Análisis Matemático III - PM - LM - PF - LF - 2019.
Docentes: Pablo Torres, Alberto Ferrari, Tomás Brizio.
https://www.fceia.unr.edu.ar/~ptorres/AMIII

PRÁCTICA 5 - Sucesiones y Series Numéricas

Primera Etapa

Sucesiones numéricas

1. Responder las siguientes preguntas:

   a) Dadas dos sucesiones convergentes $\{a_n\}_n$ y $\{b_n\}_n$ y los conjuntos de elementos $A = \{a_n\}$ y $B = \{b_n\}$, tales que $A = B$, ¿se puede afirmar que $\lim a_n = \lim b_n$?

   b) ¿Es cierto que toda sucesión acotada es convergente?

   c) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, ¿se puede afirmar que el límite $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^2 = 0$?

2. Dadas las siguientes sucesiones $\{a_n\}_n$ determinar si son convergentes, divergentes u oscilantes y hallar el límite de cada sucesión convergente. Además, determinar los puntos de acumulación si hubiera.

$$\begin{array}{llll} i)\ \ a_n = \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n} & ii)\ \ a_n = \frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2+1}{n} & iii)\ \ a_n = \cos\frac{n\pi}{2} & iv)\ \ a_n = 1 + (-1)^n \\ v)\ \ a_n = \frac{n+3}{n^3+4} & vi)\ \ a_n = \left(1 - \frac{1}{3n}\right)^{2n} & vii)\ \ a_n = \frac{\log n}{\log 5n} & viii)\ \ a_n = \frac{\log(n+3)}{\log n}\ . \end{array}$$

3. (Teorema 1.2.1.) Demostrar las siguientes afirmaciones:

   a) El límite de una sucesión numérica, si existe, es único.

   b) Si $a_n \to l$, entonces $|a_n| \to |l|$.

   c) Si $a_n \to 0$, y $\{b_n\}$ está acotada, $a_n \cdot b_n \to 0$.

   d) Si $a_n \to l_1$, $b_n \to l_2$, y $c \in \mathbb{R}$,
$$a_n \pm b_n \to l_1 \pm l_2, \quad c\, a_n \to c\, l_1, \quad a_n \cdot b_n \to l_1 \cdot l_2,$$
   y si $l_2 \neq 0$ y $b_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{l_1}{l_2}.$$

   e) Si para $n > N$, $a_n \leq b_n \leq c_n$, y además valen $a_n \to l$ y $c_n \to l$, entonces $b_n \to l$.

4. Se dice que dos sucesiones a_n y b_n son infinitos equivalentes si $\lim a_n = \lim b_n = \infty$ y $\lim \frac{a_n}{b_n} = 1$. Demostrar que son infinitos equivalentes:

   a) $a_n = \log(n+k)$, $b_n = \log(kn)$ y $c_n = \log n$.

   b) $a_n = P(n)$ y $b_n = kn^p$ siendo kn^p el término de mayor grado en el polinomio $P(n)$.

   c) $a_n = (n+1)^\alpha - n^\alpha$ y $b_n = \alpha n^{\alpha-1}$, siendo $\alpha \in \mathbb{N}$.

5. *a*) Mostrar que si $0 < a < 2$, entonces $0 < \sqrt{2a} < 2$.

   b) Mostrar que la sucesión:
$$\left\{ \sqrt{2}\ ,\ \sqrt{2\sqrt{2}}\ ,\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}\ ,\ ... \right\}$$
   converge.

c) Calcular el límite de la sucesión.

6. (Proposición 1.3.1.) Una sucesión es convergente a un valor l si y sólo si todas sus subsucesiones son convergentes a l.

7. (Proposición 1.3.2.) Sea $l \in \mathbb{R}$. Si una sucesión es tal que toda subsucesión tiene una sub-subsucesión que converge a l, entonces la sucesión original converge a l.

8. (Corolario 1.4.1.) Una sucesion acotada y con un único punto de acumulación es convergente (y converge a dicho punto de acumulación).

9. (Proposición 1.4.3). Toda sucesión convergente es de Cauchy.

Series numéricas

10. Razonar con *exactitud* sobre la veracidad de las siguientes afirmaciones:

    a) Si a una serie le quitamos un número finito de términos, la suma de la serie no varía.
    b) Si una serie es convergente, el límite de su término general es 0.
    c) Si el límite de una sucesión es 0, la serie asociada es convergente.
    d) Si $\sum a_n$ es una serie de términos positivos y convergente, entonces $\sum a_n^2$ también es convergente.
    e) Si $\sum a_n$ es una serie de términos positivos y convergente, entonces $\sum \sqrt{a_n}$ también es convergente.
    f) Si $a_n \geq 0$ y $\sum a_n$ converge, entonces $\sum \frac{1}{a_n}$ diverge.

11. (Teorema 2.2.1.) Sean $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ series convergentes y α y β constantes. Luego, la serie $\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k)$ converge y verifica:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

.

12. (Corolario 2.2.1.) Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ no converge, entonces $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ no converge.

13. (Teorema 2.3.1.) Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones de números tales que:

$$a_n = b_n - b_{n+1} \ , \quad n \in \mathbb{N} \ .$$

    Mostrar que entonces la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y sólo si $\{b_n\}_n$ converge, en cuyo caso se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = b_1 - L \ , \quad \text{donde } L = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

    Una serie del tipo $\sum (b_n - b_{n+1})$ es llamada *serie telescópica*.

14. En cada caso probar que la serie converge y que la suma es la indicada.

$$i) \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \quad ii) \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}} = 3 \quad iii) \ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} = \frac{3}{4} \quad iv) \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n} = \frac{3}{2}$$

$$v) \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1 \quad vi) \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} = 1 \quad vii) \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+n^2+n}{2^{n+1}n(n+1)} = 1 \quad viii) \ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{3^n} - \frac{4}{2^n}\right) = -\frac{1}{2} \ .$$

15. Analizar el carácter de las siguientes series:

$$i)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(4n-3)(4n-1)} \quad ii)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n-1}\log(4n+1)}{n(n+1)} \quad iii)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n} \quad iv)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$$

$$v)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n} \quad vi)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \quad vii)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^s} \quad viii)\ \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$$

$$ix)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!} \quad x)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}} \quad xi)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n} \quad xii)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^{1/n}}\ .$$

16. Analizar el carácter de las siguientes series y en cada caso de convergencia, determinar si la serie converge abosluta o condicionalmente:

$$i)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \quad ii)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s} \quad iii)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{2^n} \quad iv)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$$

$$v)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\log(e^n+e^{-n})} \quad vi)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^{37}}{(n+1)!} \quad vii)\ \sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}(\log n) \quad viii)\ \sum_{n=1}^{\infty}\log(n\operatorname{sen}(\tfrac{1}{n}))$$

$$ix)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\arctan\frac{1}{2n+1} \quad x)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+(-1)^n)^s}$$

$xi)\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, donde $a_n = \begin{cases} 1/n & \text{si n es un cuadrado} \\ 1/n^2 & \text{si n no es un cuadrado} \end{cases}$

$xii)\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, donde $a_n = \begin{cases} 1/n^2 & \text{si n es impar} \\ -1/n & \text{si n es par} \end{cases}$

Segunda Etapa

Sucesiones numéricas

1. Dadas las siguientes sucesiones $\{a_n\}_n$ determinar si son convergentes, divergentes u oscilantes y hallar el límite de cada sucesión convergente. Además, determinar los puntos de acumulación si hubiera.

$$i)\ a_n=\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n-1} \quad ii)\ a_n=n\left(1-\sqrt[3]{1-\tfrac{a}{n}}\right) \quad iii)\ a_n=\frac{n}{2^n} \quad iv)\ a_n=2^{1/n}$$

$$v)\ a_n=\left(1+\tfrac{i}{2}\right)^n \quad vi)\ a_n=e^{-\pi ni/2} \quad vii)\ a_n=\frac{1}{n}e^{-\pi ni/2} \quad viii)\ a_n=ne^{\pi ni/2}\ .$$

2. Estudiar la convergencia de las siguientes sucesiones definidas por recurrencia:

$$i)\ a_1=1\ ,\ a_n=\sqrt{2+a_{n-1}}\ , \quad ii)\ a_1>0\ ,\ a_n=\frac{1}{2}\left(a_{n-1}+\frac{k}{a_{n-1}}\right)\ , \text{ con } k>0\ ,$$

$$iii)\ a_1=-\frac{3}{2}\ ,\ a_{n+1}=\frac{3\,(1+a_n)}{3+a_n}\ .$$

3. (Teorema 1.3.3.) Una sucesion numérica compleja es convergente si y sólo si las sucesiones de su parte real e imaginaria son ambas convergentes.

4. Probar los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2-2n+1}{3n^3+2}=0\ , \quad \lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^2-2n+1}{4n^2-n-1}=\frac{5}{4}\ , \quad \lim\limits_{n\to\infty}\frac{-n^3-n+2}{4n^2-2}=-\infty.$

b) Si $a>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^a}=0.$

c) Si $|x|<1$, $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0.$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\log n)^a}{n^b} = 0,\ \forall a, b > 0.$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1.$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a,\ \forall a \in \mathbb{R}.$

Series numéricas

5. Sea f una función real monótona creciente y acotada en el intervalo $[0,1]$. Se definen las sucesiones $\{s_n\}$ y $\{t_n\}$ por

$$s_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right), \quad t_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

a) Demostrar que

$$s_n \ \leqq \ \int_0^1 f(x)\, dx \ \leqq \ t_n \quad \text{y} \quad 0 \ \leqq \ \int_0^1 f(x)\, dx - s_n \ \leqq \ \frac{f(1) - f(0)}{n} \ .$$

b) Demostrar que $\{s_n\}$ y $\{t_n\}$ convergen ambas al mismo límite $\int_0^1 f(x)\, dx$.

c) Utilizando el ejercicio anterior, establecer las siguientes relaciones.

$$i) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{3} \qquad ii) \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \log 2$$

$$i) \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2} = \frac{\pi}{4} \qquad ii) \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{2}{\pi}$$

6. Consideremos la sucesión de elemento general

$$a_n = \left(1 + i\frac{n}{n^2+1}\right)^n$$

a) Mostrar que si

$$\theta_n = n\ \arctan\left(\frac{n}{n^2+1}\right)$$

para $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$a_n = |a_n| e^{i\theta_n} \ .$$

b) Mostrar que la sucesión $\{a_n\}$ converge.

7. Sean dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ de valores complejos, todos ubicados en el disco cerrado D de centro $\frac{1}{2}$ y radio $\frac{1}{2}$. Supongamos que la sucesión de $\{a_n \cdot b_n\}$ es convergente a 1.

a) Si $a_n \to \ell \in \mathbb{C}$,

I) Mostrar que $\ell \in D - \{0\}$ y que $b_n \to \frac{1}{\ell}$.

II) Mostrar que $\ell = 1$.

b) Concluir que $a_n \to 1$ y $b_n \to 1$.

8. Para demostrar correctamente que toda función continua definida en un intervalo cerrado y acotado es integrable, fue necesario contar con el Teorema de Heine-Borel, que afirma que en intervalos de ese tipo, toda función continua es uniformemente continua. Esto es, que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que:

$$x, y \in [a, b] \text{ con } |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \, .$$

   En este ejercicio se propone demostrar el teorema mencionado. Para ello, se sugieren los siguientes pasos.

   a) Suponer que la función no lo es, y por ello justificar existen $\varepsilon > 0$ y dos sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ tales que:
   $$|x_n - y_n| < \frac{1}{n}\, , \quad \text{y} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geqq \varepsilon \, .$$
   b) Aplicar el Teorema de Bolzano-Weierstrass, si es posible, a la sucesión $\{x_n\}$ para obtener una subsucesión $\{x_{n_k}\}$, convergente y estudiar la convergencia de la sucesión $\{y_{n_k}\}$.
   c) Usar la continuidad de f y el hecho $|f(x_n) - f(y_n)| \geqq \varepsilon$ para llegar a una contradicción.

9. En clases se demostró el Teorema de Bolzano-Weierstrass, a partir del Principio del Punto de Acumulación. En este ejercicio, mostraremos el segundo, a partir del primero.

   a) Demostrar que cualquier sucesión de números reales $\{a_n\}$ tiene una subsucesión monótona. Esto es, o una subsucesión creciente, o una decreciente. (Ver Lema en la página 425 del libro de Spivak).
   b) Concluir el Teorema de Bolzano-Weiersstrass, teniendo cuidado de no utilizar ni el Principio del Punto de Acumulación ni ningún argumento que de éste se concluya.
   c) Demostrar el Principio del Punto de Acumulación, a partir del Teorema de Bolzano-Weierstrass.

10. Determinar el conjunto de todos los complejos z para los que cada una de las siguientes series converge.

$$i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{n!} \qquad ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z+n} \qquad iii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{2z+1}\right)^n \qquad iv) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1+|z|^2\right)^n} \, .$$