**Análisis Matemático III - PM - LM - PF - LF - 2019.**
**Docentes: Pablo Torres, Alberto Ferrari, Tomás Brizio.**
**https://www.fceia.unr.edu.ar/~ptorres/AMIII**

# PRÁCTICA 2 - Integración Múltiple

## Primera Etapa

1. Calcular cada una de las siguientes integrales.

   *a)* $\iint_R (x^3 + y^3)\, dA, \quad R = [0,1] \times [0,1]$.
   *b)* $\iint_R y\ \exp(xy)\, dA, \quad R = [-1,1] \times [-1,1]$.
   *c)* $\iint_R \ln(x+1)(y+1)\, dA, \quad R = [0,1] \times [0,1]$.
   *d)* $\iint_R |y|\ dA, \quad R = [0,2] \times [-1,0]$.

2. Evaluar las siguientes integrales iteradas y bosquejar las regiones $D$ determinadas por los límites de integración. Decir si las regiones son de tipo 1, 2, o de ambos tipos.

   *a)* $\int_1^2 dx \int_{2x}^{3x+1} dy$.
   *b)* $\int_0^1 dx \int_1^{e^x} (x+y) dy$.
   *c)* $\int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} y\ dy$.

   En (b) y (c), cambiar el orden de integración (con los extremos apropiados).

3. Evaluar las siguientes integrales iteradas, integrando en $y$ y después en $x$, y luego primero en $x$ y después en $y$:

$$a) \quad \int_0^{\pi/2}\int_0^1 y\cos(x) + 2\ dy\ dx\ , \qquad b) \quad \int_{-1}^0\int_1^2 -x\ln(y)\ dy\ dx\ .$$

4. Sea $D$ la región de los $(x,y)$ tales que $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$ e $y \geq 0$.

   *a)* Decidir si $D$ es una región elemental.
   *b)* Calcular
$$\iint_D 1 + xy\ dA\ .$$

5. Usar integrales dobles para calcular:

   *a)* el volumen de una esfera de radio $r$.
   *b)* el volumen limitado por un elipsoide de semiejes $a$, $b$, $c$.
   *c)* el volumen de un cono circular recto de base de radio $r$ y altura $h$.

6. Sea $D$ una región de la forma
$$\{(x,y)\ :\ a \leq x \leq b\ ,\ -\varphi(x) \leq y \leq \varphi(x)\}$$
donde $\varphi$ es una función no negativa y continua en el intervalo $[a,b]$, y $f$ una función definida en $D$ tal que, para todo $(x,y) \in D$,
$$f(x,-y) = -f(x,y)\ .$$
Mostrar que
$$\iint_D f\ dA = 0\ .$$

7. Utilizando el teorema del valor medio mostrar que :

$$\frac{1}{6} \leq \int_D \frac{dA}{y-x+3} \leq \frac{1}{4}\,,$$

donde $D$ es el triángulo de vértices $(0,0),\ (1,1),\ (1,0)$.

8. Dibujar la región plana limitada por las rectas $x=-1$, $x-y=-1$, $x+y=1$, $y=-1$. Hallar las coordenadas del centro de gravedad, supuesta la densidad constante.

9. Calcular el momento de inercia respecto del eje $x$ de una placa plana del plano $xy$ limitada por las curvas $y=\sqrt{2x},\ y=0,\ x=2$ con densidad superficial de masa $\rho(x,y)=|x-y|$.

10. Una placa de oro tiene la forma y tamaño del rectángulo $[0,2\pi]\times[0,\pi]$ (en centímetros). Su densidad de masa es $\delta(x,y)=y^2\sin^2(4x)+2$ (en gramos por centímetro cuadrado).

    Si el oro cuesta $ 1300 por gramo, ¿cuánto vale la placa?

11. Transformar las siguientes integrales a coordenadas polares y calcularlas:

    *a)* $\int_0^1\int_{x^2}^x \sqrt{x^2+y^2}\ dy\ dx$ .

    *b)* $\int_0^{2a}\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} (x^2+y^2)\ dy\ dx$ .

12. Si $D$ es el disco unitario, evaluar:

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx\ dy\ .$$

13. Siendo $D$ la región encerrada por la cardioide de ecuación en coordenadas polares $r = 1-\cos\theta$, mostrar que:

$$\iint_D x^2\ dA\ =\ \frac{49}{32}\,\pi\ .$$

14. Calcular las siguientes integrales triples:

    (a). $\iiint_V (1+x+y+z)^{-3}\ dx\ dy\ dz$ donde $V$ es el tetraedro definido por los tres planos coordenados y el plano $x+y+z=1$.

    (b). $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2}\ \ dx\ dy\ dz,$ donde $V$ es el sólido limitado por la hoja superior del cono $z^2=x^2+y^2$ y el plano $z=1$.

    (c). $\iiint_E x^2yz^3\ dV$ donde $E$ está limitado por los planos $y=0$ y $z=0$ y las superficies de ecuaciones $y^2=x-x^2$ y $z^2=4x$.

    (d). $\iiint_E (yz+3y)\ dV$ donde $E$ está limitado por los planos $x+y=3$ y $x=0$ y la superficie de ecuación $z^2+y^2=9$.

15. Calcular, pasando a coordenadas cilíndricas:

    *a)* $\iiint_V (x^2+y^2)\ dx\ dy\ dz$, siendo $V$ el sólido limitado por la superficie $x^2+y^2=2z$ y el plano $z=2$.

    *b)* El voumen del sólido limitado por los tres planos coordenados, la superficie $z=x^2+y^2$ y el plano $x+y=1$.

16. Calcular la masa y el centro de gravedad del sólido limitado por dos semiesferas concéntricas de radios $a$ y $b$ con $0<a<b$, si:

a) la densidad de masa es constante.
b) la densidad en cada punto es igual al cuadrado de su distancia al centro.

17. Un cono circular recto homogéneo tiene altura $h$. Demostrar que la distancia del centro de masa a la base es $h/4$.

18. Calcular el momento de inercia de un cilindro de radio $A$ y masa $M$ respecto de su eje si la densidad en cada punto es proporcional a la distancia del punto al eje del cilindro.

19. Calcular el momento de inercia de una esfera de radio $A$ respecto de un diámetro si su densidad volumétrica de masa es constante.

## Segunda Etapa

1. Calcule:

   a) $\int_0^1 \int_y^1 (x^2+3y^2)\,dxdy$.
   b) $\int_0^1 \int_0^{2x} \sqrt{1-x^2}\,dydx$.
   c) $\int_0^\pi \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \frac{2}{\sqrt{4-y^2}}\,dxdy$.

2. Supuesta la existencia de las integrales, calcularlas por integración iteradas:

   a) $\iint_R xy(x+y)\,dxdy$, donde $R=[0,1]\times[0,1]$.
   b) $\iint_R (\sqrt{y}+x-3xy^2)\,dxdy$, donde $R=[0,1]\times[1,3]$.
   c) $\iint_R y^{-3}e^{tx/y}\,dxdy$, donde $R=[0,t]\times[1,t]$, $t>0$.

3. En cada caso sea $f$ un campo escalar definido en el rectángulo $R$. Realice un gráfico del recinto de ordenadas de $f$ sobre $R$ y calcule su volumen por medio de una integral doble. (Supóngase que la integral existe).

   a) $R=[0,2]\times[0,1]$, $f(x,y)=1+2x+2y$.
   b) $R=[0,2]\times[0,2]$, $f(x,y)=4-x^2$.
   c) $R=[0,1]\times[0,1]$,

   $$f(x,y)=\begin{cases} 1-x-y & \text{si } x+y\leq 1 \\ 0 & \text{si } x+y>1 \end{cases}$$

   d) $R=[-1,1]\times[-1,1]$,

   $$f(x,y)=\begin{cases} x^2+y^2 & \text{si } x^2+y^2\leq 1 \\ 0 & \text{si } x^2+y^2>1 \end{cases}$$

4. Esbozar la región de integración, intercambiar el orden de integración y evaluar las siguientes integrales:

   a) $\int_0^1 \int_{1-y}^1 (x+y^2)\,dxdy$.
   b) $\int_0^1 \int_y^1 (e^{-x^2})\,dxdy$.

5. Sea $D$ la región acotada por la curva de ecuación $y=\sqrt{x}$ y la recta de ecuación $y=x$. Sea $f(x,y)=\frac{\sin y}{y}$ si $y\neq 0$ y $f(x,0)=1$. Calcule $\iint_D f(x,y)\,dA$.

6. Calcular los volúmenes de los cuerpos limitados por las superficies:

   *a)* $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,\ x = 0,\ y = 0$ y $z = 0.$
   *b)* $z = 0,\ x + y + z = 3$ y $x^2 + y^2 = 1.$
   *c)* $z = 4 - x^2,\ y = x,\ y = 0$ y $z = 0.$

7. Sea $f$ un campo escalar continuo en $R = [a, b] \times [c, d]$, para $a < x < b$ y $c < y < d$ se define $G(x, y) = \int_a^x \int_c^y f(u, v)\, dvdu$. Mostrar que $D_{12}G(x, y) = D_{21}G(x, y) = f(x, y)$.

8. Sea $D$ la región del plano acotada por las rectas $x - 2y = 0$, $x - 2y = -4$, $x + y = 4$, $x + y = 1$. Calcule $\iint_D 3xy\, dA$.

9. Sea $D$ la región del plano acotada por las curvas $y = x^2 + 4$, $y = x^2$, $y + x^2 = 6$, $y + x^2 = 12$ en el semiplano $x \geq 0$. Calcule $\iint_D xy\, dA$.

10. Combinar la suma de las integrales en una única integral iterada y evaluar:

$$\int_0^{8\sqrt{13}} \int_0^{3x/2} xy\, dydx + \int_{8\sqrt{13}}^{4} \int_0^{\sqrt{16-x^2}} xy\, dydx$$

11. Transformar cada una de las integrales dadas en una o más integrales iteradas en coordenadas polares:

    *a)* $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2 + y^2})\, dydx.$
    *b)* $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\, dxdy.$

12. Considerar la aplicación $T(u, v)$ definida por las ecuaciones $x = u + v$ y $y = v - v^2$.

    *a)* Calcule el Jacobiano de $T$, $|J_T(u, v)|$.
    *b)* Un triángulo $R$ en el plano $uv$ tiene vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$ y $(0, 2)$. Represente la imagen $S = T(R)$ en el plano $xy$.
    *c)* Calcule el área de $S$ mediante una integral doble extendida a $S$ y también mediante integral doble extendida a $R$.
    *d)* Calcule $\iint_S (x - y + 1)^{-2}\, dA$.

13. Sea $R = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2\}$. Calcule la integral doble:

$$I(p, a) = \iint_R \frac{dA}{(p^2 + x^2 + y^2)^p}.$$

    Determine los valores de $p$ para los que existe $\lim\limits_{a \to +\infty} I(p, a)$.

14. Mediante un conveniente cambio de variables, demuestre la siguiente igualdad:

$$\iint_S f(x, y) dA = \ln 2 \int_1^2 f(u) du,$$

    siendo $S$ la región (del 1° cuadrante) limitada por las curvas $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$ y $y = 4x$.

15. Calcule las siguientes integrales triples:

*a*) $\iiint_S (x^2+y^2)dV$ donde $S$ es el sólido limitado por las superficies de ecuaciones $x^2+y^2 = 2z$ y $z+x^2+y^2=6$.

*b*) $\iiint_S \sqrt{x^2+z^2}dV$ donde $S$ es el sólido limitado por las superficies de ecuaciones $x^2+z^2 = 1$ y $y = x$ (en el 1° octante).

16. Exprese las siguientes integrales en coordenadas cilíndricas o esféricas, según considere conveniente y evalúelas:

*a*) $\displaystyle\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^3 x\,dz\,dy\,dx.$

*b*) $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-z^2}}^{\sqrt{2-z^2}} \int_0^{1+y^2+z^2} z^3\,dx\,dy\,dz.$

*c*) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} x^2\,dz\,dx\,dy.$

17. Calcule el volumen de:

*a*) El sólido limitado superiormente por el paraboloide de ecuación $x^2+y^2=4z$ e inferiormente por la esfera de ecuación $x^2+y^2+z^2=5$.

*b*) El sólido interior a $x^2+y^2+z^2=a^2$ y a $(x-\frac{a}{2})^2+y^2=(\frac{a}{2})^2$.

*c*) El sólido acotado por las gráficas de la esfera $r^2+z^2=a^2$ y el cilindro $r=a\cos(\theta)$.

*d*) El sólido interior a los cilindros $x^2+y^2=4$ y $y^2+z^2=4$.

18. Encuentre el centro de masa de una placa triangular delgada limitada por el eje $y$ y las rectas $y=x$, $y=2-x$, si la densidad es $\delta(x,y)=6x+3y+3$.

19. El tallo de una seta es un cilindro recto de revolución de diámetro $1$ y longitud $8$, y su cabeza es un hemisferio de radio $R$. Si la seta es un sólido homogéneo con simetría axial y su centro de gravedad está situado en el plano en el que el tallo se une a la cabeza, calcule $R$.

20. Sea $f(x)=\int_1^x e^{t^2}dt$ halle el valor medio de la función $f$ en el intervalo $[0,1]$.