Análisis Matemático III - PM - LM - PF - LF - 2019.
Docentes: Pablo Torres, Alberto Ferrari, Tomás Brizio.
https://www.fceia.unr.edu.ar/~ptorres/AMIII

PRÁCTICA 4 - Integrales de Superficie

Primera Etapa

1. a) Calcular el área de la porción del plano $x + 2y + z = 4$ cortada por la superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = 4.$
   b) Calcular el área de la parte del paraboloide hiperbólico $z = y^2 - x^2$, comprendida entre los cilindros $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4.$

2. Sea S la esfera de radio R con centro en el origen.
   a) Demostrar por simetría:
   $$\iint_S x^2\, dS = \iint_S y^2 dS = \iint_S z^2 dS.$$
   b) Usar este hecho y alguna idea brillante para evaluar con muy pocos cálculos:
   $$\iint_S x^2\, dS.$$

3. Si S es la superficie esférica de centro 0 y radio a, calcular $\iint_S (x^2 + y^2 - 2z^2)\, dS.$

4. Calcular el área de la porción de esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ interior al cilindro $x^2 + y^2 = 2y.$
   (La bóveda de Viviani).

5. Hallar el centro de masa de una semiesfera con densidad superficial de masa constante.

6. Sea S el hemisferio superior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y sea $f(x, y, z) = (x, y, 0)$. Calcular el flujo de f a través de S usando:
   a) la representación $r(u, v) = (\sin(u)\cos(v), \sin(u)\sin(v), \cos(u)),$
   b) la representación explícita de $S : \ z = f(x, y)$.

7. Calcular el rotor y la divergencia de cada uno de los siguientes campos vectoriales:
   a) $G(x, y, z) = (z + y, x + z, x + y),$
   b) $F(x, y, z) = (x^2 + yz, y^2 + xz, z^2 + xy),$
   c) $H(x, y, z) = (e^{xy}, \cos(xy), \cos(xz^2))$.

8. *a*) Demostrar que el gradiente de una función armónica tiene divergencia nula.
   b) Demostrar que rot $(\nabla\varphi)= 0$. Es decir que todo campo de gradiente es irrotacional.
   c) Demostrar que div (rot$F$)$= 0$. Es decir que todo campo de rotores es solenoidal.
   d) Demostrar informalmente que si S es una superficie cerrada entonces: $\iint_S$(rot $F \times n)dS = 0.$

9. Verificar el Teorema de la Divergencia en los casos siguientes:

a) $F(x,y,z)=(x^2,y^2,z^2)$, S superficie del cubo unitario $\{(x,y,z)/0\leq x\leq 1; 0\leq y\leq 1; 0\leq z\leq 1\}$,

b) $F(x,y,z)=(2xy+z,y^2,-x-3y)$, S frontera de la región limitada por los planos coordenados y el plano $2x+2y+z=6$.

10. En los siguientes casos calcular el flujo del rotor del campo a través de S por medio de integrales curvilineas, indicando el sentido de la normal:

    a) $F=(xyz,x,\exp(xy)\cos(z))$; S es el hemisferio $x^2+y^2+z^2=1,\ z\geq 0$,

    b) $F=(x,y,z)$; S es la parte del paraboloide $x^2+y^2+z=1$ con $z\geq 0$.

    c) $F=(y-z,yz,-xz)$; S consta de las cinco caras del cubo $[0,2]^3$ que no están en el plano $z=0$.

11. Sea la temperatura de un punto de $\mathbb{R}^3$ dada por $T(x,y,z)=3x^2+3z^2$. Calcular el flujo de calor a través de la superficie $x^2+y^2=2,\ 0\leq z\leq 2$.

12. Sea S la superficie cerrada formada por el hemisferio $x^2+y^2+z^2=1,\ z\geq 0$ y su base $x^2+y^2\leq 1,\ z=0$. Sea E el campo eléctrico definido por $E(x,y,z)=(2x,2y,2z)$. Hallar el flujo a través de S.

Segunda Etapa

1. Determinar la masa de la superficie cilíndrica homogénea cuya directriz en el plano xy es $r=\theta$, con $0\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}$, siendo sus generatrices paralelas al eje z. La superficie está limitada inferiormente por el plano $z=0$ y superiormente por el cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

   Sugerencia: parametrizar S mediante una representación $r=r(\theta,z)$.

2. Verificar que el campo $F(x,y,z)=\dfrac{r}{|r|^3}$, donde $r=(x,y,z)$, tiene divergencia nula en $\mathbb{R}^3-\{(0,0,0)\}$.

3. Usar el Teorema de la Divergencia para calcular el flujo de F a través de S :

   a) $F=(xy^2,yz,zx^2)$ y S es la superficie del sólido que está entre los cilindros $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$ y los planos $z=1,\ z=3$.

   b) $F=(z^2x,\frac{1}{3}y^3+\tan z,x^2z+y^2)$ y S es la mitad superior de la esfera $x^2+y^2+z^2=1$.

   Sugerencia: Si bien S no es cerrada, agregarle "la tapa inferior" para cerrarla y después se descuenta el flujo sobre esa tapa.

4. Sea $r(x,y,z)=(x,y,z)$. Si S es una superficie cerrada, V es el volumen del sólido limitado por S y n es la normal exterior a S, demostrar que:

$$V=\frac{1}{3}\iint_S (r\times n)dS\ .$$

5. Sea $n=(\cos(\alpha),\cos(\beta),\cos(\gamma))$ la normal exterior a una superficie cerrada S que limita a V (sólido de densidad constante). Si se conocen el volumen y las coordenadas del baricentro de V expresar, en términos de esas cantidades:

   a) $\iint_S (xz\cos(\alpha)+2yz\cos(\beta)+3z^2\cos(\gamma))\,dS$, *b)* $\iint\limits_S (y^2\cos(\alpha) + 2yz\cos(\beta) - 2xz\cos(\gamma))dS$.

6. Evaluar $\int_S (\nabla \wedge F)\cdot dS$, donde S es la superficie $x^2+y^2+3z^2 = 1,\ z \leq 0$, y $F = (y\ , -x,\ zx^3y^2)$.

   (Dato: Tomar la normal unitaria hacia arriba.)

7. Sea S la parte del cono $z^2 = x^2 + y^2$ tal que $1 < z < 2$, orientada por la normal exterior de tal superficie.

   Calcular $\int_S F \cdot dS$, donde $F(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$.

8. Sean tres campos escalares, $F_i(x_1, x_2, x_3)$, $i = 1, 2, 3$, tales que se verifican las condiciones de derivadas cruzadas:
$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}\ ,$$
   para $i, j = 1, 2, 3$ en $\mathbb{R}^3$. Mostrar que la integral de línea del campo vectorial $F = (F_1, F_2, F_3)$ sobre toda curva suficientemente regular cerrada es nula, y luego, el campo es conservativo.

9. Considere las ecuaciones de Maxwell en el vacío para los campos eléctrico y magnético E y B, en ausencia de cargas y corrientes:
$$\begin{cases} \text{rot } E = -\dfrac{\partial B}{\partial t} \\ \text{rot } B = \mu_0\varepsilon_0\ \dfrac{\partial E}{\partial t} \\ \text{div } E = 0 \\ \text{div } B = 0 \end{cases}\quad ,$$
   con $c = \sqrt{\dfrac{1}{\mu_0\varepsilon_0}} \approx 3 \times 10^8$ m/s, la velocidad de la luz.

   Suponiendo que la única componente no nula del campo eléctrico es E_y, que ésta es función solamente de x y de t, la componente B_z depende de x y de t, demostrar que los campos $E = (0, E_y, 0)$ y $B = (0, 0, B_z)$ satisfacen la misma ecuación de ondas:
$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu_0\varepsilon_0\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \mu_0\varepsilon_0\ \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}\ .$$