Parte VI

Nociones de funciones de variable compleja

1. Introducción de funciones de variable compleja.

Definición 1 *Sea $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función de variable compleja a valores complejos, con $D = \mathrm{dom}(f)$, definida por $f(z) = w$ es decir $f(x+iy) = w = u + iv \in \mathbb{C}$ para cada $z = x + iy \in D$. Para cada $z \in D$ ponemos $f(z) = f(x+iy) = u + iv = u(x,y) + iv(x,y)$ donde u, v son campos escalares que definen la **parte real e imaginaria de** f, que notamos $Re(f) = u$ y $Im(f) = v$.*

Ejemplos:

1) Función identidad, sea $f(z) = z$ es decir, $f(x+iy) = x + iy$ con $u(x,y) = x$ y $v(x,y) = y$, $D = \mathrm{dom}(f) = \mathbb{C}$ y $\mathrm{im}(f) = \mathbb{C}$

2) Función módulo, sea $f(z) = |z| = \|z\| = \sqrt{x^2+y^2} \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, entonces $u(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ y $v(x,y) = 0$, $D = \mathrm{dom}(f) = \mathbb{C}$ y $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R}$

3) Función polinómica, sea $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, $D = \mathrm{dom}(P) = \mathbb{C}$ y $\mathrm{im}(P) = \mathbb{C}$

4) Función racional, sea $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ donde P, Q son funciones polinómicas complejas, $D = \mathrm{dom}(f) = \{z \in \mathbb{C} : Q(z) \neq 0\}\}$ y $\mathrm{im}(f) = \mathbb{C}$

5) Función exponencial, sea $f(z) = e^z$, si $z = x+iy$, $f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$, entonces $u(x,y) = e^x \cos y$ y $v(x,y) = e^x \sin y$. $D = \mathrm{dom}(f) = \mathbb{C}$ y $\mathrm{im}(f) \subseteq \mathbb{C}$

6) Funciones seno y coseno, primero definimos para $z = iy$,

$$\sin iy = \frac{e^{-y} - e^{y}}{2i} \qquad \cos iy = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2}$$

Luego $f(z) = \sin(x+iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy = \sin x \left(\dfrac{e^{-y}+e^{y}}{2}\right) + \cos x \left(\dfrac{e^{-y}-e^{y}}{2i}\right)$.
Veamos que

$$\sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}$$

En efecto,

$$e^{zi} = e^{i(x+iy)} = e^{-y+ix} = e^{-y}(\cos x + i \sin x)$$

análogamente

$$e^{-zi} = e^{-i(x+iy)} = e^{y-ix} = e^{y}(\cos(-x) + i\sin(-x)) = e^{y}(\cos x - i \sin x)$$

Restamos y multiplicamos por $\dfrac{1}{2i} = \dfrac{-i}{2}$

$$\begin{aligned}
\frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2}(-i) &= \frac{(-i)e^{-y}(\cos x + i\sin x) - (-i)e^{y}(\cos x - i \sin x)}{2} \\
&= \frac{\cos x(-ie^{-y} + ie^{y}) + \sin x(e^{-y} + e^{y})}{2} \\
&= \cos x(-i)\frac{e^{-y} - e^{y}}{2} + \sin x \cos iy \\
&= \cos x \sin iy + \sin x \cos iy = \sin z
\end{aligned}$$

Análogamente definimos $\cos z = \cos(x+iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy = \cos x \dfrac{e^{y}+e^{-y}}{2} - \sin x \dfrac{e^{-y}-e^{y}}{2i}$
Entonces

$$\cos z = \frac{e^{zi}+e^{-zi}}{2}$$

Pues

$$\begin{aligned}
\frac{e^{zi}+e^{-zi}}{2} &= \frac{1}{2}e^{-y}(\cos x + i\sin x) + \frac{1}{2}e^{y}(\cos x - i\sin x)\\
&= \cos x \frac{e^{y}+e^{-y}}{2} - \sin x \frac{e^{-y}-e^{y}}{2i} =\\
&= \cos x \cos iy - \sin x \sin iy = \cos z
\end{aligned}$$

7) Funciones hiperbólicas, sea $f(z) = \sinh z = \dfrac{e^{z}-e^{-z}}{2}$ $f(z) = \cosh z = \dfrac{e^{z}+e^{-z}}{2}$

Representación gráfica de una función compleja.
Para $z \in D$ =dom(f) sea $f(z) = f(x+iy) = w = u + iv$.
Ejemplo: a) $f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{u(x,y)} + \underbrace{2xy}_{v(x,y)}\, i$

Si $x = 1$, $\begin{cases} u = 1 - y^2 \\ v = 2y \end{cases} \Rightarrow u = 1 - \dfrac{v^2}{4}$;

Si $x = 2$, $\begin{cases} u = 4 - y^2 \\ v = 4y \end{cases} \Rightarrow u = 4 - \dfrac{v^2}{16}$

Si $x = -1$, $\begin{cases} u = 1 - y^2 \\ v = -2y \end{cases} \Rightarrow u = 1 - \dfrac{v^2}{4}$;

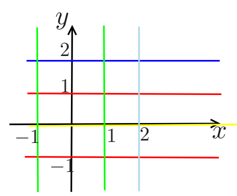
Si $x = 0$, $\begin{cases} u = -y^2 \\ v = 0 \end{cases} \Rightarrow u \leq 0$ y $v = 0$

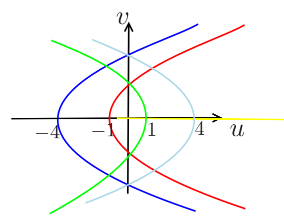
Si $y = 0$, $\begin{cases} u = x^2 \\ v = 0 \end{cases} \Rightarrow u \geq 0$ y $v = 0$;

Si $y = 1$, $\begin{cases} u = x^2 - 1 \\ v = 2x \end{cases} \Rightarrow u = \dfrac{v^2}{4} - 1$

Si $y = 2$, $\begin{cases} u = x^2 - 4 \\ v = 4x \end{cases} \Rightarrow u = \dfrac{v^2}{16} - 4$;

Si $y = -1$, $\begin{cases} u = x^2 - 1 \\ v = -2x \end{cases} \Rightarrow u = \dfrac{v^2}{4} - 1$





b) $f(z) = |z|$ $\quad g(z) = \arg(z)$, si $z \in \mathbb{C}$, $0 \leq \arg(z) \leq 2\pi$.

2. Función analítica.

Límite. Sean $z, z_0, L \in \mathbb{C}$, decimos que $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = L$ si y sólo si dado un entorno de L de radio ε, $E(L,\varepsilon)$, existe $\delta > 0$ tal que si $z \in E^*(z_0,\delta)$ (entorno reducido) entonces $f(z) \in E(L,\varepsilon)$. O sea,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad \text{tal que si} \quad 0 < \|z - z_0\| < \delta \Rightarrow \left\| f(z) - L \right\| < \varepsilon$$

Continuidad. Sean $z, z_0 \in \mathrm{dom} f$, decimos que f **es continua es** z_0 si y sólo si $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ es decir,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad \text{tal que si} \quad \|z - z_0\| < \delta \Rightarrow \left\| f(z) - f(z_0) \right\| < \varepsilon$$

Decimos que f **es continua** si lo es en todo $z_0 \in \mathrm{dom} f$.

Teorema 1

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L = a + ib \Longleftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{(x,y) \to (x_0, y_0)} u(x, y) = a \\ \lim\limits_{(x,y) \to (x_0, y_0)} v(x, y) = b \end{cases}$$

Demostración: recordar que $\forall z \in \mathbb{C}$, si $z = x + iy$ entonces $|x| \leq \|z\|$ y $|y| \leq \|z\|$. $\left\| f(z) - L \right\| = \sqrt{(u(x, y) - a)^2 + (v(x, y) - b)^2}$ y $\|z - z_0\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$. □

Definición 2 *Sean $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $h, k \in \mathbb{R}$, $h, k \neq 0$ planteamos los límites de los cocientes incrementales*

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{f(z + h) - f(z)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h + iy) - f(x + iy)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{u(x + h, y) + iv(x + h, y) - u(x, y) - iv(x, y)}{h} \\ &= u_x(x, y) + iv_x(x, y) \\ & \quad \textbf{derivada parcial respecto a la parte real} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{k \to 0} \frac{f(z + ik) - f(z)}{ik} &= \lim_{k \to 0} \frac{f(x + i(y + k)) - f(x + iy)}{ik} \\ &= \lim_{k \to 0} \frac{u(x, y + k) + iv(x, y + k) - u(x, y) - iv(x, y)}{ik} \\ &= (-i)(u_y(x, y) + iv_y(x, y)) \\ & \quad \textbf{derivada parcial respecto a la parte imaginaria} \end{aligned}$$

En general si ponemos $\Delta z \in \mathbb{C}$

Definición 3 *Se dice que $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es* **analítica** *en D abierto si y sólo si $\forall z \in D$ tal que $\Delta z \in \mathbb{C} - \{0\}$ y $z + \Delta z \in D$, existe*

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z)$$

Si $D = \mathbb{C}$ una función analítica es llamada **entera**.

Ejemplos de funciones analíticas.

$f(z) = z^n$ es analítica y $f'(z) = nz^{n-1}$. Las funciones polinómicas, racionales, exponenciales, trigonométricas, hiperbólicas son analíticas.

Propiedad 1 *Sean f, g analíticas en D entonces:*
1) $(f+g)' = f' + g'$
2) $(fg)' = f'g + fg'$
3) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ *para* $g \neq 0$.

Observación: Sea $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *analítica* con $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, con $u, v : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ campos escalares, entonces como existe f' $\forall z$ si $\Delta z = h_1 + ih_2$ es tal que $z + \Delta z \in D$, en particular si ponemos

♦ $h_2 = 0$ y $h_1 = h$ entonces

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h+iy) - f(x+iy)}{h} = u_x(x,y) + iv_x(x,y) \tag{25}$$

♦ $h_1 = 0$ y $h_2 = h$ entonces

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+i(y+h)) - f(x+iy)}{hi} = (-i)\left(u_y(x,y) + iv_y(x,y)\right) \\ &= v_y(x,y) - iu_y(x,y) \end{aligned} \tag{26}$$

De (25) y (26) se tiene

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ v_x = -u_y \end{cases}$$

Teorema 2 *Si f es una función analítica en D y $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, entonces*

$$\begin{cases} u_x(x,y) = v_y(x,y) \\ v_x(x,y) = -u_y(x,y) \end{cases} \qquad \textbf{Ecuaciones de Cauchy} - \textbf{Riemann}$$

Si las derivadas parciales son continuas y vale Cauchy-Riemann (CR) entonces f es analítica.

Por ejemplo, $f(z) = e^z$ es analítica pues, $f(x+iy) = e^{x+iy} = \underbrace{e^x \cos y}_{u(x,y)} + i\underbrace{e^x \sin y}_{v(x,y)}$ entonces

$$\begin{aligned} u_x &= e^x \cos y = v_y \\ v_x &= e^x \sin y = -u_y \end{aligned}$$

Corolario 1 *Si f es analítica y u, v son dos veces diferenciables con continuidad entonces u, v son* **armónicas**, *es decir $\Delta u = \Delta v = 0$.*

Demostración: De las ecuaciones de CR tenemos que u, v verifican la ecuación de Laplace en efecto

$$u_{xx} = v_{yx} \quad \text{y} \quad u_{yy} = -v_{xy} \quad \text{pero } v \in C^2 \text{ entonces } v_{xy} = v_{yx} \Longrightarrow \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

análogamente $\quad v_{xx} = -u_{yx} \;$ y $\; v_{yy} = u_{xy} \quad \Longrightarrow \Delta v = v_{xx} + v_{yy} = 0$ □

Consultar Titchmarsh "The theory of functions", Rudin "Principios de analísis matemático"
Ejemplo: Si $f(z)$ es la suma de la serie de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ en $\|z\| < r$ fácilmente se prueba que existe $f'(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n n z^{n-1}$, por ejemplo $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ es convergente $\forall z \in \mathbb{C}$ se define e^z como la suma de esa serie

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Vale con esta definición las propiedades

$$e^z e^w = e^{z+w}, \quad e^0 = 1$$

En particular, si $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} e^z &= e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x \left[\left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \ldots \right) + i \left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + \ldots \right) \right] \\ &= e^x (\cos y + i \sin y) \qquad \text{Formula de Euler} \end{aligned}$$

Como $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ y $e^{-iy} = \cos y - i \sin y$ se tiene

$$\begin{aligned} \cos y &= \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \\ \sin y &= \frac{e^{-iy} - e^{iy}}{2i} \end{aligned}$$

Se definen las funciones cuya serie de Taylor real conocemos con sólo cambiar x por z, como

$$\begin{aligned} \sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots \qquad r = \infty \\ \cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots \qquad r = \infty \\ \frac{1}{1+z^2} &= 1 - z^2 + z^4 + \ldots . \qquad |z| < 1 \end{aligned}$$

3. Integral de una función analítica a lo largo de una curva. Teorema de Cauchy como consecuencia de la fórmula de Green.

Sea C una curva de parametrización $z(t) = x(t) + iy(t)$ para $t \in [a, b]$, una partición del $[a, b]$ genera una partición en C (y recíprocamente), para cada $t_k \in [a_{k-1}, a_k]$ ponemos $z_k = x(t_k) + iy(t_k)$ un punto de la curva. Supongamos que $C \subset D$, y que f es analítica en $D \subset \mathbb{C}$. Consideramos las sumas

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(z_k^*\right)(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \left(u\left(x\left(t_k^*\right), y\left(t_k^*\right)\right) + iv\left(x\left(t_k^*\right), y\left(t_k^*\right)\right) \right) \left(x(t_k) - x(t_{k-1}) + i\left(y(t_k) - y(t_{k-1})\right)\right)$$

Con los razonamientos habituales estas sumas convergen a:

$$\int\limits_C u dx - v dy + i \int\limits_C v dx + u dy$$

Entonces definimos

$$\int\limits_C f(z)\, dz = \int\limits_C u dx - v dy + i \int\limits_C v dx + u dy \tag{27}$$

Teorema 3 (***Teorema de Cauchy***)**:** *Sean f analítica en D y C una curva simple cerrada contenida en D entonces*

$$\oint_C f(z)\,dz = 0$$

Demostración: Bajo estas hipótesis vale el Teorema de Green

1°) para el campo $(u, -v)$ es decir

$$\int_C udx - vdy = \iint_{C \cup \overset{\circ}{C}} \left(-v_x - u_y\right) dxdy \overset{\text{CR}}{=} 0$$

2°) para el campo (v, u) se tiene

$$\int_C vdx + udy = \iint_{C \cup \overset{\circ}{C}} \left(u_x - v_y\right) dxdy \overset{\text{CR}}{=} 0$$

Entonces

$$\oint_C f(z)\,dz = 0.$$

□

Fórmula de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{w - z}dw$$

En base a esta fórmula se demuestra que $f \in C^{\infty}$ y más aún

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}}dw$$