CÁLCULO III

Pablo Torres

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura - Universidad Nacional de Rosario

Parte 3: Integrales múltiples

INTRODUCCIÓN

Sea $R = [a,b] \times [c,d] \subseteq \mathbb{R}^2$.
Una partición regular de R de orden n es un par de colecciones de $n+1$ puntos cada una, tales que

$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $c = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = d$

$\Delta x_j = x_{j+1} - x_j = \frac{b-a}{n}$ y $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k = \frac{d-c}{n}$, $j,k = 0,\ldots,n$.

Sean $R_{j,k} = [a,b] \times [c,d]$ y $c_{j,k} \in R_{j,k}$. Sea $f : R \mapsto \mathbb{R}$ un ca,po escalar acotado. La suma

$$S_n = \sum_{j,k=0}^{n-1} f(c_{j,k}) \Delta x_j \Delta y_k$$

se denomina suma de Riemann de f.
Si $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$, independientemente de la elección de los puntos $c_{j,k} \in R_{j,k}$, entonces decimos que f es integrable en R y escribimos

$$S = \int_R f = \int_R f(x,y)\,dA = \iint_R f(x,y)\,dxdy.$$

donde dA es el diferencial de área.

Propiedades

Teorema

Sean f y g dos funciones integrables en $R = [a,b] \times [c,d]$. Luego,

1. *Linealidad:* $f+g$ *es integrable en* R *y* $\int\limits_R f+g = \int\limits_R f + \int\limits_R g$.
2. *Homogeneidad:* αf *es integrable y* $\int\limits_R \alpha f = \alpha \int\limits_R f$.
3. *Monotonía:*
    1. *Si* $f \geq 0$ *en* R *entonces* $\int\limits_R f \geq 0$.
    2. *Si* $f \geq g$ *en* R *entonces* $\int\limits_R f \geq \int\limits_R g$.
    3. *Si* $R' \subseteq R$ *y* $f \geq 0$ *entonces* $\int\limits_{R'} f \leq \int\limits_R f$.
4. *Aditividad: Si* R_i, $i = 1, \ldots, m$, *son* m *rectángulos disjuntos dos a dos y* f *es integrable en* R_i, $\forall i$, *entonces* $\sum\limits_{i=1}^{m} \int\limits_{R_i} f = \int\limits_R f$.

Principio de Cavalieri

Sea $R = [a,b] \times [c,d]$. Consideremos la región sólida bajo la gráfica de $z = f(x,y)$ definida en R, donde f es continua y $f \geq 0$. Consideremos ahora la intersección del sólido con los planos cortantes paralelos al plano yz de abcisa x. El área de esta intersección es

$$A(x) = \int_c^d f(x,y)dy, \ x \text{ fijo.}$$

Luego, según el principio de Cavalieri resulta que el volumen del sólido considerado es

$$\int_R f = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx.$$

Análogamente se puede obtener

$$\int_R f = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy.$$

CONTINUIDAD IMPLICA INTEGRABILIDAD

Un campo escalar $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ es uniformemente continuo en A ssi

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ t.q.\ ||x-y|| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon.$$

TEOREMA (HEINE-BOREL)

Si f es continuo en un compacto A entonces f es uniformemente continuo en A.

TEOREMA

Si f es continua en $R = [a,b] \times [c,d]$ entonces f es integrable en R.

TEOREMA (FUBINI)

Sea f un campo escalar continuo en $R = [a,b] \times [c,d]$. Entonces,

$$\int_R f = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy.$$

Continuidad implica integrabilidad

Teorema

Sea f un campo escalar acotado con dominio $R=[a,b]\times[c,d]$ y cuyas discontinuidades forman una unión finita de gráficas de funciones continuas.

Si $\int_c^d f(x,y)dy$ existe para cada $x\in[a,b]$ entonces $\int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx$ existe y es $\int_R f$.

De forma análoga, si $\int_a^b f(x,y)dx$ existe para cada $y\in[c,d]$ entonces

$\int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy$ existe y es $\int_R f$.

Teorema

Si f es integrable en $R=[a,b]\times[c,d]$ entonces $|f|$ es integrable en R y $|\int_R f|\leq\int_R |f|$.

Integral sobre regiones más generales

Sean ϕ_1 y ϕ_2 dos funciones reales continuas en $[a,b]$ tales que $\phi_1 \leq \phi_2$.
Una región $D \subseteq \mathbb{R}^2$ es de tipo I si $D = \{(x,y) : \ x \in [a,b], \ \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$.

Sean τ_1 y τ_2 dos funciones reales continuas en $[c,d]$ tales que $\tau_1 \leq \tau_2$.
Una región $D \subseteq \mathbb{R}^2$ es de tipo II si $D = \{(x,y) : \ y \in [c,d], \ \tau_1(y) \leq x \leq \tau_2(y)\}$.

Una región D es de tipo III si es de tipo I y II, i.e. se puede escribir tanto como una región de tipo I como una región de tipo II.

Una región se dice elemental si es de tipo I, II o III.

Obs.: Una región elemental es un conjunto compacto.

Integral sobre regiones más generales

Sea D una región elemental en el plano y R un rectángulo tal que $D \subseteq R$. Sea $f : D \mapsto \mathbb{R}$ continua en D (y por lo tanto acotada).
Definimos $f^* : R \mapsto \mathbb{R}$ tal que

$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y) \in D \\ 0 & \text{si } (x,y) \in R - D \end{cases}$$

Se dice que f^* es una extensión acotada de f a R y se define

$$\int_D f := \int_R f^*.$$

Proposición

Sea D una región de tipo I y f continua en D. Entonces,

$$\int_R f = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dydx.$$

Integral sobre regiones más generales

Proposición

Sea D una región de tipo II y f continua en D. Entonces,

$$\int_R f = \int_c^d \int_{\tau_1(x)}^{\tau_2(x)} f(x,y)dxdy.$$

Obs.:

- Si $f = 1$ en D entonces $\int_D f = A(D)$.
- Si D es unión finita de regiones elementales D_i entonces $\int_D f = \sum_i \int_{D_i} f$.

Teorema (Valor medio para integrales dobles)

Sea $f : D \mapsto \mathbb{R}$ *continua en la región elemental* D*. Luego, existe* $x_0, y_0) \in D$ *tal que*

$$\int_D f = f(x_0, y_0) \cdot A(D).$$

Cambio de variables en integrales dobles

Teorema

Sean D^* y D regiones elementales en $\mathbb{R}^2$ y $T : D^* \mapsto D$ de clase C^1 y biyectiva. Entonces, para cualquier función integrable $f : D \mapsto \mathbb{R}$, resulta

$$\int_D f(x,y)dxdy = \int_{D^*} (f \circ T)(u,v) \cdot |J_T(u,v)| dudv,$$

donde $J_T(u,v)$ es el determinante de la matriz jacobiana de T en (u,v) (jacobiano).

INTEGRAL TRIPLE

Dada $f : B \mapsto \mathbb{R}$ continua, donde B es un paralelepípedo rectangular en $\mathbb{R}^3$, podemos definir la integral de f sobre B como un límite de sumas, así como lo hicimos para campos escalares de dos variables.

Brevemente, partimos los tres lados de B en n partes iguales y formamos la suma

$$S_n = \sum_{i,j,k=0}^{n-1} f(c_{ijk})\Delta V,$$

donde $c_{ijk} \in B_{ijk}$, el ijk-ésimo paralelepípedo rectangular en la partición de B, y $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ es el volumen de B_{ijk}.

Sea f un campo escalar acotado en B. si existe $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, independientemente de la elección de c_{ijk} en B_{ijk}, entonces se llama a este límite integral triple de f sobre B y se denota

$$\int_B f = \int_B f dV = \iiint_B f dV = \iiint_B f(x,y,z)dxdydz.$$

Propiedades

Teorema

Sean f y g dos funciones integrables en $B = [a,b] \times [c,d] \times [e,h]$. Luego,

1. *Linealidad: $f+g$ es integrable en B y $\int_B f+g = \int_B f + \int_B g$.*
2. *Homogeneidad: αf es integrable y $\int_B \alpha f = \alpha \int_B f$.*
3. *Monotonía:*
    1. *Si $f \geq 0$ en B entonces $\int_B f \geq 0$.*
    2. *Si $f \geq g$ en B entonces $\int_B f \geq \int_B g$.*
    3. *Si $B' \subseteq B$ y $f \geq 0$ entonces $\int_{B'} f \leq \int_B f$.*
4. *Aditividad: Si B_i, $i = 1, \ldots, m$, son m paralelepípedos disjuntos dos a dos y f es integrable en B_i, $\forall i$, entonces $\sum_{i=1}^{m} \int_{B_i} f = \int_B f$.*

PROPIEDADES

PROPOSICIÓN

Si f es integrable en B entonces $|f|$ es integrable en B y

$$\left|\int_B f\right| \leq \int_B |f|.$$

TEOREMA (FUBINI)

Si f es acotada en B y continua salvo en un conjunto de contenido nulo (gráficas de funciones continuas tales como, $x = \alpha(y,z)$, $y = \beta(x,z)$ o $z = \gamma(x,y)$) entonces f es integrable en B y

$$\int_B f = \int_a^b \int_c^d \int_e^h f(x,y,z)\,dzdydx,$$

(y las restantes integrales iteradas).

INTEGRAL TRIPLE SOBRE REGIONES MÁS GENERALES

Sea $D \subseteq \mathbb{R}^3$, se dice que D es una región:

1. de tipo I si $D = \{(x,y,z) : \ (x,y) \in S, \ \phi_1(x,y) \leq z \leq \phi_2(x,y)\}$, donde S es una región elemental de $\mathbb{R}^2$ y ϕ_1 y ϕ_2 son continuas en S.
2. de tipo II si $D = \{(x,y,z) : \ (x,z) \in S, \ \phi_1(x,z) \leq y \leq \phi_2(x,z)\}$.
3. de tipo III si $D = \{(x,y,z) : \ (y,z) \in S, \ \phi_1(y,z) \leq x \leq \phi_2(y,z)\}$.
4. de tipo IV o normal si es de tipo I, II y III.
5. elemental si es de tipo I, II, III o IV.

Obs.: Toda región elemental es un conjunto compacto.

INTEGRAL TRIPLE SOBRE REGIONES MÁS GENERALES

Sea f continua en una región elemental D y $D \subseteq B$ (paralelepípedo). Se define la extensión acotada f^* como

$$f^*(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z) & \text{si } (x,y,z) \in D \\ 0 & \text{si } (x,y,z) \in R - D \end{cases}$$

TEOREMA

Sea D una región de tipo I y f continua en D. Luego,

$$\int_D F = \iint_S \int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x,y,z)dzdydx = \int_a^b \int_{\gamma_1(x)}^{\gamma_2(x)} \int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x,y,z)dzdydx,$$

donde $S = \{(x,y): \ a \leq x \leq b, \gamma_1(x) \leq y \leq \gamma_2(x)\}$ con γ_1 y γ_2 continuas en $[a,b]$.

Análogos resultados para regiones de tipo II y III.

Obs.: Si $f = 1$, $\int_D f = Vol(D)$.

CAMBIO DE VARIABLES EN INTEGRALES TRIPLES

Sea $T(u,v,w) = (x,y,z)$ una transformación tal que $T(D^*) = D$,

$$T(u,v,w) = \begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$$

TEOREMA

Sean D y D^* regiones elementales de $\mathbb{R}^3$ y $T : D^* \mapsto D$ de clase C^1 y biyectiva. Entonces, para cualquier función integrable $f : D \mapsto \mathbb{R}$ resulta,

$$\int_D f(x,y,z)dxdydz = \int_{D^*} (f \circ T)(u,v,w) \cdot |J_T(u,v,w)| dudvdw,$$

donde $J_T(u,v,w)$ es el jacobiano de T en (u,v,w).

$$J_T(u,v,w) = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}$$