Universidad Nacional de Rosario

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

# Asignatura: Cálculo III (LM-PM) - 2018

## Apunte síntesis: Introducción y topología en $\mathbb{R}^n$.

Representamos a $\mathbb{R}^n$ por las $n$-uplas $(x_1, \ldots, x_n)$ con $x_i \in \mathbb{R}$, para $i = 1, .., n$. Por ejemplo: $x \in \mathbb{R}^3$ si $x = (x_1, x_2, x_3)$ con $x_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, 3$.

En lo que sigue llamaremos **puntos** o **vectores** de $\mathbb{R}^n$ a las $n$-uplas $u = (u_1, \ldots, u_n)$ y **escalares** a los números reales.

**Suma en** $\mathbb{R}^n$ : $u, v \in \mathbb{R}^n$

$$u + v = (u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n)$$

**Producto por escalares en** $\mathbb{R}^n$: $u \in \mathbb{R}^n$, $\alpha$ un escalar,

$$\alpha u = (\alpha u_1, \ldots, \alpha u_n)$$

**Producto escalar en** $\mathbb{R}^n$ : $u, v \in \mathbb{R}^n$

$$u \cdot v = \sum_{k=1}^{n} u_k v_k$$

**Base en** $\mathbb{R}^n$ : Hay una base (canónica) en $\mathbb{R}^n$, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ con $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, \ e_n = (0, \ldots, 0, 1)$ tal que si $u \in \mathbb{R}^n$ existen únicos escalares $u_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, \ldots, n$ tales que $u = u_1 e_1 + \cdots + u_n e_n$.

**Definición 1 (Espacio euclídeo n-dimensional):** *Considerando $\mathbb{R}^n$ como espacio vectorial sobre el cuerpo de los reales con el producto escalar, tenemos el* **espacio euclídeo $n$-dimensional**.

**Proposición 1** *Dados $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ y escalares $\alpha, \beta$ este producto escalar verifica:*

1. $u \cdot v = v \cdot u$,
2. $\alpha u \cdot v = \alpha(u \cdot v)$,
3. $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$,
4. $u \cdot u > 0$ *si* $u \neq \mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$ *y* $u \cdot u = 0$ *si y sólo si* $u = \mathbf{0}$,

**Norma en** $\mathbb{R}^n$ : $u \in \mathbb{R}^n$

$$\|u\| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2}$$

**Proposición 1 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz):** *Para todo $u, v \in \mathbb{R}^n$,*

$$|u \cdot v| \leq \|u\| \, \|v\| \, .$$

**Demostración:** Sea

$$T(\lambda) = (u + \lambda v) \cdot (u + \lambda v) = \|u + \lambda v\|^2 = \|u\|^2 + \lambda^2 \|v\|^2 + 2\lambda (u \cdot v).$$

Luego, $T(\lambda)$ es una forma cuadrática en $\lambda$ no negativa. Entonces debe ser $\Delta \leq 0$ pero $\Delta = (2(u \cdot v))^2 - 4\|v\|^2 \|u\|^2 \leq 0$.

Por lo tanto, $(u \cdot v)^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2$, i.e., $|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\| \square$

**Proposición 2** *Dados $u, v \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, esta función norma verifica:*
*i)* $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$
*ii)* $\|u\| \geq 0$ y $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = \mathbf{0}$
*iii)* $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ *desigualdad triangular*

**Demostración:** Las propiedades i y ii surgen trivialmente de la proposición 1. Ahora, en virtud de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos $\|u + v\|^2 = (u + v) \cdot (u + v) = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2(u \cdot v) \underset{\text{CS}}{\leq} \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\| \|v\| = (\|u\| + \|v\|)^2$ y sigue trivialmente iii$\square$

**Observación:** En un espacio euclídeo se puede definir una norma que verifique la proposición 2. Los espacios vectoriales donde está definida una función que verifica la proposición 2 (que llamamos norma) se llaman **espacios normados**. No siempre la norma proviene de un producto escalar, será necesario pedir propiedades adicionales.
Por ejemplo: $\mathbb{R}^2$ es un espacio normado con la norma $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{\langle (x_1, x_2), (x_1, x_2) \rangle}$ pero también se puede introducir en $\mathbb{R}^2$ la norma $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$, pero ésta no proviene de un producto escalar. Otra norma en $\mathbb{R}^2$ es $\|x\|_\infty = \text{máx}\{|x_1|, |x_2|\}$.

**Proposición 3** (**Ley del paralelogramo**) *Sea $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ con la norma definida por un producto escalar entonces para todo $x, y$ se verifica*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

**Teorema 1** *Si $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ es un espacio normado en el que vale la ley del paralelogramo entonces existe un producto escalar $\langle ., . \rangle$ que induce la norma $\|\cdot\|$ y viene dado por*

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

# 1. Topología de $\mathbb{R}^n$.

En los espacios normados es entonces posible definir una **distancia** entre puntos del espacio, a partir de una norma:

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

**Distancia en $\mathbb{R}^n$** : En el espacio normado $(\mathbb{R}^n, ||.||)$ definimos **distancia** (o **métrica**) en $\mathbb{R}^n$ como una función de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}_0^+$ tal que

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

**Proposición 4** *Dados $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, la función distancia $d$ verifica:*

1. $d(x, y) = d(y, x)$
2. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *desigualdad triangular*
3. $d(x, y) \geq 0$ *y* $d(x, y) = 0$ *si y sólo si* $x = y$

**Definición 2 (Bola en $\mathbb{R}^n$):** *Llamaremos* **esfera** *o* **bola de centro** $a \in \mathbb{R}^n$ **y radio** $r > 0$ *y notaremos* $B(a,r)$ *al conjunto*

$$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x,a) < r\}$$

*donde* $d(x,a)$ *es una función distancia en* $\mathbb{R}^n$*.*

**Ejemplos:** En $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$, $B(a,r) = (a-r,\ a+r)$, (intervalo abierto).

En $\mathbb{R}^2$, $B(a,r) = \left\{x = (x_1,x_2) :\ (x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2 < r^2\right\}$.

**Definición 3 (Abierto en $\mathbb{R}^n$):** *Un conjunto* $A$ *de* $\mathbb{R}^n$ *es* **abierto** *ssi para cada* $a \in A$ *existe* $r_a > 0$ *tal que* $B(a,r) \subseteq A$*.*

**Ejercicio:** Probar que si $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, entonces el intervalo $(a,\ b) = \{x \in \mathbb{R} :\ a < x < b\}$ es un abierto de $\mathbb{R}$. Considerar la distancia euclídea.

**Definición 4** *Dos distancias son* **equivalentes** *si definen la misma familia de abiertos, i.e. la misma topología.*

**Proposición 5** *Dos distancias o métricas* $d$, $d'$ *en* $\mathbb{R}^n$ *son equivalentes (y ponemos* $d \sim d'$*) si y sólo si para todo* $p \in \mathbb{R}^n$ *y todo* $r > 0$, *existen* $s,t > 0$ *tales que*

$$B(p,r) \subseteq B'(p,s) \quad \text{y} \quad B'(p,t) \subseteq B(p,r)$$

A partir de las normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$ en $\mathbb{R}^n$ se definen las diatancias:

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \qquad d_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{1/2} \qquad d_\infty(x,y) = \max_i |x_i - y_i|$$

Sin embargo, a pesar de que las funciones $d_i$ dan a $\mathbb{R}^n$ tres estructuras diferentes de espacio métrico, son *equivalentes.*

**Definición 5 (Entorno en $\mathbb{R}^n$):** *Llamaremos* **entorno de** $a$ *a todo subconjunto de* $\mathbb{R}^n$ *que contenga una bola de centro en* $a$ *y radio* $r$*. Notaremos con* $N(a)$ *(por neighborhood) al conjunto de todos los entornos de* $a$*, i.e.* $S \in N(a)$ *si existe* $r > 0$ *tal que* $a \in B(a,r) \subseteq S$*.*

**Ejercicio:** Si $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, considerar el intervalo cerrado $[a,\ b]$. Probar que si $x \in (a,\ b)$ entonces $[a,\ b]$ es un entorno de $x$. Demostrar que $a$ y $b$ no son puntos interiores de $[a,\ b]$.

**Observación:** Cada bola $B(a,r)$ es también un entorno de $a$.

## 1.1. Subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.

**Definición 6 (Punto interior e interior de un conjunto):** *Sea* $A \subseteq \mathbb{R}^n$*. Un punto* $a \in A$ *es un* **punto interior de** $A$ *si existe* $B(a,r) \subseteq A$*.*

*Llamaremos* **interior de** $A$*, y lo notaremos* $\mathring{A}$*, al conjunto de todos los puntos interiores de* $A$*.*

**Proposición 6** *Sea* $A \subseteq \mathbb{R}^n$*.* $A$ *es* **abierto** *ssi* $A = \mathring{A}$*.*

**Observaciones:**

- El conjunto vacío y $\mathbb{R}^n$ son abiertos.
- Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia cualquiera de abiertos entonces $\bigcup_{i\in I} A_i$ es abierto.

- Si $\{A_i\}_{i=1}^n$ es una familia finita de abiertos entonces $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ es abierto.

**Definición 7 (Conjunto cerrado):** *Un conjunto $B \subseteq \mathbb{R}^n$ es* **cerrado** *si $\mathcal{C}B$ es abierto.*

**Observaciones:**

- El conjunto vacío y $\mathbb{R}^n$ son cerrados.
- Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia cualquiera de cerrados entonces $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ es cerrado.
- Si $\{A_i\}_{i=1}^n$ es una familia finita de cerrados entonces $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ es cerrado.

**Definición 8 (Punto clausura y clausura de un conjunto):** *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ es un* **punto clausura de** *$A$ ssi todo entorno de $x$ tiene intersección no vacía con $A$.*

*Llamaremos* **clausura de** *$A$ y lo notaremos $\overline{A}$, al conjunto de todos los puntos clausura de $A$.*

**Proposición 7** *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. $A$ es cerrado ssi $A = \overline{A}$.*

**Ejemplos:**

- Si $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c < d$ y $e < f$, entonces el conjunto

$$P = \{(x, y, z) : \ a \leq x \leq b, \ c \leq x \leq d, \ e \leq x \leq f\},$$

  es cerrado en $\mathbb{R}^3$.

- El conjunto

$$P = \{(x, y, z) : \ a < x < b, \ c < x < d, \ e < x < f\},$$

  es abierto en $\mathbb{R}^3$.

- El conjunto $\{a\}$ es cerrado en $\mathbb{R}^n$ para todo $a \in \mathbb{R}^n$.

**Definición 9 (Punto frontera y frontera de un conjunto):** *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Un punto $a \in \mathbb{R}^n$ es* **punto frontera de** *$A$ si todo entorno de $a$ contiene puntos de $A$ y de $\mathcal{C}A$.*

*La* **frontera de** *$A$, que notaremos $\partial A$, es el conjunto formado por todos los puntos frontera de $A$.*

**Teorema 2** *Un conjunto es cerrado ssi contiene a su frontera.*

**Definición 10 (Punto exterior y exterior de un conjunto):** *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Un punto $a \in \mathbb{R}^n$ es un* **punto exterior de** *$A$ si existe $B(a, r) \subseteq \mathcal{C}A$.*

*El* **exterior de** *$A$, que notaremos $\text{ext}(A)$, es el conjunto de todos los puntos exteriuores de $A$.*

**Proposición 2** *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Luego,*

1. $\text{ext}(A) = \overset{\circ}{\mathcal{C}A}$
2. $\{\mathring{A}, \partial A, \text{ext}(A)\}$ *es una partición de $\mathbb{R}^n$.*