CÁLCULO III

Pablo Torres

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura - Universidad Nacional de Rosario

Parte 2: Aplicaciones del cálculo diferencial para funciones de varias variables

Dos resultados básicos

Teorema (Teorema del valor medio)

Sean A *un abierto de* $\mathbb{R}^n$ *y* $f : A \mapsto \mathbb{R}$ *diferenciable. Sea* $h \in \mathbb{R}^n$ *tal que el segmento* $\overline{a, a+h}$ *está incluido en* A. *Entonces existe* θ *en el segmento* $\overline{a, a+h}$ *tal que*

$$f(a+h) - f(a) = \nabla f(\theta) \cdot h.$$

Dos resultados básicos

Teorema (Teorema del valor medio)

Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $f : A \mapsto \mathbb{R}$ diferenciable. Sea $h \in \mathbb{R}^n$ tal que el segmento $\overline{a, a+h}$ está incluido en A. Entonces existe θ en el segmento $\overline{a, a+h}$ tal que

$$f(a+h) - f(a) = \nabla f(\theta) \cdot h.$$

Teorema (Fórmula de Taylor de segundo orden)

Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $f : A \mapsto \mathbb{R}$ un campo escalar en $C^2(A)$.Si $h \in \mathbb{R}^n$ tal que el segmento $\overline{a, a+h}$ está incluido en A. Entonces

$$f(a+h) - f(a) = \nabla f(a) \cdot h + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} [D_{ij} f(a) \cdot h_i \cdot h_j] + ||h||^2 \cdot E(a,h),$$

donde $\lim_{h \to 0} E(a,h) = 0$.

Extremos de campos escalares

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ diferenciable, $a \in A$, $P_1 = (a_1, a_2, f(a_1, a_2))$.

Extremos de campos escalares

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ diferenciable, $a \in A$, $P_1 = (a_1, a_2, f(a_1, a_2))$. Hemos visto que la ecuación

$$D_1 f(a)(x - a_1) + D_2 f(a)(y - a_2) = z - f(a_1, a_2)$$

es la ecuación del plano tangente a la superficie S de ecuación $z = f(x, y)$ en el punto P_1. Un vector normal a dicho plano es $(D_1 f(a), D_2 f(a), -1)$.

Extremos de campos escalares

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ diferenciable, $a \in A$, $P_1 = (a_1, a_2, f(a_1, a_2))$. Hemos visto que la ecuación

$$D_1 f(a)(x - a_1) + D_2 f(a)(y - a_2) = z - f(a_1, a_2)$$

es la ecuación del plano tangente a la superficie S de ecuación $z = f(x, y)$ en el punto P_1. Un vector normal a dicho plano es $(D_1 f(a), D_2 f(a), -1)$.

Si $D_1 f(a)$ y $D_2 f(a)$ son nulos, se dice que a es un *punto estacionario* o *crítico* de f. El plano tangente a S en P_1 es horizontal (paralelo al plano xy).

EXTREMOS DE CAMPOS ESCALARES

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ diferenciable, $a \in A$, $P_1 = (a_1, a_2, f(a_1, a_2))$. Hemos visto que la ecuación

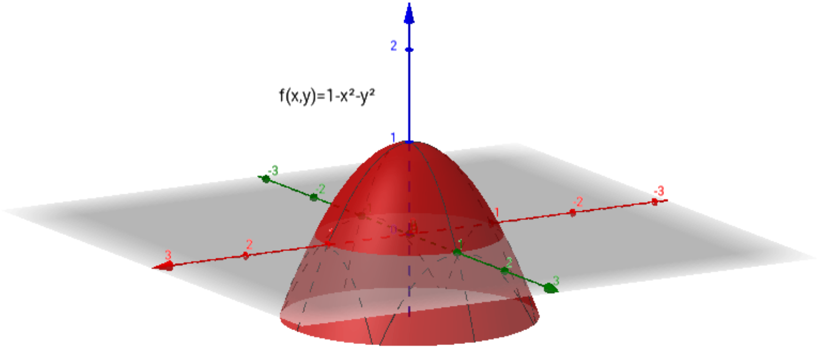
$$D_1 f(a)(x - a_1) + D_2 f(a)(y - a_2) = z - f(a_1, a_2)$$

es la ecuación del plano tangente a la superficie S de ecuación $z = f(x, y)$ en el punto P_1. Un vector normal a dicho plano es $(D_1 f(a), D_2 f(a), -1)$.

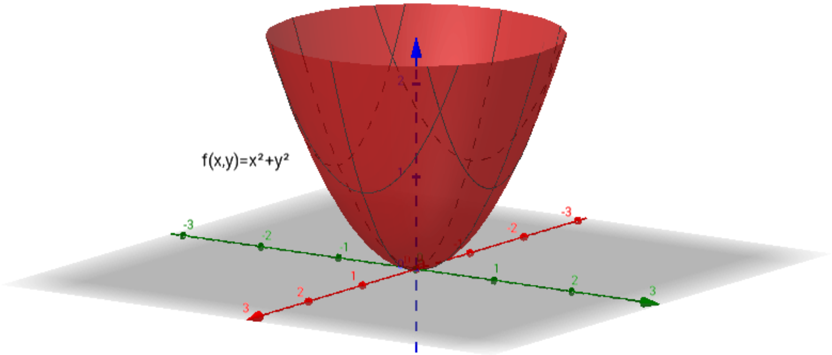
Si $D_1 f(a)$ y $D_2 f(a)$ son nulos, se dice que a es un *punto estacionario* o *crítico* de f. El plano tangente a S en P_1 es horizontal (paralelo al plano xy).

En los puntos estacionarios tendremos los *extremos* de f o *puntos de ensilladura* de f.

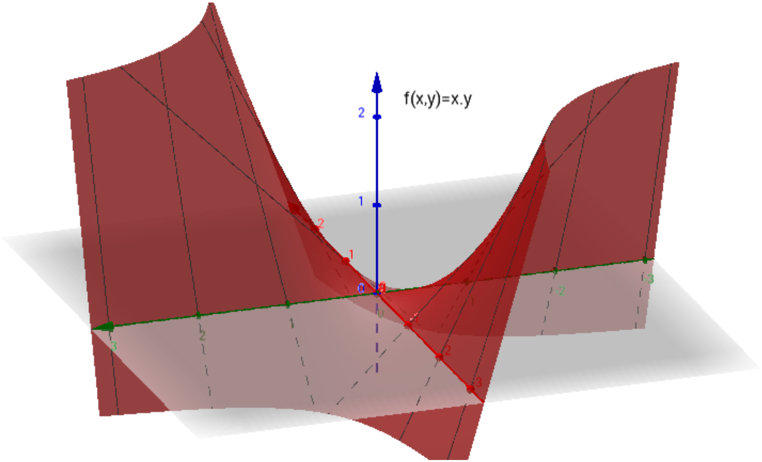
EXTREMOS DE CAMPOS ESCALARES



EXTREMOS DE CAMPOS ESCALARES



EXTREMOS DE CAMPOS ESCALARES



Extremos de campos escalares

Definición: Se dice que un campo escalar f tiene un *máximo absoluto (global)* en un punto a de un conjunto A de $\mathbb{R}^n$ si $f(x) \leq f(a)$, para todo $x \in A$.

EXTREMOS DE CAMPOS ESCALARES

Definición: Se dice que un campo escalar f tiene un *máximo absoluto (global)* en un punto a de un conjunto A de $\mathbb{R}^n$ si $f(x) \leq f(a)$, para todo $x \in A$.

El número $f(a)$ se llama *máximo absoluto* de f en A.

EXTREMOS DE CAMPOS ESCALARES

Definición: Se dice que un campo escalar f tiene un *máximo absoluto (global)* en un punto a de un conjunto A de $\mathbb{R}^n$ si $f(x) \leq f(a)$, para todo $x \in A$.

El número $f(a)$ se llama *máximo absoluto* de f en A.

Se dice que f tiene un *máximo relativo (local)* en a si $f(x) \leq f(a)$ para todo x en una cierta bola $B(a,r)$ contenida en A.

Extremos de campos escalares

Definición: Se dice que un campo escalar f tiene un *mínimo absoluto (global)* en un punto a de un conjunto A de $\mathbb{R}^n$ si $f(x) \geq f(a)$, para todo $x \in A$.

Extremos de campos escalares

Definición: Se dice que un campo escalar f tiene un *mínimo absoluto (global)* en un punto a de un conjunto A de $\mathbb{R}^n$ si $f(x) \geq f(a)$, para todo $x \in A$.

El número $f(a)$ se llama *mínimo absoluto* de f en A.

Extremos de campos escalares

Definición: Se dice que un campo escalar f tiene un *mínimo absoluto (global)* en un punto a de un conjunto A de $\mathbb{R}^n$ si $f(x) \geq f(a)$, para todo $x \in A$.

El número $f(a)$ se llama *mínimo absoluto* de f en A.

Se dice que f tiene un *mínimo local* en a si $f(x) \geq f(a)$ para todo x en una cierta bola $B(a,r)$ contenida en A.

EXTREMOS DE CAMPOS ESCALARES

Definición: Se dice que un campo escalar f tiene un *mínimo absoluto (global)* en un punto a de un conjunto A de $\mathbb{R}^n$ si $f(x) \geq f(a)$, para todo $x \in A$.

El número $f(a)$ se llama *mínimo absoluto* de f en A.

Se dice que f tiene un *mínimo local* en a si $f(x) \geq f(a)$ para todo x en una cierta bola $B(a,r)$ contenida en A.

Definición: Un número que sea máximo o mínimo de f se denomina extremo.

Extremos de campos escalares

Definición: Se dice que un campo escalar f tiene un *mínimo absoluto (global)* en un punto a de un conjunto A de $\mathbb{R}^n$ si $f(x) \geq f(a)$, para todo $x \in A$.

El número $f(a)$ se llama *mínimo absoluto* de f en A.

Se dice que f tiene un *mínimo local* en a si $f(x) \geq f(a)$ para todo x en una cierta bola $B(a,r)$ contenida en A.

Definición: Un número que sea máximo o mínimo de f se denomina extremo.

Teorema

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$. Si f tiene un extremo local en $a \in \mathring{A}$ y f es diferenciable en $\mathring{A}$ entonces $\nabla f(a) = \bar{0}$.

Extremos de campos escalares

Definición: Se dice que un campo escalar f tiene un *mínimo absoluto (global)* en un punto a de un conjunto A de $\mathbb{R}^n$ si $f(x) \geq f(a)$, para todo $x \in A$.

El número $f(a)$ se llama *mínimo absoluto* de f en A.

Se dice que f tiene un *mínimo local* en a si $f(x) \geq f(a)$ para todo x en una cierta bola $B(a,r)$ contenida en A.

Definición: Un número que sea máximo o mínimo de f se denomina extremo.

Teorema

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$. Si f tiene un extremo local en $a \in \mathring{A}$ y f es diferenciable en $\mathring{A}$ entonces $\nabla f(a) = \bar{0}$.

Observación: f diferenciable,

- a extremo $\Rightarrow \nabla f(a) = \bar{0}$.

Extremos de campos escalares

Definición: Se dice que un campo escalar f tiene un *mínimo absoluto (global)* en un punto a de un conjunto A de $\mathbb{R}^n$ si $f(x) \geq f(a)$, para todo $x \in A$.

El número $f(a)$ se llama *mínimo absoluto* de f en A.

Se dice que f tiene un *mínimo local* en a si $f(x) \geq f(a)$ para todo x en una cierta bola $B(a,r)$ contenida en A.

Definición: Un número que sea máximo o mínimo de f se denomina extremo.

Teorema

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$. Si f tiene un extremo local en $a \in \mathring{A}$ y f es diferenciable en $\mathring{A}$ entonces $\nabla f(a) = \bar{0}$.

Observación: f diferenciable,

- a extremo $\Rightarrow \nabla f(a) = \bar{0}$.
- a extremo $\not\Leftarrow \nabla f(a) = \bar{0}$.

Extremos de campos escalares

Definición: Sea f un campo escalar diferenciable en un punto a. Si $\nabla f(a) = \bar{0}$ el punto a se llama *punto estacionario*.

Extremos de campos escalares

Definición: Sea f un campo escalar diferenciable en un punto a. Si $\nabla f(a) = \bar{0}$ el punto a se llama *punto estacionario*.

Un punto estacionario se llama *punto de ensilladura* si toda bola $B(a,r)$ contiene puntos x y x' tales que $f(x) < f(a) < f(x')$.

Extremos de campos escalares

Teorema

Sea $A = [a_{ij}]$ *una matriz* $n \times n$ *simétrica y sea*

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \text{ Forma cuadrática.}$$

Resulta:

1. $Q(x) > 0$ *para todo* $x \neq \bar{0}$ *(*Q *es definida positiva) ssi todos los autovalores de* A *son positivos.*
2. $Q(x) < 0$ *para todo* $x \neq \bar{0}$ *(*Q *es definida negativa) ssi todos los autovalores de* A *son negativos.*

Extremos de campos escalares

Teorema

Sea f un campo escalar con derivadas parciales segundas continuas en una bola $B(a)$ de un punto estacionario a de f. Sea $H_f(a)$ el hessiano de f en a. Entonces:

Extremos de campos escalares

Teorema

Sea f un campo escalar con derivadas parciales segundas continuas en una bola $B(a)$ de un punto estacionario a de f. Sea $H_f(a)$ el hessiano de f en a. Entonces:

1. *Si todos los autovalores de $H_f(a)$ son positivos, f tiene un mínimo relativo en a.*
2. *Si todos los autovalores de $H_f(a)$ son negativos, f tiene un máximo relativo en a.*
3. *Si $H_f(a)$ tiene autovalores positivos y negativos, f tiene un punto de ensilladura en a.*

Criterio de la derivada segunda para determinar extremos de funciones en dos variables.

Teorema

Sea a un punto estacionario de un campo escalar f con derivadas parciales segundas continuas en una bola $B(a,r)$. Sean $A = D_{11}f(a)$, $B = D_{12}f(a)$, $C = D_{22}f(a)$ y $\Delta = det(H_f(a)) = A \cdot C - B^2$.

Criterio de la derivada segunda para determinar extremos de funciones en dos variables.

Teorema

Sea a un punto estacionario de un campo escalar f con derivadas parciales segundas continuas en una bola $B(a,r)$. Sean $A = D_{11}f(a)$, $B = D_{12}f(a)$, $C = D_{22}f(a)$ y $\Delta = det(H_f(a)) = A \cdot C - B^2$.
Resulta:

1. *Si $\Delta < 0$, f tiene un punto de ensilladura en a.*
2. *Si $\Delta > 0$ y $A > 0$, f tiene un mínimo relativo en a.*
3. *Si $\Delta > 0$ y $A < 0$, f tiene un máximo relativo en a.*
4. *Si $\Delta = 0$, el criterio no determina la naturaleza de a.*

Extremos condicionados. Multiplicadores de Lagrange.

Método de Lagrange: Para optimizar un campo escalar diferenciable $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ sujeto a la condición $g = 0$ donde $g : B \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ diferenciable, se hallan los puntos $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A \cap B$ y un escalar λ solución del sistema

$$\begin{cases} \nabla f(P) = \lambda \; \nabla g(P) \\ g(P) = 0 \\ P \in A \cap B \end{cases}$$

Extremos condicionados. Multiplicadores de Lagrange.

Método de Lagrange: Para optimizar un campo escalar diferenciable $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ sujeto a la condición $g = 0$ donde $g : B \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ diferenciable, se hallan los puntos $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A \cap B$ y un escalar λ solución del sistema

$$\begin{cases} \nabla f(P) = \lambda\ \nabla g(P) \\ g(P) = 0 \\ P \in A \cap B \end{cases}$$

Luego, si f tiene un extremo en P entonces existe $\lambda \neq 0$ tal que $\nabla f(P) = \lambda\ \nabla g(P)$ y $g(P) = 0$ con $P \in A \cap B$.

Extremos condicionados. Multiplicadores de Lagrange.

Método de Lagrange: Para optimizar un campo escalar diferenciable $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ sujeto a la condición $g = 0$ donde $g : B \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ diferenciable, se hallan los puntos $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A \cap B$ y un escalar λ solución del sistema

$$\begin{cases} \nabla f(P) = \lambda \ \nabla g(P) \\ g(P) = 0 \\ P \in A \cap B \end{cases}$$

Luego, si f tiene un extremo en P entonces existe $\lambda \neq 0$ tal que $\nabla f(P) = \lambda \ \nabla g(P)$ y $g(P) = 0$ con $P \in A \cap B$.

λ se denomina *multiplicador de Lagrange*.

Extremos condicionados. Multiplicadores de Lagrange.

Método de Lagrange con más condiciones: Si un campo escalar $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ diferenciable tiene un extremo cuando está sometido a m condiciones,

$$g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \ldots,\ g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

con $m < n$, existen m escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ tales que

$$\nabla f = \lambda_1\ \nabla g_1 + \lambda_2\ \nabla g_2 + \cdots + \lambda_m\ \nabla g_m$$

en cada punto extremo.