Análisis Matemático III - PM - LM - PF - LF - 2019.
Docentes: Pablo Torres, Alberto Ferrari, Tomás Brizio.
https://www.fceia.unr.edu.ar/~ptorres/AMIII

PRÁCTICA 3 - Integrales de Línea

Primera Etapa

1. Calcular la integral de los campos escalares f respecto de la longitud de arco, sobre las curvas C indicadas.

   a) $f(x,y)=x^2+y^2$, C la curva $\alpha(t)=(\cos t+t\operatorname{sen} t\ ,\ \operatorname{sen} t-t\cos t)\ ,\ 0\le t\le 2\pi$.
   b) $f(x,y)=2x+y$, C el arco de circunferencia $x^2+y^2=25$ que une $(3,4)$ con $(4,3)$.
   c) $f(x,y)=x^2+y^2$, C una circunferencia de radio a centrada en el origen.

2. Hallar la masa y el centro de gravedad del alambre helicoidal

$$\alpha(t)=(\cos t,\operatorname{sen} t,t)$$

   con $0\le t\le 2\pi$, si la densidad está dada por $\rho(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$.

3. En cada caso calcular la integral de línea del campo vectorial dado a lo largo del camino que se indica:

   a) $F(x,y)=(\exp(x-1),xy)$, sobre la curva $\alpha(t)=\left(t^2,t^3\right)\ ,\ 0\le t\le 1$.
   b) $F(x,y)=(x+y,x-y)$ a lo largo de la elipse $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$ en el sentido antihorario.
   c) $F(x,y,z)=(yz,xz,xy)$ a lo largo de la intersección del paraboloide $z=x^2+y^2$ con el plano $z=4$.
   d) $F(x,y,z)=\left(z^2,-z,2y\right)$ a lo largo de la curva poligonal que une los puntos $(0,0,0)$, $(0,1,1)$, $(1,2,3)$ y $(1,2,4)$.
   e) $F(x,y,z)=\left(x^4\exp(y),\ln(z),\sqrt{y^2+z^2}\right)$ a lo largo del segmento que va de $(1,2,1)$ a $(6,4,5)$.

4. El trabajo del campo $F(x,y)=\left(3y^2+2,16x\right)$ al mover una partícula desde $(-1,0)$ hacia $(1,0)$ a lo largo de la mitad superior de la elipse $x^2+\frac{y^2}{b}=1$ depende de b. Hallar b tal que el trabajo sea mínimo.

5. Verificar que los siguientes campos vectoriales no son gradientes en ningún abierto (de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$). Hallar un camino cerrado C tal que $\oint_C F\neq 0$.

   a) $F(x,y)=(x+y,y-x)$.
   b) $F(x,y,z)=(y,x,x)$.
   c) $F(x,y)=(y,-x)$.
   d) $F(x,y,z)=(x+y,x-1,5x+z^2)$.

6. En cada uno de los siguientes casos verificar que existe un potencial para el campo dado y hallarlo:

   a) $F(x,y)=\left(2xy^3-y^2\cos x\ ,\ 1+3x^2y^2-2y\operatorname{sen} x\right)$.
   b) $F(x,y,z)=\left(2xz+\operatorname{sen} y\ ,\ x\cos y\ ,\ x^2\right)$.
   c) $F(x,y,z)=(x+z,-y-z,x-y)$.

d) $F(x,y,z) = \left(-xr^{-3}, -yr^{-3}, -zr^{3}\right)$, con $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

7. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un campo escalar tal que

$$\nabla f(x,y,z) = (2xyze^{x^2}\ ,\ ze^{x^2}\ ,\ ye^{x^2})\ .$$

Calcular $f(1,1,2)$, sabiendo que $f(0,0,0) = 5$.

8. Verificar el teorema de Green para el disco D con centro en el origen y radio R y las funciones:

    a) $P(x,y) = xy^2\ ,\ Q(x,y) = -yx^2$.

    b) $P(x,y) = x + y\ ,\ Q(x,y) = y$.

9. Si A es el área de una región D de tipo 3 y γ es su frontera,

    a) Mostrar que

    $$A = \int_\gamma xdy = \int_\gamma -ydx.$$

    b) Evaluar $\int_\gamma ydx - xdy$ donde γ es la frontera del cuadrado $[-1,1] \times [-1,1]$ orientado en sentido antihorario.

10. Usar el teorema de Green para evaluar el trabajo realizado por el campo de fuerzas

$$f(x,y) = ((x^3 + y^2)\ ,\ x^4)$$

al mover una partícula rodeando al cuadrado $[0,1] \times [0,1]$ en sentido antihorario.

11. Usar el Teorema de Green para calcular el área dentro de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

12. Calcule $\int_C (e^x + \cos x + 2y)\, dx + \left(2x - \frac{y^2}{3}\right)\, dy$ siendo:

    a) C: la elipse de centro $(2,3)$ y semiejes 2 y 7.

    b) C: el arco de circunferencia de centro $(0,4)$ y radio 1, que va del punto $(0,3)$ al punto $(0,5)$.

Segunda Etapa

1. Calcule la longitud de las siguientes curvas:

    a) C es el arco de parábola $y = x^2$ que va desde el punto $(-1,1)$ hasta el punto $(1,1)$.

    b) C es la curva de intersección de las superficies $\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2(x+y) \end{cases}$

2. Calcular el trabajo realizado por el campo $F(x,y,z) = \left(3x^2 - 6yz, 2y + 3xz, 1 - 4xyz\right)$ al mover una partícula a lo largo de las trayectorias:

    a) el segmento de $(0,0,0)$ a $(1,1,1)$.

    b) la poligonal que une los puntos $(1,0,0)$, $(1,1,0)$ y $(1,1,1)$.

3. Un campo bidimensional de fuerzas F es tal que en cada punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ el vector F es tangente a la circunferencia con centro en el origen que pasa por (x, y) y su sentido es el de las agujas del reloj. Determinar si la integral a lo largo de Γ es positiva o negativa cuando:

   a) Γ es el segmento de recta vertical que va desde $(-3, -3)$ a $(-3, 3)$.

   b) Γ es el segmento de recta vertical que va desde $(3, -3)$ a $(3, 3)$.

4. Considerar un alambre semicircular uniforme (densidad de masa constante) de radio R, de masa M.

   a) Mostrar que el centroide está situado en el eje de simetría a distancia $\dfrac{2R}{\pi}$ del centro.

   b) Mostrar que el momento de inercia respecto del diámetro que pasa por los extremos del alambre es $\frac{1}{2}MR^2$.

5. Un alambre uniforme tiene la forma de la porción de curva de intersección de la superficie de ecuación $x^2 + y^2 = z^2$ con la de ecuación $y^2 = x$, que une los puntos $(0, 0, 0)$ y $\left(1, 1, \sqrt{2}\right)$. Hallar la coordenada z del centroide.

6. Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es un campo escalar y C es una curva en $\mathbb{R}^3$, se define el *valor promedio* de f a lo largo de C, como

$$\frac{\int_C f\,(x, y, z)\ ds}{l\,(C)}$$

   siendo $l\,(C)$ la longitud de la curva. Calcular el valor promedio de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ a lo largo de la hélice $\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t),\ \ 0 \leq t \leq 2\pi$.

7. Sea Γ una curva de clase $\mathcal{C}^1$ parametrizada mediante la función $\alpha(t)$.

   a) Suponiendo que F es un campo normal a $\alpha'(t)$ en $\alpha(t)$, mostrar que $\int_\Gamma F \cdot d\alpha = 0$.

   b) Si F es paralelo a $\alpha'(t)$ en $\alpha(t)$, mostrar que $\int_\Gamma F \cdot d\alpha = \int_\Gamma \|F\|\ ds$.

   F en $\alpha(t)$ es paralelo a $\alpha'(t)$, si para todo t es $F\,(\alpha(t)) = \lambda(t)\alpha'(t)$ con $\lambda(t) > 0$.

8. Evaluar

$$\int_C 2xyz\ dx\ +\ x^2 z\ dy\ +\ x^2 y\ dz\ ,$$

   donde C es una curva orientada simple que conecta $(1, 1, 1)$ con $(1, 2, 4)$.

9. Considerar el campo de fuerza gravitacional (con $G = m = M = 1$) definido por

$$F(x, y, z) = \frac{-1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x\ ,\ y\ ,\ z) \quad \text{para } (x, y, z) \neq (0, 0, 0).$$

   Mostrar que el trabajo realizado por la fuerza gravitacional conforme una partícula se mueve desde (x_1, y_1, z_1) a (x_2, y_2, z_2) a lo largo de cualquier trayectoria, depende sólo de los radios : $R_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ y $R_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$.

10. Sea D una región para la cual se cumple el teorema de Green. Suponiendo que f es armónica en D probar que

$$\int_\gamma \frac{\partial f}{\partial y}dx - \frac{\partial f}{\partial x}dy = 0$$

   siendo γ la frontera de D.

11. Una partícula comienza en el punto $(-2, 0)$, se mueve a lo largo del eje x hasta $(2, 0)$, y después por la semicircunferencia $y = \sqrt{4 - x^2}$ hasta el punto inicial. Usar el Teorema de Green para determinar el trabajo realizado por el campo de fuerzas $F(x, y) = (x, x^3 + 3xy^2)$ sobre dicha partícula.

12. Dado el campo vectorial $F(x, y) = r^{-2}(-y, x)$, siendo $r^2 = x^2 + y^2$, mostrar que:

    a) $\int_C F \cdot d\bar{\alpha} = 0$ para toda curva C cerrada simple que no contiene el origen en su interior.

    b) $\int_C F \cdot d\bar{\alpha} = 2\pi$ para toda curva C cerrada simple que contiene el origen en su interior.