24. Evaluar $\iint_D x^2\,dx\,dy$ donde D está determinado por las dos condiciones $0 \le x \le y$ y $x^2 + y^2 \le 1$.

25. Integrar $\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,e^{-(x^2+y^2+z^2)}$ sobre la región descrita en el ejercicio 23.

$\boxed{\textbf{26.}}$ Evaluar lo siguiente usando coordenadas cilíndricas.

(a) $\iiint_B z\,dx\,dy\,dz$ donde B es la región dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, sobre el plano xy y debajo del cono $z = (x^2+y^2)^{1/2}$

(b) $\iiint_D (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}\,dx\,dy\,dz$ donde D es la región determinada por las condiciones $\frac{1}{2} \le z \le 1$ y $x^2+y^2+z^2 \le 1$

$\boxed{\textbf{27.}}$ Evaluar $\iint_B (x+y)\,dx\,dy$ donde B es el rectángulo en el plano xy con vértices en $(0,1)$, $(1,0)$, $(3,4)$ y $(4,3)$.

28. Evaluar $\iint_D (x+y)\,dx\,dy$ donde D es el cuadrado con vértices en $(0,0)$, $(1,2)$, $(3,1)$ y $(2,-1)$.

29. Sea E el elipsoide $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) \le 1$, donde a, b y c son positivos.

(a) Hallar el volumen de E.

(b) Evaluar $\iiint_E [(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2)]\,dx\,dy\,dz$. (IDEA: Cambiar variables y después usar coordenadas esféricas.)

$\boxed{\textbf{30.}}$ Usando coordenadas esféricas (ver la sección 1.4), calcular la integral de $f(\rho,\phi,\theta) = 1/\rho$ sobre la región en el primer octante de $\mathbf{R}^3$ que está acotada por los conos $\phi = \pi/4$, $\phi = \arctan 2$ y la esfera $\rho = \sqrt{6}$.

***31.** La función $T(u,v) = (u^2 - v^2, 2uv)$ transforma el rectángulo $1 \le u \le 2$, $1 \le v \le 3$ del plano uv en una región R del plano xy.

(a) Mostrar que T es uno a uno.

(b) Hallar el área de R usando la fórmula del cambio de variables.

***32.** Denotemos por R la región dentro de $x^2 + y^2 = 1$ pero fuera de $x^2 + y^2 = 2y$ con $x \ge 0$, $y \ge 0$.

(a) Esbozar esta región.

(b) Sea $u = x^2 + y^2$, $v = x^2 + y^2 - 2y$. Esbozar la región D en el plano uv que corresponde a R bajo este cambio de coordenadas.

(c) Calcular $\int_R xe^y\,dx\,dy$ usando este cambio de coordenadas.

***33.** Sea D la región acotada por $x^{3/2} + y^{3/2} = a^{3/2}$, para $x \ge 0$, $y \ge 0$ y los ejes coordenados $x = 0$, $y = 0$. Expresar $\int_D f(x,y)\,dx\,dy$ como una integral sobre el triángulo D^*, que es el conjunto de puntos $0 \le u \le a$, $0 \le v \le a - u$. (No intentar evaluarla.)

6.4 APLICACIONES DE LAS INTEGRALES DOBLES Y TRIPLES

En esta sección estudiaremos como aplicaciones: valores promedio, centros de masa, momentos de inercia y potencial gravitacional.

Si $x_1, \ldots, x_n$ son n números, su *promedio* está definido por $[x_i]_{\text{prom}} = (x_1 + \cdots + x_n)/n = (1/n)\sum_{i=1}^{n} x_i$. Este concepto nos lleva a definir el *valor promedio* de una función de una variable en el intervalo $[a, b]$ por

$$[f]_{\text{prom}} = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}.$$

Asimismo, para funciones de dos variables, la razón de la integral al área de D,

$$[f]_{\text{prom}} = \frac{\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy}{\iint\limits_D dx\,dy}. \tag{1}$$

se llama *valor promedio* de f sobre D.

EJEMPLO 1 *Hallar el valor promedio de* $f(x,y) = x\,\text{sen}^2(xy)$ *en* $D = [0,\pi] \times [0,\pi]$.

SOLUCIÓN Primero calculamos

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy &= \int_0^\pi \int_0^\pi x\,\text{sen}^2(xy)\,dx\,dy \\
&= \int_0^\pi \left[\int_0^\pi \frac{1-\cos(2xy)}{2} x\,dy\right] dx = \int_0^\pi \left[\frac{y}{2} - \frac{\text{sen}(2xy)}{4x}\right] x \Bigg|_{y=0}^{\pi} dx \\
&= \int_0^\pi \left[\frac{\pi x}{2} - \frac{\text{sen}(2\pi x)}{4}\right] dx = \left[\frac{\pi x^2}{4} + \frac{\cos(2\pi x)}{8\pi}\right] \Bigg|_0^\pi \\
&= \frac{\pi^3}{4} + \frac{\cos(2\pi^2) - 1}{8\pi}.
\end{aligned}$$

Así, este valor promedio de f, por la fórmula (1), es

$$\frac{\pi^3/4 + [\cos(2\pi^2) - 1]/8\pi}{\pi^2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\cos(2\pi^2) - 1}{8\pi^3} \approx 0.7839. \qquad \blacktriangle$$

Si se colocan $m_1, \ldots, m_n$ masas en los puntos $x_1, \ldots, x_n$ sobre el eje x, su *centro de masa* se define como

$$\overline{x} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}. \tag{2}$$

Esta definición surge de la observación siguiente: si tratamos de balancear masas en una palanca (figura 6.4.1), el punto de equilibrio $\overline{x}$ ocurre donde el momento total (masa por la distancia al punto de equilibrio) es cero, esto es, donde

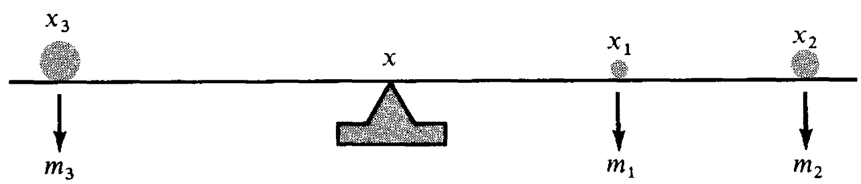

Figura 6.4.1 La palanca está equilibrada si $\sum(x_i - \overline{x})m_i = 0$.

$\sum m_i(x_i - \overline{x}) = 0$; un principio físico que se remonta a Newton asegura que esta condición significa que no hay tendencia a que la palanca gire.

Para una densidad de masa continua $\rho(x)$ a lo largo de la palanca, el análogo de la fórmula (2) es

$$\overline{x} = \frac{\int x\rho(x)\,dx}{\int \rho(x)\,dx}. \tag{3}$$

Para placas bidimensionales, esto se generaliza (ver la figura 6.4.2) a

$$\overline{x} = \frac{\iint\limits_D x\rho(x,y)\,dx\,dy}{\iint\limits_D \rho(x,y)\,dx\,dy} \quad \text{y} \quad \overline{y} = \frac{\iint\limits_D y\rho(x,y)\,dx\,dy}{\iint\limits_D \rho(x,y)\,dx\,dy}. \tag{4}$$

donde, de nuevo, $\rho(x,y)$ es la densidad de masa.

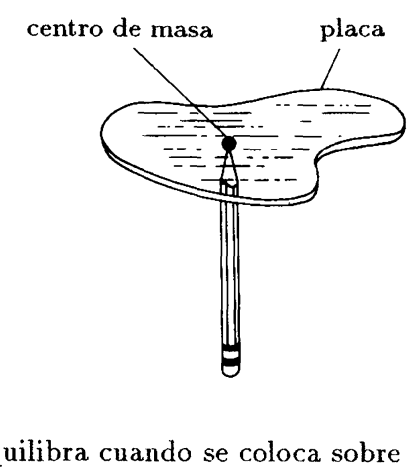

Figura 6.4.2 La placa se equilibra cuando se coloca sobre su centro de masa.

EJEMPLO 2 *Hallar el centro de masa del rectángulo* $[0,1] \times [0,1]$ *si la densidad de masa es* e^{x+y}.

SOLUCIÓN Calculamos primero la masa total:

$$\iint_D e^{x+y}\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 e^{x+y}\,dx\,dy = \int_0^1 (e^{x+y}|_{x=0}^1)\,dy$$
$$= \int_0^1 (e^{1+y} - e^y)\,dy$$
$$= (e^{1+y} - e^y)|_{y=0}^1 = e^2 - e - (e-1) = e^2 - 2e + 1.$$

El numerador en la fórmula (4) para $\overline{x}$ es

$$\int_0^1\int_0^1 xe^{x+y}\,dx\,dy = \int_0^1 (xe^{x+y} - e^{x+y})|_{x=0}^1\,dy$$
$$= \int_0^1 [e^{1+y} - e^{1+y} - (0e^y - e^y)]\,dy$$
$$= \int_0^1 e^y\,dy = e^y|_{y=0}^1 = e - 1,$$

de modo que

$$\overline{x} = \frac{e-1}{e^2-2e+1} = \frac{e-1}{(e-1)^2} = \frac{1}{e-1} \approx 0.582.$$

Se pueden intercambiar los papeles de x y y en todos estos cálculos, entonces también $\overline{y} = 1/(e-1) \approx 0.582$. ▲

Para una región W en el espacio con densidad de masa $\rho(x,y,z)$, estas fórmulas se generalizan como sigue:

$$\text{volumen} = \iiint_W dx\,dy\,dz, \tag{5}$$

$$\text{masa} = \iiint_W \rho(x,y,z)dx\,dy\,dz. \tag{6}$$

$$\text{centro de masa} = (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}),$$

donde

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{\iiint_W x\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\text{masa}},\\ \overline{y} &= \frac{\iiint_W y\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\text{masa}},\\ \overline{z} &= \frac{\iiint_W z\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\text{masa}}. \end{aligned} \tag{7}$$

El *valor promedio* de una función f en una región W está definido por

$$[f]_{\mathrm{prom}} = \frac{\displaystyle\iiint_W f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\displaystyle\iiint_W dx\,dy\,dz}. \tag{8}$$

EJEMPLO 3 *El cubo* $[1,2]\times[1,2]\times[1,2]$ *tiene densidad de masa* $\rho(x,y,z) = (1+x)e^z y$. *Hallar la masa de la caja.*

SOLUCIÓN La masa de la caja es, por la fórmula (6),

$$\begin{aligned}
&\int_1^2\int_1^2\int_1^2 (1+x)e^z y\,dx\,dy\,dz\\
&= \int_1^2\int_1^2 \left[\left(x+\frac{x^2}{2}\right)e^z y\right]_{x=1}^{x=2} dy\,dz = \int_1^2\int_1^2 \frac{5}{2}e^z y\,dy\,dz\\
&= \int_1^2 \frac{15}{4}e^z\,dz = \left[\frac{15}{4}e^z\right]_{x=1}^{x=2}\\
&= \frac{15}{4}(e^2-e). \qquad \blacktriangle
\end{aligned}$$

Si una región y su densidad de masa son simétricas según una reflexión en un plano, entonces el centro de masa está en ese plano. Por ejemplo, en la fórmula (7) para $\overline{x}$, si la región y la densidad de masa son simétricas en el plano yz, entonces el integrando es impar en x, de modo que $\overline{x}=0$. Esta manera de usar la simetría se ilustra en el ejemplo siguiente. (Ver además el ejercicio 17.)

EJEMPLO 4 *Hallar el centro de masa de la región hemisférica* W *definida por las desigualdades* $x^2+y^2+z^2 \le 1$, $z \ge 0$. *(Suponer que la densidad es constante.)*

SOLUCIÓN Por simetría, el centro de masa debe estar en el eje z, de modo que $\overline{x} = \overline{y} = 0$. Para hallar $\overline{z}$ debemos calcular, por la fórmula (7), $I = \iiint_W z\,dx\,dy\,dz$. El hemisferio es de los tipos I, II y III; lo consideraremos de tipo III. Entonces la integral I se convierte en ...

$$I = \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \int_{-\sqrt{1-y^2-z^2}}^{\sqrt{1-y^2-z^2}} z\,dx\,dy\,dz.$$

Como z es constante para las integraciones en x y en y, podemos sacarla de los signos de integral y obtener

$$I = \int_0^1 z\left(\int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \int_{-\sqrt{1-y^2-z^2}}^{\sqrt{1-y^2-z^2}} z\,dx\,dy\right) dz.$$

En lugar de calcular explícitamente las dos integrales interiores, observamos que se trata ni más ni menos que de la integral doble $\iint_D dx\,dy$ sobre el disco $x^2+y^2 \leq 1-z^2$, considerado como región del tipo 2. El área de este disco es $\pi(1-z^2)$, de modo que

$$I = \pi \int_0^1 z(1-z^2)\,dz = \pi \int_0^1 (z-z^3)\,dz = \pi \left[\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

El volumen del hemisferio es $\frac{2}{3}\pi$, de modo que $\overline{z} = (\pi/4)/(\frac{2}{3}\pi) = \frac{3}{8}$. ▲

EJEMPLO 5 *La temperatura en los puntos del cubo $W = [-1,1] \times [-1,1] \times [-1,1]$ es proporcional al cuadrado de la distancia al origen.*

(a) *¿Cuál es la temperatura promedio?*
(b) *¿En qué puntos del cubo la temperatura es igual a la temperatura promedio?*

SOLUCIÓN (a) Sea c la constante de proporcionalidad de modo que $T = c(x^2+y^2+z^2)$ y la temperatura promedio es $[T]_{\text{prom}} = \frac{1}{8}\iiint_W T\,dx\,dy\,dz$, pues el volumen del cubo es 8. Así,

$$[T]_{\text{prom}} = \frac{c}{8}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz.$$

La integral triple es la suma de las integrales de x^2, y^2 y z^2. Como x, y y z entran de manera simétrica en la descripción del cubo, las tres integrales serán iguales, de modo que

$$[T]_{\text{prom}} = \frac{3c}{8}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} z^2\,dx\,dy\,dz = \frac{3c}{8}\int_{-1}^{1} z^2 \left(\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} dx\,dy\right) dz.$$

La integral interior es igual al área del cuadrado $[-1,1] \times [-1,1]$. El área de ese cuadrado es 4, de modo que

$$[T]_{\text{prom}} = \frac{3c}{8}\int_{-1}^{1} 4z^2\,dz = \frac{3c}{2}\left(\frac{z^3}{3}\right)\bigg|_{-1}^{1} = c.$$

(b) La temperatura es igual a la temperatura promedio cuando $c(x^2+y^2+z^2) = c$, esto es, en la esfera $x^2+y^2+z^2 = 1$, que está inscrita en el cubo W. ▲

Otro concepto importante en mecánica, que se necesita para estudiar la dinámica de un cuerpo rígido en rotación, es el de *momento de inercia*. Si el sólido W tiene densidad uniforme ρ, el *momento de inercia* alrededor del eje x está definido por

$$I_x = \iiint_W \rho(y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz. \tag{9}$$

De manera análoga,

$$I_y = \iiint_W \rho(x^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz, \qquad I_z = \iiint_W \rho(x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz. \tag{9}$$

El momento de inercia mide la respuesta de un cuerpo a intentos de girarlo; es análogo a la masa de un cuerpo, que mide su respuesta al intento de moverlo. Sin embargo, a diferencia del movimiento de traslación, los momentos de inercia dependen de la forma y no sólo de la masa total. (Es más difícil poner a girar un mástil que una bola compacta con la misma masa).

EJEMPLO 6 *Calcular el momento de inercia I_z del sólido arriba del plano xy acotado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, suponiendo que a y la densidad de masa son constantes.*

SOLUCIÓN El paraboloide y el cilindro se intersecan en el plano $z = a^2$. Usando coordenadas cilíndricas, hallamos de (9), que

$$I_z = \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^{r^2} \rho r^2 \cdot r\, dz\, d\theta\, dr = \rho \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^{r^2} r^3\, dz\, d\theta\, dr = \frac{\pi \rho a^6}{3}. \qquad \blacktriangle$$

Una interesante aplicación física de la integración triple es la determinación de campos gravitacionales de objetos sólidos. En el ejemplo 6, sección 2.5, se mostró que el campo de fuerza gravitacional $\mathbf{F}(x, y, z)$ de una partícula es el negativo del gradiente de una función $V(x, y, z)$ llamada potencial gravitacional. Si hay una masa puntual M en (x, y, z), entonces el potencial gravitacional que actúa sobre una masa m en (x_1, y_1, z_1) debido a esta masa, es $GmM[(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2]^{-1/2}$, donde G es la constante de gravitación universal.

Si nuestro objeto atractor es un dominio extendido W con densidad de masa $\rho(x, y, z)$, podemos pensarlo como formado de regiones infinitesimales con forma de caja con masas $dm = \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ localizadas en los puntos (x, y, z). El potencial gravitacional total para W se obtiene, entonces, "sumando" los potenciales de las masas infinitesimales —esto es, como una integral triple (ver la figura 6.4.3.):

$$V(x_1, y_1, z_1) = Gm \iiint_W \frac{\rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}}. \tag{10}$$