CÁLCULO III

Pablo Torres

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura - Universidad Nacional de Rosario

Funciones definidas en $\mathbb{R}^n$.

Introducción

Sean $n, m \in \mathbb{N}$ y $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Una función $f : A \mapsto \mathbb{R}^m$ se denomina *campo vectorial*.

En particular:

- $m = 1$ $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ *campo escalar*.
- $n = 1$ $f : A \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^m$ *función vectorial*.
- $n = m = 1$ $f : A \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *función real*.

Gráfica de f

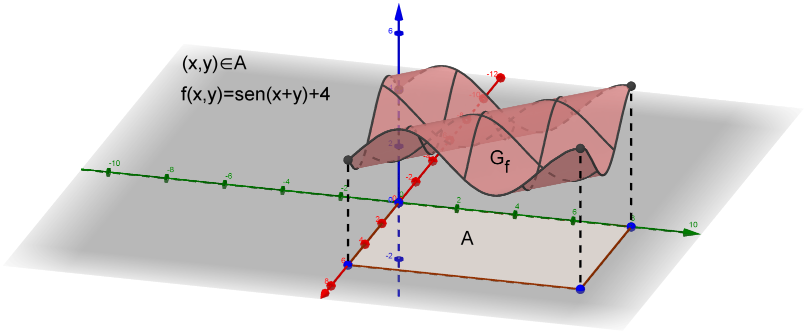
Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ un campo vectorial. Llamamos *gráfica de* f al conjunto $G_f = \{(x, f(x) : \ x \in A\}$

- $G_f \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$.
- $m = 1$.
  - $n = 1$ funciones reales.
  - $n = 2$, $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$.

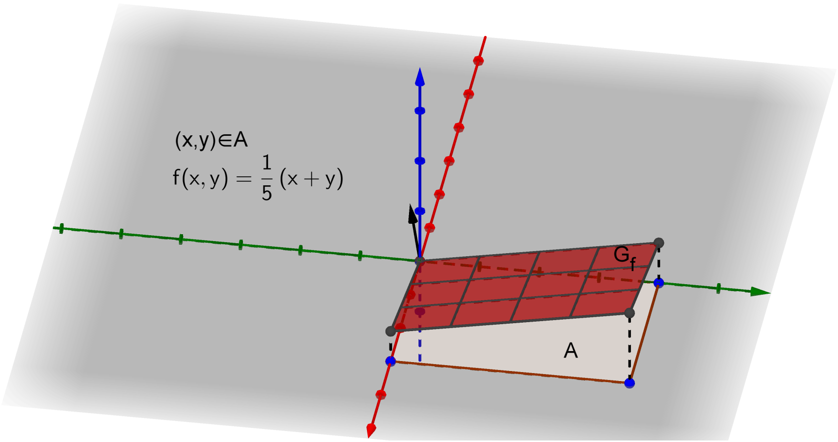
    $z = f(x, y) \in \mathbb{R}$.

    $G_f = \{(x, y, z) : \ (x, y) \in A, \ z = f(x, y)\}$.
    La gráfica de f es una superficie en $\mathbb{R}^3$.

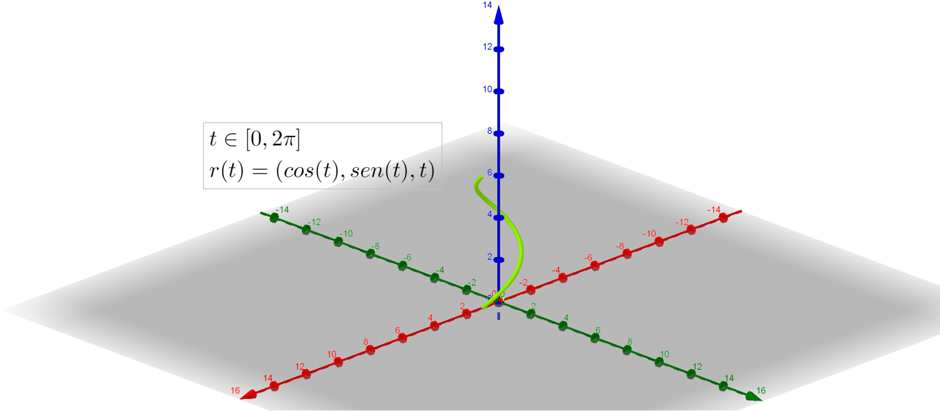
Gráfica de funciones



Gráfica de funciones



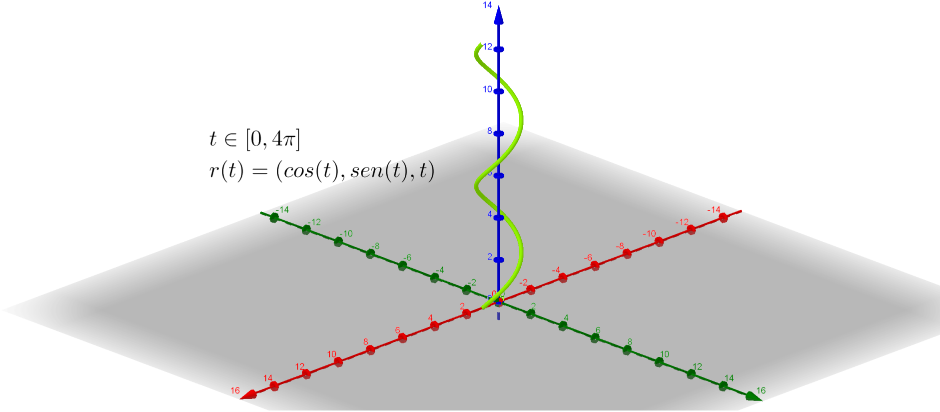
Imágenes de funciones vectoriales



$t \in [0, 2\pi]$

$r(t) = (cos(t), sen(t), t)$

Imágenes de funciones vectoriales



$t \in [0, 4\pi]$

$r(t) = (cos(t), sen(t), t)$

Conjuntos de nivel

Sean $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{R}$. El *conjunto de nivel* k de f es

$C_k = \{x \in A : f(x) = k\}$.

Si $n = 2$ C_k se denomina *curva de nivel*.

Si $n = 3$ C_k se denomina *superficie de nivel*.

Límite y continuidad de campos vectoriales

Sean $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, $(A = Dom(f))$, $a \in \overline{A}$ y $b \in \mathbb{R}^n$. Se dice que el *límite de* f cuando x tiende a a es b ssi $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ tal que

si $x \in A$ y $0 < ||x - a|| < \delta$ entonces $||f(x) - b|| < \varepsilon$.

Notación: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Observaciones:

1. $||x - a||$ y $||f(x) - b||$ son normas en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente.
2. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ ssi para todo entorno N_b de b existe un entorno N_a de a tal que si $x \in N_a \cap A$ entonces $f(x) \in N_b$.
3. Decimos el límite de f ya que, si existe un tal b, éste es único.

Límite y continuidad de campos vectoriales

Proposición

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ *un campo vectorial dado por* $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$ *con* $f_i : A \mapsto \mathbb{R}$ *campo escalar para todo* $i = 1, 2, \ldots, n$*. Entonces,*

1. *Si existe* $\lim_{x \to a} f(x)$ *es único.*
2. $\lim_{x \to a} f(x) = b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ *ssi* $\lim_{x \to a} f_i(x) = b_i \ \forall\ i = 1, \ldots, m$*.*

Proposición

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ *un campo vectorial. Luego,* $\lim_{x \to a} f(x) = b$ *ssi* $\lim_{x \to a} ||f(x) - b|| = 0$*.*

Proposición

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ *un campo vectorial. Si* $\lim_{x \to a} f(x) = b$ *entonces* f *es acotada en un entorno de* a*.*

Límite y continuidad de campos vectoriales

Teorema (Álgebra de los límites)

Sean $f,g : A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$*. Si* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b_f$ *y* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b_g$ *entonces,*

1. $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = b_f + b_g$.
2. $\lim\limits_{x\to a} \lambda f(x) = \lambda b_f$.
3. $\lim\limits_{x\to a}(f.g)(x) = b_f \cdot b_g$.
4. *Si* $m = 1$ *y* $b_g \neq 0$, $\lim\limits_{x\to a} \frac{f}{g}(x) = \frac{b_f}{b_g}$.
5. $\lim\limits_{x\to a} ||f(x)|| = ||b||$.

Límite y continuidad de campos vectoriales

Teorema (Carácter local del límite)

Sean $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, $a \in \overline{A}$, *tales que existe* $r > 0$ *tal que* $f(x) = g(x)$ $\forall x \in B(a,r) \setminus \{a\}$ *y* $x \in A$. *Luego,* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ *ssi* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$.

Teorema (Intercalación para campos escalares)

Sean $f, g, h : A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, $a \in \overline{A}$, *tales que existe* $r > 0$ *para el cual* $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ $\forall x \in B(a,r) \setminus \{a\}$ *y* $x \in A$. *Luego, si* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = L$ *entonces* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$.

Continuidad de campos vectoriales

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ un campo vectorial. Se dice que f *es continuo en* $a \in A$ si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Si f es continuo en a, para todo $a \in A$, se dice que f es continuo.

Proposición

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ un campo vectorial dado por $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$ con $f_i : A \mapsto \mathbb{R}$ campo escalar para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Entonces, f es continuo en a ssi f_i es continuo en a $\forall\ i = 1, \ldots, m$.

Teorema

Sean $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ y $c \in \mathbb{R}$. Si f y g son continuos en $a \in A$ entonces,

1. *cf es continuo en a.*
2. *$f + g$ es continuo en a.*
3. *$f \cdot g$ es continuo en a*
4. *Si $m = 1$ y g no se anula en un entorno de a, entonces $\frac{f}{g}$ es continuo en a.*

Continuidad de campos vectoriales

Teorema

Sean $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ y $g : B \subseteq \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^k$, tales que $f(A) \subseteq B$. Si f es continua en $a \in A$ y g son continua en $b = f(a)$, entonces $f \circ g$ es continua en a.

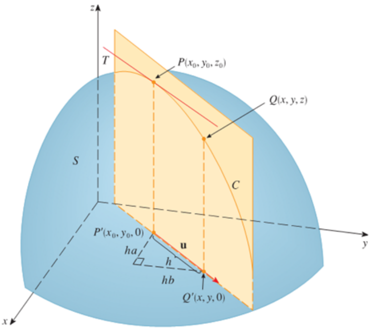
Derivadas direccionales y parciales de campos escalares

Sean $\vec{v}$ un versor de $\mathbb{R}^n$, $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ un campo escalar y $\vec{x} \in \mathring{A}$. Si existe el siguiente límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{v}) - f(\vec{x})}{h}$$

se lo denomina *derivada direccional de f en la dirección de $\vec{v}$*.

Notación: $D_{\vec{v}} f(\vec{x})$, $f'(\vec{x}, \vec{v})$.



Derivadas direccionales y parciales de campos escalares

Sean $\vec{e}_i = (0,\ldots,0,\overset{i}{1},0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^n$, $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ y $\vec{x} \in \mathring{A}$. Si existe

$$D_{\vec{e}_i} f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{x}+h\vec{e}_i) - f(\vec{x})}{h}$$

se denomina *derivada parcial i-ésima de f en $\vec{x}$*.

Notaciones: $D_{\vec{e}_i} f(\vec{x}) = D_i f(\vec{x}) = f_{x_i}(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})$.

Teorema

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ tal que existan $D_1 f$, $D_2 f$, $D_{12} f$ y $D_{21} f$ en un conjunto abierto S. Si $a \in S$ y $D_{12} f$ y $D_{21} f$ son continuas en a entonces $D_{12} f(a) = D_{21} f(a)$.

DIFERENCIABILIDAD DE CAMPOS ESCALARES

Sean $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, $a \in \mathring{A}$. Luego, existe $r > 0$ tal que $B(a,r) \subseteq A$.

decimos que f es *diferenciable* en a si existen $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ y una función $E(a,h)$ tales que

$\forall\, \vec{v} \in \mathbb{R}^n,\ ||\vec{v}|| < r$ se verifica

$$f(a+\vec{v}) - f(a) = \alpha \cdot \vec{v} + ||\vec{v}||\ E(a,\vec{v})\ (*)$$

con $\lim\limits_{||\vec{v}|| \to 0} E(a,\vec{v}) = 0$.

Si definimos $T_\alpha : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} :\ T_\alpha(\vec{v}) = \alpha \cdot \vec{v}$, tenemos una transformación lineal llamada *diferencial de f en a*.

La ecuación anterior $(*)$, válida para todo $\vec{v}$ tal que $||\vec{v}|| < r$, se denomina *Fórmula de Taylor de primer orden* para $f(a+\vec{v})$.

El error en la aproximación es $\varepsilon = ||\vec{v}|| E(a,\vec{v})$.

$\lim\limits_{||\vec{v}|| \to 0} \frac{\varepsilon}{||\vec{v}||} = 0$.

Diferenciabilidad de campos escalares

Teorema

Sean $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ diferenciable en $a \in \mathring{A}$, con diferencial T_α. Luego, existen todas las derivadas direccionales $D_{\vec{u}} f(a)$ y resulta

$$T_\alpha(\vec{u}) = D_{\vec{u}} f(a).$$

Además, $D_{\vec{u}} f(a)$ es una combinación lineal de las componentes de $\vec{v}$. Más aún,

$$D_{\vec{u}} f(a) = \sum_{k=1}^{n} D_k f(a)\, u_k.$$

Teorema

Si $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ diferenciable en $a \in \mathring{A}$ entonces f es continua en a.

DIFERENCIABILIDAD DE CAMPOS ESCALARES

TEOREMA (CONDICIÓN SUFICIENTE DE DIFERENCIABILIDAD)

Si existen las derivadas parciales $D_1 f, \ldots, D_n f$ en una cierta bola $B(a,r)$ y son continuas en a, entonces f es diferenciable en a.

La continuidad de las derivadas parciales es condición suficiente pero no necesaria.

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\ sen\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Verificar que:

1. $D_1 f(0,0) = D_0 f(0,0) = 0$.
2. f es diferenciable en $(0,0)$.
3. Ninguna de las derivadas parciales es continua en $(0,0)$.

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ y $a \in \mathring{A}$ tal que existen $D_i f(a)$ $\forall i = 1, \ldots, n$. Llamamos *gradiente de f en a* al vector $\nabla f(a) = (D_1 f(a), D_2 f(a), \ldots, D_n f(a))$.

Regla de la cadena

Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$, $t_0 \in \mathring{A}$. Decimos que r es *derivable* en t_0 si existe

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(t_0+h)-r(t_0)}{h}$$

y notamoos a este límite $r'(t_0) = \frac{dr}{dt}(t_0)$.

$$r'(t_0) = (r_1'(t_0), r_2'(t_0), \ldots, r_n'(t_0)) = \sum_{i=1}^{n} r_i'(t_0)\vec{e}_i.$$

Teorema

r es derivable en t_0 ssi r_i es derivable en t_0 para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

Sea $r : [a,b] \mapsto \mathbb{R}^n$ tal que las derivadas de r_i son continuas (seccionalmente continuas) en $[a,b]$, para todo $i = 1, \ldots, n$.

Llamamos *curva regular (a trozos)* a $\Gamma = \{r(t) : \ t \in [a,b]\}$.

r se denomina parametrización de Γ.

Regla de la cadena

Teorema (Regla de la cadena)

Sea f un campo escalar definido en un conjunto abierto A de $\mathbb{R}^n$, y sea $r : I \mapsto A$ una función vectorial, con I intervalo cerrado.

Sea $g : I \mapsto \mathbb{R} : g(t) = f(r(t))$.

Sea $t \in I$ tal que $r'(t)$ existe y f es diferenciable en $r(t)$.

Entonces, existe $g'(t)$ y se verifica

$$g'(t) = f'(r(t)) \cdot r'(t).$$

Derivadas direccionales y parciales de campos vectoriales

Sean $\vec{v}$ un versor de $\mathbb{R}^n$, $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ un campo vectorial y $a \in \mathring{A}$. Si existe el siguiente límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h\vec{v}) - f(a)}{h},$$

se lo denomina *derivada direccional de f en la dirección de $\vec{v}$*.

- $f'(a,\vec{v})$ es un vector de $\mathbb{R}^m$.
- $f'(a,\vec{v})$ existe ssi $f_k'(a,\vec{v})$ existe para todo $k = 1, \ldots, m$.
- $f'(a,\vec{v}) = (f_1'(a,\vec{v}), \ldots, f_n'(a,\vec{v})) = \sum_{k=1}^{m} f_k'(a,\vec{v})\vec{e}_k$.

Diferenciabilidad de campos vectoriales

Sean $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, $a \in \mathring{A}$. Luego, existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subseteq A$.

decimos que f es *diferenciable* en a si existe una transformación lineal $T_a : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ y una función $E(a, h)$ tales que

$\forall\, \vec{v} \in \mathbb{R}^n,\ ||\vec{v}|| < r$ se verifica

$$f(a+\vec{v}) - f(a) = T_a(\vec{v}) + ||\vec{v}||\ E(a, \vec{v})\ (*)$$

con $\lim\limits_{||\vec{v}|| \to 0} E(a, \vec{v}) = \vec{0}$.

Si definimos T_a es llamada *diferencial de* f *en* a.

La ecuación anterior $(*)$, válida para todo $\vec{v}$ tal que $||\vec{v}|| < r$, se denomina *Fórmula de Taylor de primer orden* para $f(a+\vec{v})$.

Diferenciabilidad de campos vectoriales

Teorema

Sean $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ *diferenciable en* $a \in \mathring{A}$, *con diferencial* T_a. *Luego, existen todas las derivadas direccionales* $f'(a,\vec{v})$ *y resulta*

$$T_a(\vec{v}) = f'(a,\vec{v}).$$

Además, si $f = (f_1, \ldots, f_n)$ *y* $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ *se tiene,*

$$T_a\vec{v} = \sum_{k=1}^{n} (\nabla f_k(a) \cdot \vec{v})\ \vec{e}_k = (\nabla f_1(a) \cdot \vec{v}, \ldots, \nabla f_n(a) \cdot \vec{v}).$$

Diferenciabilidad de campos vectoriales

La ecuación $T_a(\vec{v}) = (\nabla f_1(a)\cdot\vec{v},\dots,\nabla f_n(a)\cdot\vec{v})$ se puede escribir en forma matricial como

$$T_a(\vec{v}) = Df(a)\cdot\vec{v}^t,$$

donde $Df(a)$ es una matriz $m\times n$ llamada *matriz jacobiana de f en a*.

$$J_f(a) = Df(a) = \begin{pmatrix} D_1f_1(a) & D_2f_1(a) & \dots & D_nf_1(a) \\ D_1f_2(a) & D_2f_2(a) & \dots & D_nf_2(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ D_1f_m(a) & D_2f_m(a) & \dots & D_nf_m(a) \end{pmatrix}.$$

Teorema

Si f es un campo vectorial diferenciable en a entonces f es continuo en a.

Regla de la cadena para campos vectoriales

Teorema

Sean f y g dos campos vectoriales tales que la función compuesta $h = f \circ g$ esté definida en un entorno del punto a.

Supongamos que g es diferenciable en a con diferencial T_a^g. Sea $g(a) = b$ y supongamos que f es diferenciable en b con diferencial T_b^f.

Entonces, h es diferenciable en a y su diferencial es

$$T_a^h = T_b^f \circ T_a^g.$$