PRÁCTICA 7 - Series de Fourier

1. Sean f una función periódica de período L, integrable en $[0, L]$ y $a \in \mathbb{R}$. Mostrar que f es integrable en $[a, a+L]$ y vale
$$\int_0^L f(x)\,dx = \int_a^{a+L} f(x)\,dx\ .$$

2. Sean f y g dos funciones seccionalmente continuas y periódicas de período 2π. Sean las series de Fourier generadas por f y g, $\quad S(f) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)$ y $S(g) = \frac{A_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nx) + B_n \operatorname{sen}(nx)$.

   Mostrar que si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la serie de Fourier de la función $\alpha f + \beta g$ resulta
$$S(\alpha f + \beta g) = \frac{\alpha a_0 + \beta A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta A_n)\cos(nx) + (\alpha b_n + \beta B_n)\operatorname{sen}(nx).$$

3. Sea f una función seccionalmente continua y periódica de período 2π. Demostrar los siguientes apartados.

   a) Si f es par, entonces $a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$ y $b_n = 0$.

   b) Si f es impar, entonces $a_n = 0$ y $b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx$.

   c) Si $f(x+\pi) = f(x)$ para todo x, entonces $a_{2n+1} = b_{2n+1} = 0$.

   d) Si $f(x+\pi) = -f(x)$ para todo x, entonces $a_{2n} = b_{2n} = 0$.

   Desarrollar una propiedad similar a las dadas en los ítems anteriores para el caso en que f sea una función *seccionalmente continua* y periódica de período $2L$.

4. Obtener la serie de Fourier generada por las siguientes funciones periódicas, cuyas definiciones se indican en cada caso en un período. Dibujar las gráficas de las funciones y compararlas con las de las sumas parciales de las series.

   a) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x \leqq 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \leqq \pi \end{cases}$

   b) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -\pi < x \leqq 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \leqq \pi \end{cases}$

   c) $f(x) = |x| \quad \text{si } -\pi < x \leqq \pi$

   d) $f(x) = |\cos x| \ \text{ si } 0 < x \leqq 2\pi$

   e) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x \leqq 0 \\ x & \text{si } 0 < x \leqq \pi \end{cases}$

   f) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x \leqq 0 \\ \operatorname{sen} x & \text{si } 0 < x \leqq \pi \end{cases}$

   g) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x \quad \text{si } 0 < x \leqq 2\pi$

   h) $f(x) = x^2 \quad \text{si } -\pi < x \leqq \pi$

   i) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x \leqq 0 \\ -x^2 & \text{si } 0 < x \leqq \pi \end{cases}$

   j) $f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } -1 < x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1-x & \text{si } 0 < x \leqq 1 \end{cases}$

   k) $f(x) = \cos 2x \quad \text{si } 0 < x \leqq \frac{\pi}{2}$

   l) $f(x) = e^{2x} \quad \text{si } 0 < x \leqq 1$

5. Para cada una de las funciones f del ejercicio anterior, analizar en qué puntos del eje real la serie de Fourier generada por f representa a f. Si se indica con S la función suma, comparar las gráficas de S y f.

6. A partir de lo mostrado en el Ejercicio 3, obtener un desarrollo en serie de Fourier que represente a la función f indicada en cada uno de los siguientes casos y del tipo que se pide:

   a) $f(x) = x^2 - x,\ 0 < x < 1$ y que contenga solo senos.

   b) $f(x) = x \cos x,\ 0 < x < \pi$ y que contenga solo cosenos.

   c) $f(x) = x,\ 0 < x < 1$ y que contenga solo senos y armónicas pares.

   d) $f(x) = \cos x,\ 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ y que contenga sólo senos y armónicas impares.

   En cada caso, dibujar la gráfica de la extensión necesaria de f para obtener el desarrollo con las características deseadas y dibujar la gráfica de la función suma de la serie.

7. *a*) Evaluendo el desarrollo de la función f del Ejercicio 4 h) en el punto $x = \pi$, calcular la suma de los recíprocos de los cuadrados de los números naturales,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} .$$

   b) Evaluendo el desarrollo de la función f del Ejercicio 4 c) en el punto $x = 0$, calcular la suma de los recíprocos de los cuadrados de los números naturales impares,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} .$$

   c) A partir de los dos resultados anteriores, calcular la suma de los recíprocos de los cuadrados de los números naturales pares,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} .$$

8. *a*) Mostrar que la integral impropia $\int\limits_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,\mathrm{d}t$ es convergente.

   b) En la prueba del Teorema Principal de Fourier se mostró que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(x+t)\, \frac{\operatorname{sen}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]}{\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{f(x+0)}{2} .$$

   Usar esto considerando la función $f(t) = \dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}{t}$ y el punto $x = 0$, para mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{\pi}{2} .$$

   c) Combinando los apartados anteriores, concluir que

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{\pi}{2} .$$