FCEIA
FACULTAD DE
CIENCIAS EXACTAS,
INGENIERIA Y AGRIMENSURA

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO
Av. Pellegrini 250. S2000BTP Rosario. Sta. Fe

Análisis Matemático III - PM - LM - PF - LF - 2019.
Docentes: Pablo Torres, Alberto Ferrari, Tomás Brizio.
https://www.fceia.unr.edu.ar/~ptorres/AMIII

PRÁCTICA 1 - Complementos de Cálculo Diferencial en Varias Variables

Preliminares

1. Hallar las derivadas parciales de la siguiente función en el origen:

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{si } x=0 \vee y=0 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

2. Dada la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{yx^2}{y^2+x^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (a) Hallar las derivadas direccionales de f en el origen.

   (b) Estudiar la continuidad de f en el origen.

   Sug.: Aproximarse a lo largo de la parábola $y = x^2$.

3. Estudiar la diferenciabilidad en el origen de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} x\sin(4\operatorname{arc\,tg} y/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

4. Mostrar que existen las derivadas parciales de f en el origen, pero que no es diferenciable allí, siendo:

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{xy^2z}{x^3+y^6+z^3} & \text{si } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

5. Estudiar la diferenciabilidad y la continuidad de las derivadas parciales en el origen de la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

6. Se considera la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (a) Estudiar su continuidad en el origen.

   (b) Calcular la derivada direccional de f en el origen según la dirección del versor (a,b). Deducir de ahí las derivadas parciales de f en el origen.

   (c) ¿Es $\frac{\partial f}{\partial x}$ continua en $(0,0)$?

   (d) ¿Es f diferenciable en el origen?

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

Primera Etapa

1. Si $F(t) = f(x + ht, y + kt)$ con (x, y) y (h, k) fijos, y donde f se supone con todas las derivadas necesarias, calcular $F'(t),\ F''(t),\ F'''(t)$.

2. Sea f un campo escalar definido en $\mathbb{R}^2$. La sustitución $u = \dfrac{(x-y)}{2}$, $v = \dfrac{(x+y)}{2}$, cambia $f(u, v)$ en $F(x, y)$. Aplicar en forma adecuada la regla de la cadena para expresar las derivadas parciales $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ en función de las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial u},\ \dfrac{\partial f}{\partial v}$.

3. Sea $G(s, t) = f(2s-t+1, -s+3t)$. ($f$ tiene todas las derivadas que Ud. quiera). Se sabe que en $(1, 0)$ las derivadas de f son: $D_1 f = 1;\ D_2 f = -1;\ D_{11} f = 2;\ D_{12} f = -2;\ D_{22} f = -3.$ ¿Cuánto valen $D_{12}G(0, 0)$ y $D_{22}G(0, 0)$?

4. Sea $u = f(x, y)$, donde $x = r\cos(\theta),\ y = r\sin(\theta)$. Expresar $\sqrt{u_x^2 + u_y^2}$ en términos de u_r y u_θ.

5. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dos campos vectoriales definidos del siguiente modo:
$$f(x, y) = e^{x+2y}\mathrm{i} + \sin(y + 2x)\mathrm{j},$$
$$g(u, v, w) = (u + 2v^2 + 3w^3)\mathrm{i} + (2v - u^2)\mathrm{j}.$$
   (a) Calcular cada una de las matrices jacobianas $\mathrm{J}f(x, y),\ \mathrm{J}g(u, v, w)$.
   (b) Calcular la función compuesta $h(u, v, w) = f[g(u, v, w)]$.
   (c) Calcular la matriz jacobiana $\mathrm{J}h(1, -1, 1)$.

6. Hallar la fórmula de Taylor de segundo orden para las funciones:
   (a) $f(x, y) = e^x \sin y$ alrededor de $(0, 0)$.
   (b) $f(x, y, z) = x^2 - 3xz + z^2 - 4xy + x^4y^2$ alrededor de $(0, 0, 0)$.
   (c) $f(x, y, z) = xyz^2$ alrededor de $(0, 1, 2)$.

7. Calcular aproximadamente $A = \dfrac{0{,}97}{\sqrt{15{,}05 + \sqrt[3]{0{,}98}}}$ usando el hecho $f(a+h) \cong f(a) + \nabla f(a) \times h$, con $f(x, y, z) = \dfrac{x}{\sqrt{y + \sqrt[3]{z}}}$ y $a = (1, 15, 1)$.
   El valor exacto de A es $0{,}2421726\ldots$

8. El radio de la base y la altura de un cono circular recto miden 10 cm y 25 cm, respectivamente, con un posible error en la medición de a lo máximo $0{,}1$ cm. Acotar el error en el cálculo del volumen del cono.

9. Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ derivable con derivada positiva. Demostrar que la función $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x, y) = f(1+x^2+y^2)$ tiene un mínimo local en el origen. Más generalmente, $G(x_1, \ldots, x_n) = f(1 + x_1^2 + \ldots + x_n^2)$ tiene un mínimo local en el origen de $\mathbb{R}^n$.

10. Analizar el siguiente ejemplo:
    (a) Sea f una función C^1 en la recta real. Supongamos que f tiene un único punto crítico x_0 que es un mínimo local estricto de f. Mostrar que entonces x_0 es también un mínimo absoluto para f, esto es, que $f(x) \geq f(x_0)$ para todo x.

(b) El siguiente caso muestra que la conclusión de (a) no se cumple para funciones de más de una variable: Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = -y^4 - e^{-x^2} + 2y^2\sqrt{e^x + e^{-x^2}}\ .$$

Mostrar que $(0,0)$ es el único punto crítico de f y que es un mínimo local. Mostrar además, de manera informal, que f no tiene mínimo absoluto.

11. Hallar los extremos (absolutos) de las siguientes funciones en los dominios indicados:

(a) $f(x,y) = xy(1-x^2-y^2)$, en $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$.

(b) $f(x,y) = x^3/3 - (3/2)x^2 + 2x + y^2 - 2y + 1$, en el triángulo limitado por las rectas $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 1$.

(c) $f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2)$, en el círculo $\{(x,y) \ / \ x^2+y^2 \le 4\}$.

(d) $f(x,y) = x^2y^3(1-x-y)$, en el cuadrado $\{(x,y) \ / \ |x| + |y| \le 1\}$.

Sol.: Mínimo en $(-2/5, -3/5)$ donde f vale $-216/3125$. Máximo en $(-1/2, 1/2)$ donde f vale $1/132$.

12. Verificar que las siguientes ecuaciones definen a y como función de x alrededor de los puntos indicados y calcular las dos primeras derivadas en esos puntos:

(a) $x^3 - xy - xy^2 - y^3 - 1 = 0$ en $x = 0$.

(b) $\sin x + \cos y + 2y - \pi = 0$ en $x = 0$.

(c) $1 - xy - \ln(x^2+y^2) = 0$ en $x = 0$.

(d) $x^2y + 3x^2 - 2y^2 - 2y = 0$ en $x = 1$.

13. Hallar los extremos locales de la(s) función(es) $y = f(x)$ definida(s) implícitamente por la ecuación

$$x^2 + xy + y^2 - 27 = 0\ .$$

En este ejemplo todavía es posible explicitar y en términos de x, pero es aconsejable ignorar esa posibilidad.

14. La ecuación $z + x + (y+z)^4 = 0$ define implícitamente la función $z = f(x,y)$. Calcular f_{xx} y f_{yy}.

15. Encontrar el volumen de la máxima caja rectangular con aristas paralelas a los ejes que se puede inscribir en el elipsoide $9x^2 + 36y^2 + 4z^2 = 36$.

16. Hallar el valor máximo y el mínimo del producto de tres números reales $x,\ y,\ z$ si su suma debe ser 0 y la suma de sus cuadrados debe ser 1.

Sol.: El valor máximo es $\sqrt{6}/18$, cuando dos de los números son $-\sqrt{6}/6$ y el otro es $\sqrt{6}/3$. El valor mínimo es $-\sqrt{6}/18$, cuando dos de los números son $\sqrt{6}/6$ y el otro es $-\sqrt{6}/3$.

17. Hallar la distancia del punto $(-2,3,2)$ a la recta $x - 1 = -(y+1) = z + 1$.

Sol.: Distancia $=\sqrt{258}/3$, en el punto $(-1/3, 1/3, -7/3)$.

18. El cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $x + y + z = 0$ se intersectan en una elipse (cuyo centro es el origen de coordenadas). Hallar los semiejes de la elipse determinando los extremos de la función $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ sujeta a las dos restricciones $x^2 + y^2 = 1$, y $x + y + z = 0$.

Sol.: Los puntos de la elipse donde se obtiene el máximo de f son $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ y $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, el cual vale 3. El semieje mayor es $\sqrt{3}$. El mínimo de f ocurre en $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$ y $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ y vale 1. El semieje menor es 1.

19. Hallar los puntos de la curva de intersección de las dos superficies:
$$x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1 \text{ y } x^2 + y^2 = 1$$
que están más cerca del origen.

20. Considerar la función
$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2$$
en el disco unitario $D = \{(x,y) \,/\, x^2 + y^2 \leq 1\}$. Usar el método de los multiplicadores de Lagrange para localizar los puntos máximo y mínimo en dicho círculo. Usar esto para determinar los valores máximo y mínimo absolutos de f en D.

Segunda Etapa

1. Sean $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $f(x,y) = g\left(\dfrac{(x^2+y^2)}{2}, xy\right)$. Si $D_1g(\frac{5}{2}, -2) = 2$, y $D_2g(\frac{5}{2}, -2) = 1$, calcular $\nabla f(-1,2)$ y la derivada direccional de f en $(-1,2)$ en la dirección que va de $(0,1)$ hacia $(1,0)$.

2. Mostrar que la expresión del Laplaciano de una función $\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$, tras realizado el cambio de coordenadas polares $x(r,\theta) = r\cos\theta$, $y(r,\theta) = r \operatorname{sen}\theta$, será
$$f_{rr} + \frac{1}{r}\, f_r + \frac{1}{r^2}\, f_{\theta\theta} \,.$$

3. Probar que la expresión $f_{xx} + f_{yy}$ es invariante bajo una rotación del sistema coordenado, para cualquier campo escalar $f \in C^2$.

4. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable, y existe $m \in \mathbb{N}$ con la propiedad:
$$\forall t \in \mathbb{R},\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\quad f(tx,ty) = t^m f(x,y).\quad (I)$$
Una tal f se llama homogénea de grado m. Verificar que f satisface la ecuación
$$xD_1f(x,y) + yD_2f(x,y) = mf(x,y), \qquad \text{llamada ecuación de Euler.}$$
Sugerencia: Derivar (I) respecto de t y después poner $t = 1$. (Recíprocamente se puede demostrar que una función f que verifica la ecuación de Euler es homogénea).

5. Si la ecuación $g(x,y) = 0$ define a y como función de x, por ejemplo $y = w(x)$ y si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se define:
$$h(x) = f(x, w(x)).$$
Calcular $h'(x)$ en términos de las derivadas parciales de f y g.

6. Una función continua de una variable no puede tener dos máximos locales sin tener un mínimo local. Sin embargo, en dos variables se da el caso:
Mostrar que la función $f(x,y) = -(x^2-1)^2 - (x^2y - x - 1)^2$ tiene sólo dos puntos críticos en los que hay máximos locales.
Sug.: Graficar en la computadora, para ver cómo es posible.

7. ¿Cuáles son los valores máximos y mínimos absolutos de la función $f(x,y) = \sin(x) + \cos(y)$ en el rectángulo $R = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$?
Sol.: f asume su valor máximo en R, que es 2, en los puntos $(\frac{\pi}{2}, 0)$ y $(\frac{\pi}{2}, 2\pi)$. f asume su mínimo en R, que vale -2, en el punto $(\frac{3\pi}{2}, \pi)$.

8. Hallar los valores extremos del campo escalar:

$$f(x,y,z) = x - 2y + 2z,$$

en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 8$.

9. Sean f y g dos campos escalares definidos en el abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ tales que tienen un máximo local en el punto $p \in U$. Mostrar que la función suma $f + g$ tiene un máximo local en p. ¿Se puede concluir lo mismo para la función producto fg?

10. Mostrar que la función $f(x,y) = |x| + |y|$ tiene un mínimo local en $(0,0)$. Observar que f no es diferenciable en $(0,0)$. Hacer un esquema mostrando las curvas de nivel cerca de ese punto.

11. Mostrar que las siguientes funciones no poseen extremos locales o relativos:

    (a) $f(x,y) = x^3 + 3x + y^3 + y$.
    (b) $f(x,y,z) = x^5 + y^5 + z^3 + 4x + 2y + 9z + 2$.
    (c) $f(x,y,z) = \arctan(x + 2y + 3z)$.
    (d) $f(x_1,\ldots,x_n) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + b$, con al menos un $a_j \neq 0$.

12. Demostrar:

    (a) La función de dos variables $f(x,y) = ax^2 + by^2$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $ab < 0$, tiene un punto de ensilladura en el origen. Sugerencia: mostrar que en cualquier entorno del origen hay puntos donde f es positiva y otros donde es negativa.
    (b) Generalización: La función de n variables $f(x_1,\ldots,x_n) = a_1x_1^2 + \ldots + a_nx_n^2$, donde los a_j son no nulos y no todos del mismo signo, tiene un punto de ensilladura en el origen.

13. Identificar y clasificar los puntos estacionarios (críticos) de las siguientes funciones:

    (a) $f(x,y) = x^2 - (y-1)^2$.
    (b) $f(x,y) = x^3 + y^3$.
    (c) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.
    (d) $f(x,y) = 2x^2 - xy - 3y^2 - 3x + 7y$.
    (e) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 3z^2 - 1$.
    (f) $f(x,y) = (8x^2 - 6xy + 3y^2)\exp(2x + 3y)$.
    (g) $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + xz + 2yz + x + 2y + z$.
    (h) $f(x,y,z) = x^3 + 3x^2 - 2y^2 + 4y - 2z^2 + 6z$

    Ayuda: El punto estacionario de g es $(0,-1/2,0)$ y los puntos estacionarios de h son $(0,1,3/2)$ y $(-2,1,3/2)$.

14. Sea $f(x,y) = 6x^4 - 5x^2y + y^2$. Mostrar que en $(0,0)$ no hay extremo local.

    Sug.: Ver que $f(x,y) = (y - 2x^2)(y - 3x^2)$ y estudiar el signo de f en un entorno cualquiera del origen.

15. Mostrar que la función $f(x,y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}$ tiene exactamente un punto estacionario, en el cual f tiene un máximo local. Sin embargo, f no tiene máximo en $\mathbb{R}^2$. ¿Es posible esto para funciones derivables de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$?

16. Se considera el polinomio $p(x,y) = 3x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 2y$.

(a) Mostrar que no tiene máximo en $\mathbb{R}^2$.

(b) Hallar el punto (x_0, y_0) donde p tiene un mínimo local.

(c) Mostrar que $p(x_0, y_0)$ es el mínimo valor del polinomio p en $\mathbb{R}^2$.

Sug.: Desarrollar p alrededor de (x_0, y_0) en potencias de $(x - x_0)$ e $(y - y_0)$.

17. Sea $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey$, donde a, b, c, d, e son constantes, $a > 0$ y $ac - b^2 > 0$. Demostrar que existe un punto (α, β) en el cual f toma su mínimo valor en $\mathbb{R}^2$.

18. Una caja de cartón sin tapa debe contener un volumen de $32000\ cm^3$. Encontrar las dimensiones de la caja que minimizan la cantidad de cartón empleada.

19. Calcular el volumen de la caja rectangular más grande que esté en el primer octante con tres de sus caras en los planos coordenados y un vértice en el plano $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, donde a, b, c son números positivos.