra.

Sea F un campo vectorial continuo en un abierto y conexo S. Se dice que la integral de línea de F es independiente del camino en S si para todo par de puntos $p, q \in S$ y C_1, C_2 curvas que van de p a q contenidas en S, se verifica

$$\int_{C_1} F d\alpha = \int_{C_2} F d\beta.$$

Se dice que un campo vectorial F es conservativo si $\int_C F d\alpha$ es independiente del camino en S.

En tal caso se puede notar $\int\limits_C F d\alpha = \int\limits_p^q F d\alpha$.

Segundo Teorema Fundamental del Cálculo para Integrales de Línea

Teorema

Sean S un conjunto abierto y conexo de $\mathbb{R}^n$ y $\phi : S \mapsto \mathbb{R}$ un campo escalar con gradiente continuo en S. Entonces, para todo $p, q \in S$

$$\int_C \nabla\phi \; d\alpha = \phi(q) - \phi(p),$$

donde C es una curva regular a trozos que va de p a q contenida en S.

Observación: Un campo de gradientes continuo en S es conservativo.

Sea F un campo vectorial y ϕ un campo escalar. Si $\nabla\phi = F$, se llama a ϕ función potencial de F

Primer Teorema Fundamental del Cálculo para Integrales de Línea

Teorema

Sea F un campo vectorial continuo en un abierto y conexo $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Si F es un campo conservativo entonces existe un campo escalar $\phi : S \mapsto \mathbb{R}$ diferenciable con continuidad en S tal que $\nabla\phi = F$ en S.

Observación:

F continuo en un conjunto abierto y conexo S

F es campo de gradientes $\Leftrightarrow$ F es conservativo.

Condiciones necesarias y suficientes para que un campo vectorial sea un gradiente

Teorema

Sea F un campo vectorial continuo en un abierto y conexo $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. *F es gradiente de una cierta función potencial en S.*
2. *F es conservativo.*
3. *La integral de línea de F alrededor de todo camino cerrado regular a trozos contenido en S es nula.*

Criterio de las derivadas segundas

Proposición (Criterio de las derivadas segundas)

Sea $F=(F_1,F_2,\ldots,F_n)$ *definido en un abierto y conexo* S *con* $F\in C^1$. *si* F *es conservativo entonces*

$$D_iF_j(\bar{x})=D_jF_i(\bar{x}),\ \forall i,j=1,\ldots,n,\ \forall\ \bar{x}\in S.$$

Proposición

Sea $F=(F_1,F_2,\ldots,F_n)$ *un campo vectorial definido en un conjunto* S *con* $F\in C^1$ *y tal que* $D_iF_j(\bar{x})=D_jF_i(\bar{x}),\ \forall i,j=1,\ldots,n,\ \forall\ \bar{x}\in S.$. *Si* S *es simplemente conexo entonces* F *es conservativo*

Observación: Si S es simplemente conexo entonces $D_iF_j=D_jF_i,\ \forall i,j=1,\ldots,n$, en S es condición necesaria y suficiente para que F sea conservativo.

Operador nabla, gradiente, rotor y divergencia.

Operador nabla: $\bar{\nabla} = (\frac{d}{dx_1}, \frac{d}{dx_2}, \ldots, \frac{d}{dx_n})$.

Sea $F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, la divergencia de F, notada $div(F)$, es

$$div(F) = D_1 F_1 + D_2 F_2 + \cdots + D_n F_n.$$

Si $n = 3$ y $F = (P, Q, R)$, i.e. $F_1 = P$, $F_2 = Q$, $F_3 = R$, el rotor de F, notado $rot(F)$, es

$$rot(F) = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y).$$

Teorema de Green

Una curva cerrada simple se dice curva de Jordan.

Toda curva de Jordan C divide al plano en dos regiones, una acotada que se denomina interior de C y se nota $\mathring{C}$ y otra no acotada que se denomina exterior de C y se nota $ext(C)$.

Sea D una región con $\delta D = C$ en la que su frontera está orientada de forma tal que si se recorre entonces la región queda a la izquierda.

Un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^2$ es simplemente conexo si para toda curva de Jordan C, se verifica que $\mathring{C} \subseteq S$.

Teorema de Green

Teorema

Sea $F = (P, Q)$ un campo vectorial C^1 en $S \subseteq \mathbb{R}^2$. Sea C una curva de Jordan suave a trozos contenida en S y tal que $\mathring{C} \subseteq S$. Sea $D = C \cup \mathring{C}$. Luego,

$$\oint_C F\, ds = \oint_C P\, dx + Q\, dy = \iint_C (Q_x - P_y)\, dA,$$

donde la integral de línea se toma con C recorrida en sentido antihorario.

Observación: Si C es una curva de Jordan suave a trozos, entonces el área de la región D acotada por $C = \delta D$ es

$$A(D) = \frac{1}{2} \oint_C x\, dy - y\, dx.$$

Extensión del T. de Green a regiones múltiplemente conexas

Sean $C_1, C_2, \dots, C_n$ una familia de curvas de Jorda tales que

- $C_i \subseteq \mathring{C}_1,\ \forall i \geq 2$,
- $C_i \cap C_j = \emptyset,\ \forall i,j = 1, \dots, n,\ i \neq j$,
- $C_i \nsubseteq \mathring{C}_j,\ \forall i,j \geq 2$.

Luego, $D = (C_1 \cup \mathring{C}_1) - \bigcup_{i=2}^{n} \mathring{C}_i$ es una región múltiplemente conexa.

Extensión del T. de Green a regiones múltiplemente conexas

Teorema

Sea F un campo vectorial C^1 en una región múltiplemente conexa D. Luego,

$$\iint_D (Q_x - P_y)\, dA = \sum_{i=1}^{n} \oint_{C_i} F\, d\alpha.$$

Observación: Si D es tal que todas las curvas que forman su frontera se recorren en el mismo sentido y $F \in C^1(D)$ entonces,

$$\iint_D (Q_x - P_y)\, dA = \oint_{C_i} F\, d\alpha - \sum_{i=2}^{n} \oint_{C_i} F\, d\alpha.$$