PRÁCTICA 6 - Sucesiones y Series Funcionales- Series de Potencias

1. Estudiar la convergencia de las siguientes sucesiones de funciones. En cada caso determinar la función límite y si la convergencia es uniforme.

(i) $f_n(x) = nx\,(1-x)^n \quad x \in [0,1]$ (ii) $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n}} \quad x \in \mathbb{R}$

(iii) $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(nx)}{\sqrt{n}} \quad x \in \mathbb{R}$ (iv) $f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^{2n}} \quad x \in \mathbb{R}$

(v) $f_n(x) = \sqrt{n}xe^{-nx} \quad x \in \mathbb{R}$ (vi) $f_n(x) = nxe^{-nx} \quad x \in \mathbb{R}$

(vii) $f_n(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^n & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}.$

2. Estudiar la convergencia de las siguientes series de funciones. Determinar, en cada caso, si la convergencia es uniforme.

(i) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n} \quad |x| < 1$ (ii) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(x^n - x^{n-1}\right) \quad x \in [0,1]$

(iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2} \quad x \in \mathbb{R}$ (iv) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{1-x^{2n}}}{2^n} \quad x \in [-1,1]$

(v) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{nx} \quad x \in [-2,-1]$ (vi) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x}{x^2n^2+n} \quad x \in [0,\infty)$

(vii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{3^n x}\right) \quad x \in [a,\infty)\,,\ a > 0$.

3. Sea f_0 continua en $[0,a]$. Se define la sucesión $\{f_n\}$ por

$$f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t)\;dt \quad n \in \mathbb{N},\ x \in [0,a]\,.$$

Probar que f_n converge uniformemente a la función nula.

4. Hallar el $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, donde

$$f_n(x) = \frac{n^2x^2}{1+n^2x^2}, \quad x \in [-1,1]\,.$$

Mostrar que la convergencia no es uniforme, pero sin embargo

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^1 f_n(x)dx = \int_{-1}^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

5. Hallar el $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, donde

$$f_n(x) = n^2 \chi_{\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]}(x), \quad x \in [0,1]\,.$$

Mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

6. Sea $\{f_n\}$ una sucesión que converge uniformemente a f en S y $M > 0$ una constante tal que $|f_n(x)| \leq M,\ \forall x \in S,\ n \in \mathbb{N}$. Sea g una función continua en $[-M, M]$.

   Se define $h_n = g\left(f_n(x)\right)$ y $h = g\left(f(x)\right)$ para $x \in S$. Probar que $h_n \to h$ uniformemente en S.

7. A partir de la serie geométrica $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$, en los casos en que sea posible, derivar o integrar término a término para obtener los siguientes resultados, válidos si $|x| < 1$.

(i)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n = \dfrac{x}{(1-x)^2}$	(ii)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2x^n = \dfrac{x^2+x}{(1-x)^3}$
(iii)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3x^n = \dfrac{x^3+4x^2+x}{(1-x)^4}$	(iv)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n} = \log\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$
(v)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{2n-1}}{2n-1} = \frac{1}{2}\log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$	(vi)	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \dfrac{1}{(1-x)^2}$
(vii)	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n = \dfrac{1}{(1-x)^3}$	(viii)	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}x^n = \dfrac{1}{(1-x)^4}$

8. Si $z \in \mathbb{C}$, determinar el radio de convergencia r de las siguientes series de potencias. Analizar la convergencia en algunos puntos de la frontera, si r es finito.

(i)	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{2^n}$	(ii)	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{(n+1)2^n}$
(iii)	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(z+3)^n}{(n+1)2^n}$	(iv)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n2^{2n}z^{2n}}{2n}$
(v)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-(-2)^n\right)z^n$	(vi)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!z^n}{n^n}$
(vii)	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n\left(z+1\right)^n}{n^2+1}$	(vii)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}z^n$

9. Para cada una de las siguientes series reales de potencias determinar el conjunto de todos los valores reales x para los que converge y calcular su suma.

(i)	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^nx^{2n}$	(ii)	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{3^{n+1}}$	(iii)	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} nx^n$
(iv)	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^nnx^n$	(v)	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-2)^n\frac{n+2}{n+1}x^n$	(vi)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^nx^n}{n}$
(vii)	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$	(viii)	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^nx^{3n}}{n!}$	(ix)	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{(n+3)!}$

10. Cada una de las siguientes funciones tiene una representación en series de potencias de x. Comprobar que los coeficientes tienen la forma dada y demostrar que la serie converge para los valores indicados.

(i) $a^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\log^n a}{n!} x^n,\ x \in \mathbb{R},\ a > 0.$ (ii) $\operatorname{senh} x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ x \in \mathbb{R}.$

(iii) $\frac{1}{2-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}},\ |x| < 2.$ (iv) $\frac{12-5x}{6-5x-x^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{6^n}\right) x^n,\ |x| < 1.$

(v) $\operatorname{sen}^2 x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!},\ x \in \mathbb{R}.$ (vi) $\frac{x}{1+x-2x^2} = \frac{1}{3} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - (-2)^n\right) x^n,\ |x| < \frac{1}{2}.$

11. Dadas dos sucesiones $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, se define la sucesión convolución de ambas, a la sucesión $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ definida, para todo n, por el elemento

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-n} \ ,$$

y se nota

$$\{c_n\} = \{a_n\} * \{b_n\} \ .$$

a) Mostrar que la convolución de sucesiones es una operación conmutativa.

b) Motrar que si la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ converge a un valor s_1 y la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ es convergente a s_2, y $\{c_n\} = \{a_n\} * \{b_n\}$, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = s_1 s_2 \ .$$

c) Mostrar que si $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ son dos series de potencias complejas, que convergen respectivamente a $f(z)$ y $g(z)$, entonces, para $\{c_n\} = \{a_n\} * \{b_n\}$, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

converge a $f(z)g(z)$. Analizar el radio de convergencia de la última serie en relación a los radios de las series originales.