Análisis Matemático III - PM - LM - PF - LF - 2019.
Docentes: Pablo Torres, Alberto Ferrari, Tomás Brizio.
https://www.fceia.unr.edu.ar/~ptorres/AMIII

Ejercicios complementarios de función implícita

1. Supongamos que la ecuación $g(x, y) = 0$ determina y como función derivable de x, sea esto $y = Y(x)$ para todo x en un cierto intervalo (a, b). Expresar la derivada $Y'(x)$ en función de las derivadas parciales de g.

2. Las dos ecuaciones $2x = v^2 - u^2$ e $y = uv$ definen a u y v como funciones de x e y, i.e. $u(x, y)$, $v(x, y)$. Hallar las fórmulas para $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$.

3. La intersección de las superficies $2x^2 + 3y^2 - z^2 = 25$ y $x^2 + y^2 = z^2$ contiene una curva C que pasa por $P(\sqrt{7}, 3, 4)$. Estas ecuaciones pueden resolverse respecto de x e y en función de z con lo que se obtiene una representación paramétrica de C con 2 parámetros.

   (a) Hallar un vector unitario $\vec{t}$ tangente a C en el punto P sin utilizar el conocimiento explícito de la representación paramétrica.

   (b) Comprobar el resultado del apartado anterior mediante la representación paramétrica de C con z como parámetro.

4. Dado el sistema:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 1 \\ e^{xy} + x^2 - z^2 = 1 \end{cases}$$

   (a) Probar que define dos funciones implícitas $y = y(x)$, $z = z(x)$ en un entorno del punto $(x, y, z) = (2, 0, 2)$.

   (b) Sea α la curva parametrizada por $\alpha(x) = (x, y(x), z(x))$. Hallar el vector tangente a α en el punto $x = 2$.

   (c) Calcular la derivada direccional del campo escalar $F(x, y, z) = \sin(xy) + z^2$ en el punto $(2, 0, 2)$ según el vector tangente a α en el punto $x = 2$.

5. Sea la ecuación $x^2y - y^2x + z^2\cos(xz) = 1$.

   (a) Probar que define una función implícita $z = z(x, y)$ en un entorno del punto $(0, \sqrt{2}, 1)$.

   (b) Hallar el plano tangente a la superficie $z = z(x, y)$ en el punto $(0, \sqrt{2})$.

6. Sean $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ y el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = r^2 \\ y^2 + z^2 = r^2 \end{cases}$$

   (a) Probar que este sistema define implícitamente dos funciones $x = x(z)$, $y = y(z)$ en un entorno del punto $(x, y, z) = (r/\sqrt{2}, r/\sqrt{2}, r/\sqrt{2})$.

   (b) Sea $C \subset \mathbb{R}^2$ la curva que define el sistema de ecuaciones considerado, dada en coordenadas paramétricas por $\alpha(z) = (x(z), y(z), z)$. Probar que el vector tangente a $\alpha(z)$ en el punto $z = r/\sqrt{2}$ es paralelo al plano $x - y = 0$.

   (c) Calcular la derivada direccional del campo escalar $f(x, y, z) = zxy - x^2$ en el punto $(r/\sqrt{2}, r/\sqrt{2}, r/\sqrt{2})$ a lo largo de esta curva.

7. Dado el sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ xy + z = 0 \end{cases}$$

   (a) Probar que este sistema define implícitamente $x = x(z)$, $y = y(z)$ en un entorno de $(x, y, z) = (2, 1, -2)$.

   (b) Si $\alpha(z) = (x(z), y(z), z)$ denota la curva definida por el sistema anterior, calcular la recta tangente y el plano normal a α en $z = -2$.

8. Sea S la superficie definida por la ecuación $x^2 + x + y = 3 + z$. Obtener la ecuación del plano tangente y la recta normal en el punto $(1, 1, z_0)$ de S.