Análisis Matemático III: Apunte sobre sucesiones y series numéricas y de funciones

Pablo Torres - Departamento de Matemática
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

1. Sucesiones numéricas

1.1. Introducción

Una sucesión de números reales es una colección ordenada de números reales. Al considerar una sucesión se conoce cuál es el lugar que ocupa cada uno. Hay un primer elemento, al que podríamos llamar a_1, un segundo a_2, un elemento n-ésimo o general, a_n, etc.

Notaremos a las sucesiones por

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$

donde si bien utilizamos llaves, hacemos hincapié en que consideramos el orden en el que los elementos son presentados.

Nota 1.1.1. *En ocasiones los valores de los índices que indican el dominio de la sucesión pueden comenzar desde $n = 0$, sin que esto afecte a las definiciones que a éstas involucren.*

Ejemplo 1.1.1.

1. $\{a_n\}_n = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\} = \{n\}_n$, *donde, para cada* $n \in \mathbb{N}$, $a_n = n$.
2. $\{b_n\}_n = \{-2, -4, -6, \ldots -2n, \ldots\}$, *tal que* $b_n = -2n$.
3. $\{a_n\}_n = \{1, \frac{1}{2},, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\} = \{\frac{1}{n}\}_n$, *donde, para cada* $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{n}$.
4. $\{b_n\}_n = \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots\}$, *tal que* $b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.
5. *Sucesión de Fibonacci:* $f_1 = 1$, $f_2 = 2$, $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ *para* $n \in \mathbb{N}$.

Observemos en los ejemplos que a cada número natural (posición en la sucesión) le corresponde un elemento de la sucesión, y sólo uno, y que los elementos son, por definición, números reales.

Definición 1.1.1 (Sucesión numérica)**.**

Una sucesión numérica (real) es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales, y su codominio el de los números reales,

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$a(n) = a_n\ .$$

Teniendo en vista esta definición, las sucesiones son funciones, todas con los mismos conjuntos dominio y codominio. Dos sucesiones serán iguales si sus respectivos términos lo son. Esto es,

$$\{a_n\}_n = \{b_n\}_n \;\Leftrightarrow\; a_n = b_n \;, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N} \;.$$

La igualdad de sucesiones no debe confundirse con la igualdad de sus codominios.

Definición 1.1.2 (Sucesiones acotadas)**.**
Una sucesión $\{a_n\}_n$ se dice acotada superiormente, si existe un valor real M, tal que se verifica, para todo n,

$$a_n \leq M \;.$$

y está acotada inferiormente, si existe m tal que

$$m \leq a_n \;,$$

para cualquier n.

Esto es, el recorrido de la sucesión es un subconjunto acotado[1], superiormente o inferiormente, según sea el caso.

Ejemplo 1.1.2.

1. $\{a_n\}_n = \{1, 2, 3, 4, ..., n, ...\}$, *está acotada inferiormente por 1, y no está acotada superiormente.*
2. $\{b_n\}_n = \{-2, -4, -6, ..., -2n, ...\}$, *no está acotada inferiormente, y está acotada superiormente por* -2.
3. $\{c_n\}_n = \{1, \frac{1}{2}, , \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\} = \{\frac{1}{n}\}_n$, *está acotada inferiormente por 0 y superiormente por 1.*

1.2. Sucesiones Convergentes, Divergentes y Oscilantes

Considerando que una sucesión es un caso particular de una función real, con dominio en $\mathbb{N}$, en la cual se piensa a a_n como la imagen de n por esta función, tienen sentido las siguientes definiciones de convergencia y divergencia.

Definición 1.2.1.
Una sucesión numérica $\{a_n\}$ tiene límite finito ℓ, si para cualquier número positivo ε, existe un número natural $N \in \mathbb{N}$, tal que se verifica

$$n > N \;\Rightarrow\; |a_n - \ell| < \varepsilon \;.$$

Si este es el caso, decimos que la sucesión es convergente, o que la sucesión converge a ℓ y lo notaremos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell \quad o \quad a_n \longrightarrow \ell \;.$$

Gráficamente, si dado $\varepsilon > 0$, es posible encontrar N, tal que, todos los a_n siguientes se encuentren en el entorno $(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$.

[1] Un conjunto no vacío $A \subseteq \mathbb{R}$ es acotado superiormente si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\forall a \in A$, $a \leq M$. Al número M se lo denomina cota superior de A. Es claro que si M es cota superior de A, entonces todo número mayor que M también es cota superior de A. De manera análoga se define conjunto acotado inferiormente y cota inferior.

Definición 1.2.2 (Sucesiones divergentes y oscilantes)**.**
Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ diverge a $+\infty$ (resp. $-\infty$), si para cualquier $M > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, donde

$$n > N \Rightarrow a_n > M \quad (n > N \Rightarrow a_n < -M) .$$

La sucesión diverge, si lo hace a $+\infty$ o a $-\infty$.
Finalmente, una sucesión se dice oscilante si no es convergente ni divergente.

Nota 1.2.1. *Dado $\varepsilon > 0$, si un número N_1 es útil en la condición de convergencia (o para un $M > 0$, en la de divergencia), entonces cualquier $N > N_1$ también lo es. En efecto,*

$$n > N \Rightarrow n > N_1 \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon .$$

Además, es últil observar que

$$a_n \longrightarrow \ell \Leftrightarrow a_{n+1} \longrightarrow \ell ,$$

y lo mismo con $\pm\infty$.

Ejemplo 1.2.1.

1. *La sucesión $\{\frac{1}{n}\}$ es convergente a 0. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, basta tomar un número natural $N > \frac{1}{\varepsilon}$ (Propiedad Arquimedeana[2]), para obtener*

$$n > N \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon .$$

2. *La sucesión $\{\frac{1}{n+1}\}$ es convergente a 0. Nota anterior. Lo mismo con la sucesión $\{\frac{1}{n+p}\}$, con $p \in \mathbb{Z}$.*

3. *La sucesión $\{\frac{1}{n^2}\}$ es convergente a 0. Basta tomar, para $\varepsilon > 0$, $N > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.*

4. *En general, si $p \in \mathbb{N}$, la sucesión $\{\frac{1}{n^p}\}$ es convergente a 0, tomando $N > \frac{1}{\sqrt[p]{\varepsilon}}$.*

5. *Las sucesiones $\{n\}$, $\{2n\}$, $\{n^2\}$, etc., divergen a $+\infty$.*

6. *Las sucesiones $\{(-1)^n\}$ y $\{(-1)^n n\}$ son oscilantes. La primera está acotada, y la segunda no.*

Se pueden afirmar los límites del ejemplo anterior por medio de la siguiente observación.

Nota 1.2.2.
Sea f una función real y $\{a_n\}$ una sucesión tal que $a_n = f(n)$.

- *Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, entonces resulta $a_n \longrightarrow \ell$*
- *Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$, entonces resulta $a_n \longrightarrow \pm\infty$*

Ejercicio 1.2.1. *Probar los siguientes límites:*

[2]Propiedad Arquimedeana: Si $x > 0$ e y es un número real arbitrario, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n.x > y$.
Para probar este resultado es útil el Axioma del supremo: Todo conjunto no vacío de números reales acotado superiormente tiene supremo en $\mathbb{R}$. Vale aclarar aquí la definición de supremo de un conjunto no vacío $A \subseteq \mathbb{R}$ ($s = \sup(A)$): un número real s es supremo de A si es cota superior de A y toda otra cota superior de A es mayor que s, i.e. s es la menor de las cotas superiores de A. Equivalentemente, $s = \sup(A)$ si para todo $h > 0$ existe $a \in A$ tal que $s - h < a \le s$.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^2-2n+1}{3n^3+2} = 0$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n^2-2n+1}{4n^2-n-1} = \frac{5}{4}$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-n^3-n+2}{4n^2-2} = -\infty$.
2. *Si* $a > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^a} = 0$.
3. *Si* $|x| < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$.
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\log n)^a}{n^b} = 0$, $\forall a, b > 0$.
5. $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$.
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

Agrupando resultados conocidos, enunciamos el siguiente resultado y proponemos la demostración como ejercicio.

Teorema 1.2.1. *Son válidas las siguientes afirmaciones:*

1. *El límite de una sucesión numérica, si existe, es único.*
2. *Si* $a_n \to \ell$, *entonces* $|a_n| \to |\ell|$.
3. *Si* $a_n \to 0$, *y* $\{b_n\}$ *está acotada,* $a_n \cdot b_n \to 0$
4. *Si* $a_n \to \ell_1$, $b_n \to \ell_2$, *y* $c \in \mathbb{R}$,
$$a_n \pm b_n \longrightarrow \ell_1 \pm \ell_2 \ , \quad c\, a_n \longrightarrow c\, \ell \ , \quad a_n \cdot b_n \longrightarrow \ell_1 \cdot \ell_2 \ ,$$
y si $\ell_2 \neq 0$ *y* $b_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \frac{\ell_1}{\ell_2} \ .$$
5. *Si para* $n > N$, $a_n \leqq b_n \leqq c_n$, *y además valen* $a_n \to \ell$ *y* $c_n \to \ell$, *entonces* $b_n \to \ell$.

El siguiente Lema permite probar varios límites útiles.

Lema 1.2.1 (Desigualdad de Bernoulli)**.** *Si* $h > -1$ *y* $h \neq 0$.
$$(1+h)^n \ \geqq \ 1+nh,$$
para todo $n \in \mathbb{N}$.

Además, la igualdad se verifica solo para $n = 1$.

Demostración. Si $n = 1$, se cumple por igualdad.

A continuación mostraremos, utilizando el Principio de Inducción, que para $n \geqq 2$,
$$(1+h)^n \ > \ 1+nh \ ,$$
Para $n = 2$,
$$(1+h)^2 \ = \ 1+2h+h^2 \ > \ 1+2h \ .$$

Si suponemos que para algún $n \in \mathbb{N}$ es $(1+h)^n > 1+nh$, como $1+h>0$,

$$\begin{aligned}(1+h)^n > 1+nh &\Rightarrow (1+h)(1+h)^n > (1+h)(1+nh)\\ &\Rightarrow (1+h)^{n+1} > (1+h)(1+nh) = 1+nh+h+nh^2\\ &> 1+nh+h = 1+(n+1)h\\ &\Rightarrow (1+h)^{n+1} > 1+(n+1)h\,,\end{aligned}$$

que completa el argumento de inducción. □

Observar que en el Lema anterior, si tomamos $h=0$, se verifica la igualdad para todo $n \in \mathbb{N}$

Proposición 1.2.1. *Dado $p>0$,*

$$\lim_{n\to\infty} p^n = \begin{cases} 0 & \text{si } 0<p<1 \\ 1 & \text{si } p=1 \\ \infty & \text{si } p>1 \end{cases}.$$

Demostración. Si $p=1$, es inmediato.

Si $p>1$, $p=1+h$, con $h>0$. En este caso, por la Desigualdad de Bernoulli,

$$p^n = (1+h)^n > 1+nh\,.$$

Observemos que

$$\lim_{n\to\infty} 1+nh = \infty\,,$$

ya que, dado $M>0$, por la Propiedad Arquimedeana, existe N tal que $Nh > M-1$, y con esos elementos, $(h>0)$

$$n>N \Rightarrow 1+nh > 1+Nh > 1+M-1 = M.$$

Luego

$$\lim_{n\to\infty} p^n = \infty\,.$$

Si $0<p<1$, entonces $\frac{1}{p}>1$, y

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{p^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{p}\right)^n = \infty\,,$$

y en consecuencia,

$$\lim_{n\to\infty} p^n = 0\,.$$

□

Ejercicio 1.2.2. *En este ejercicio queremos probar la siguiente convergencia:*

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} \longrightarrow 2\,.$$

Para ello, se propone como sugerencia, reemplanzando en el lado derecho de la igualdad $\frac{1}{2}a_n = a_n - \frac{1}{2}a_n$ por la expresión como suma de a_n, arribar a la fórmula

$$\frac{1}{2}a_n = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$$

y utilizar la Proposición 1.2.1.

1.3. Sucesiones Monótonas

Definición 1.3.1 (Sucesiones Monótonas). *Una suceción $\{a_n\}$ se dice*

1. *creciente, si $a_n \leq a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$,*
2. *decreciente, si $a_n \geq a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*
3. *estrictamente creciente, si $a_n < a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$,*
4. *estrictamente decreciente, si $a_n > a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

para todo $\in \mathbb{N}$. Si una sucesión es creciente o decreciente, se dice que es monótona.

Naturalmente además, se definen las sucesiones no decrecientes y no crecientes.

Ejemplo 1.3.1.

1. *Si $\{a_n\}$ es creciente (resp. decreciente) entonces $\{-a_n\}$ es decreciente (resp. creciente).*
2. *Si $\{a_n\}$ es acotada superiormente (resp. inferiormente) entonces $\{-a_n\}$ es acotada inferiormente (resp. superiormente).*
3. *Una sucesión está acotada superiormente e inferiormente si y solo si existe $T \in \mathbb{R}$ tal que $|a_n| \leq T$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

El siguiente resultado no es sólo válido para sucesiones monótonas, pero su recíproca sí, y por eso se incluye aquí.

Teorema 1.3.1. *Si una sucesión $\{a_n\}$ es convergente, entonces está acotada (sup. e inferiormente).*

Demostración. Sea ℓ, tal que $a_n \to \ell$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, de manera que, para $n > N$,

$$\begin{aligned}
&|a_n - \ell| < \varepsilon \\
&\quad \Rightarrow \;\; |a_n| - |\ell| \;\leqq\; |a_n - \ell| \;<\; \varepsilon \\
&\quad \Rightarrow \;\; |a_n| \;<\; |\ell| + \varepsilon \;.
\end{aligned}$$

Luego, para $\varepsilon = 1$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_1$ entonces $|a_n| < |\ell| + 1$.

Si ahora consideramos $T = \max\{|a_1|, |a_2|, ..., |a_{N_1 - 1}|, |a_{N_1}|, |\ell| + 1\}$ (máximo de una cantidad finita de números), entonces,

$$\begin{array}{l}
n \leq N_1 \;\Rightarrow\; |a_n| \;\leq\; T \\
n \;>\; N_1 \;\Rightarrow\; |a_n| \;<\; |\ell| + \varepsilon \;\leq\; T
\end{array} ,$$

y para todo n, es $|a_n| \leq T$. $\square$

Nota 1.3.1. *Si una sucesión está acotada, ¿es convergente?*

Observemos que la sucesión $\{(-1)^n\}$ está acotada y no es convergente ya que es oscilante.

¿Qué ocurre si la sucesión es acotada y además es monótona?

Teorema 1.3.2.

Si una sucesión monótona $\{a_n\}$ está acotada, entonces es convergente.

Demostración. Comencemos con el caso $\{a_n\}$ creciente, $a_{n-1} < a_n$, esto es, para todo n.

Como la sucesión a_n está acotada, el conjunto $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ (pensado como el recorrido de la sucesión), es un subconjunto no vacío y acotado superiormente de $\mathbb{R}$, y por el Axioma del Supremo, existe ℓ, supremo de este conjunto numérico. Mostremos que $a_n \to \ell$. Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera. Deseamos hallar $N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon$.

Por un lado, como $\ell = \sup(A)$, vale que

$$a_n \leq \ell < \ell + \varepsilon \ , \tag{1}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por otro lado, como $\ell = \sup(A)$, por el Teorema de Caracterización del supremo, dado $\varepsilon > 0$, existe un elemento de A, llamémoslo a_N, tal que

$$\ell - \varepsilon < a_N \leq \ell \ .$$

Observando que $a_N \leq a_n$ para todo $n > N$, se tiene

$$\ell - \varepsilon < a_N < a_n \ , \tag{2}$$

Combinando las desigualdades (1) y (2), para todo $n > N$,

$$\begin{aligned} \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon \\ \Rightarrow \ |a_n - \ell| \ < \ \varepsilon \ . \end{aligned}$$

Si $\{a_n\}$ es decreciente y acotada, entonces $\{-a_n\}$ es creciente y acotada, y por lo tanto convergente, lo que implica que sea también en este caso $\{a_n\}$ convergente. □

Nota 1.3.2. *Si una sucesión es acotada y además es monótona a partir de un cierto subíndice $n_0 \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión es convergente.*

Corolario 1.3.1.
Una sucesión creciente (decreciente), converge o diverge a $+\infty$ ($-\infty$).

Definición 1.3.2 (Subsucesión)**.** *Dada una sucesión numérica $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, se denomina subsucesión de $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a toda sucesión de la forma*

$$\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} = \{a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots\},$$

formada por elementos de la sucesión original $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y tal que se conserva el orden relativo de los índices, i.e.

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k < n_{k+1} < \ldots .$$

Enunciamos dos propiedades que relacionan los límites de una sucesión y sus subsucesiones, cuyas demostraciones quedan como ejercicio.

Proposición 1.3.1. *Una sucesión es convergente a un valor ℓ si y solo si todas sus subsucesiones son convergentes a ℓ.*

Proposición 1.3.2. *Sea $\ell \in \mathbb{R}$. Si una sucesión es tal que toda subsucesión tiene una sub-subsucesión que converge a ℓ, entonces la sucesión original converge a ℓ.*

A continuación definiremos las sucesiones numéricas complejas, i.e. aquellas sucesiones con codominio $\mathbb{C}$.

Definición 1.3.3 (Sucesión numérica compleja)**.**
Una sucesión numérica compleja es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales, y su codominio el de los números complejos,

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$$

$$a(n) = a_n \ .$$

La definición de límite de una sucesión numérica compleja se define de manera natural considerando el módulo de un número complejo.

Una sucesión $\{a_n\}$ compleja puede descomponerse en su parte real e imaginaria, i.e. $a_n = u_n + i.v_n$, donde u_n y v_n son sucesiones numéricas reales.

Teorema 1.3.3. *Una sucesión numérica compleja es convergente si y solo si las sucesiones de su parte real e imaginaria son ambas convergentes.*

1.4. Principio del punto de acumulación. Teorema de Bolzano-Weierstrass.

Definición 1.4.1 (Punto de acumulación de una sucesión)**.** *Sea $\{a_n\}$ una sucesión y $\alpha \in \mathbb{R}$. Decimos que α es un apunto de acumulación de la sucesión $\{a_n\}$ si, para todo $\varepsilon > 0$ el conjunto*

$$\{n \in \mathbb{N} : \ |a_n - \alpha| < \varepsilon\}$$

es infinito (no acotado superiormente).

Ejemplo 1.4.1.

1. *La sucesión $\{(-1)^n\}$ posee dos puntos de acumulación $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_2 = -1$. Observar que esta sucesión es oscilante.*
2. *La suceción $\{\frac{1}{n}\}$ tiene a $\alpha = 0$ como único punto de acumulación. Observar que esta sucesión converge a* 0.
3. *La sucesión $\{n\}$ no tiene punto de acumulación y es divergente a $+\infty$.*
4. *La sucesión definida como $a_{2n} = n$ y $a_{2n+1} = 0$ para $n \in \mathbb{N}$ tiene a $\alpha = 0$ como único punto de acumulación. Observar que esta suceción no es convergente.*

Proposición 1.4.1 (Principio del punto de acumulación para sucesiones)**.** *Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada. Luego, $\{x_n\}$ tiene al menos un punto de acumulación.*

Demostración. Como la sucesión está acotada, existen $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \in [a, b]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : \ x_n \in [a, b]\}$ es infinito.

Procederemos usando el Método dicotomico. En este caso lo aplicaremos para obtener una sucesión de intervalos.

Consideremos $[a, b] = [a_1, b_1]]$. Obtenido el intervalo $[a_n, b_n]$, construimos el intervalo $[a_{n+1}, b_{n+1}]$, tomando el punto medio c_{n+1} de $[a_n, b_n]$ (i.e. $c_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$), y tenemos que al menos uno de los conjuntos $\{n \in \mathbb{N} : \ x_n \in [a_n, c_{n+1}]\}$ o $\{n \in \mathbb{N} : \ x_n \in [c_{n+1}, b_n]\}$ es infinito. Si $\{n \in \mathbb{N} : \ x_n \in [a_n, c_{n+1}]\}$ es infinito definimos $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [a_n, c_{n+1}]$, y en caso contrario definimos $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [c_{n+1}, b_n]$. Observemos que ahora que el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : \ x_n \in [a_{n+1}, b_{n+1}]\}$ es infinito.

De esta manera, considerando los extremos de los intervalos, se obtienen dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ tales que:

1. $\{a_n\}$ es creciente y acotada superiormente por b (luego, $\{a_n\}$ es convergente),
2. $\{b_n\}$ es decreciente y acotada inferiormente por a (luego, $\{b_n\}$ es convergente),
3. para todo $n \in \mathbb{N}$, $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}}$

Sea $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \psi$. Además, por álgebra de límites,

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) + a_n = 0 + \psi = \psi.$$

Veamos que ψ es un punto de acumulación de $\{x_n\}$. Sea $\varepsilon > 0$. Por lo que acabamos de probar, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $[a_n, b_n] \subseteq (\psi - \varepsilon, \psi + \varepsilon)$. En consecuencia, el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : \ |x_n - \psi| < \varepsilon\}$ es infinito, ya que

$$\{n \in \mathbb{N} : \ x_n \in [a_n, b_n]\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} : \ |x_n - \psi| < \varepsilon\}.$$

Luego, ψ es un punto de acumulación de $\{x_n\}$ como queríamos probar. □

Los siguientes dos resultados y la Proposición 1.4.1 que acabamos de probar son equivalentes.

Teorema 1.4.1 (Teorema de Bolzano-Weierstrass). *Toda sucesión numérica real contiene una subsucesión convergente.*

Proposición 1.4.2 (Principio de los Intervalos Encajados). *Sean $\{[a_n, b_n]\}$ una colección de intervalos cerrados y acotados de $\mathbb{R}$, tales que , para todo $n \in \mathbb{N}$, $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$. Entonces,*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

Si además $\lim\limits_{n\to\infty} b_n a_n = 0$ entonces,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{\psi\}.$$

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata de los resultados que acabamos de mencionar.

Corolario 1.4.1. *Una sucesión acotada y con un único punto de acumulación es convergente (y converge a dicho punto de acumulación).*

Demostración. Ejercicio □

A continuación consideraremos una clase (en principio) particular de sucesiones.

Definición 1.4.2 (Sucesiones de Cauchy). *Una sucesión $\{a_n\}$ es de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n, m \geq N \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Proposición 1.4.3. *Toda sucesión convergente es de Cauchy.*

Demostración. Ejercicio □

Acabamos de ver que para una sucesión es condición necesaria ser de Cauchy para ser convergente. En lo que sigue veremos que, para una sucesión numérica real ser de Cauchy también es condición suficiente para ser convergente.

Teorema 1.4.2. *Toda sucesión de Cauchy es acotada y posee único punto de acumulación. En conclusión toda sucesión de Cauchy es convergente.*

Demostración. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de Cauchy. Luego, tomando $\varepsilon = 1$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n,m \geq N_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < 1$.

Ergo, para todo $n \geq N_0$, $|a_n| < 1 + |a_{N_0}|$. Sea $T = \text{máx}\{|a_1|, \ldots, |a_{N_0-1}|, 1 + |a_{N_0}|\}$. Tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq T$, i.e. $\{a_n\}$ está acotada.

Aplicando ahora el Principio del punto de acumulación para sucesiones (Proposición 1.4.1), tenemos que la sucesión $\{a_n\}$ tiene al menos un punto de acumulación.

Veamos que dicho punto de acumulación es único. Supongamos que existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ puntos de acumulación de $\{a_n\}$ con $\alpha \neq \beta$. Sea $\varepsilon = \frac{|\beta - \alpha|}{3}$. Observemos que $\varepsilon > 0$. Como $\{a_n\}$ es de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n,m \geq N$ entonces $|a_n - a_m| < \varepsilon$ (*).

Dado que α y β son puntos de acumulación, los conjuntos $A = \{n \in \mathbb{N} : \ |a_n - \alpha| < \varepsilon\}$ y $B = \{n \in \mathbb{N} : |a_n - \beta| < \varepsilon\}$ son ambos de cardinal infinito. Luego, existen $n_0 \in A$ y $m_0 \in B$ tales que $n_0 \geq N$ y $m_0 \geq N$, i.e. $|\alpha - a_{n_0}| < \varepsilon$ y $|a_{m_0} - \beta| < \varepsilon$.

Entonces,

$$|\alpha - \beta| = |\alpha - a_{n_0} + a_{n_0} - a_{m_0} + a_{m_0} - \beta| \leq |\alpha - a_{n_0}| + |a_{n_0} - a_{m_0}| + |a_{m_0} - \beta|.$$

En consecuencia,

$$|a_{n_0} - a_{m_0}| \geq |\alpha - \beta| - |\alpha - a_{n_0}| - |a_{m_0} - \beta| > |\alpha - \beta| - \varepsilon - \varepsilon = \frac{|\alpha - \beta|}{3} = \varepsilon.$$

Es decir, $|a_{n_0} - a_{m_0}| > \varepsilon$, lo cual contradice (*). Esta contradicción proviene de suponer que existen dos puntos de acumulación diferentes. En consecuencia el punto de acumulación es único y el teorema queda demostrado □

Ejemplo 1.4.2. *Sea $a, b \in \mathbb{R}$. Consideremos la sucesión $\{a_n\}$ definida como $a_1 = a$, $a_2 = b$, $a_n = \frac{a_{n-1} - a_{n-2}}{2}$ si $n \geq 3$. Tenemos que $[a_{n+2}, a_{n+1}] \subset [a_{n+1}, a_n]$. Más aún, para $n \geq 3$,*

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| = \frac{|a_{n+1} - a_n|}{2}.$$

En consecuencia,

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| = \frac{|a_2 - a_1|}{2^n} = \frac{|b - a|}{2^n}.$$

Esto implica que la sucesión $\{a_n\}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$ y por lo tanto es convergente.

Observemos que determinamos que la sucesión es convergente, sin necesidad de conocer el valor al cual converge.

2. Series numéricas

2.1. Definición y ejemplos

Consideremos una secuencia numérica $\{a_n\}$ real o compleja. Podemos formar la *sumas parciales*

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad \dots \quad , s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

La sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ se denomina *serie infinita*, o simplemente *serie*, que también se nota:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Por ejemplo, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ representa la sucesión $\{s_n\}$ donde

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Si existe un número real o complejo S tal que

$$\lim_{n\to\infty} s_n = S,$$

decimos que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

converge y tiene suma S, en cuyo caso escribimos

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_n = S.$$

Si $\{s_n\}$ no converge, decimos que la serie no converge y no tiene suma.

Ejemplo 2.1.1.

SERIE DE POTENCIAS *Hemos estudiado las sumas parciales de la serie* $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$ *y probamos que*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

A partir de esta igualdad surge que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ *es convergente y tiene suma* 2*, i.e.*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2.$$

LA SERIE ARMÓNICA. *Consideremos la serie armónica* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$. *No es difícil ver que las sumas parciales verifican*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \ln(n+1).$$

Luego, como $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty$, *lo mismo ocurre con* s_n *y por lo tanto la serie* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ *no converge.*

2.2. Linealidad de series convergentes

A partir de las igualdades conocidas para suma de una cantidad finita de términos

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k,$$

$$\sum_{k=1}^{n} (ca_k) = c \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

surge la siguiente extensión de estas igualdades a series.

Teorema 2.2.1. *Sean* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *y* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *series convergentes y* α *y* β *constantes. Luego, la serie* $\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k)$ *converge y verifica*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Demostración. Ejercicio □

Corolario 2.2.1. *Si* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge y* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *no converge, entonces* $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ *no converge.*

Demostración. Ejercicio. □

Ejemplo 2.2.1.

1. *La serie* $\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{k} + \frac{1}{2^k})$ *no converge ya que* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ *no converge y* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ *converge.*
2. *Si dos series no convergen, no necesariamente la serie suma no converge. Por ejemplo, las series* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ *y* $\sum_{k=1}^{\infty} -\frac{1}{k}$ *no convergen pero la serie* $\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{k} + (-\frac{1}{k}))$ *converge, más aún su suma es* 0 *ya que todos sus términos son nulos.*

2.3. Series telescópicas

Consideremos una sucesión $\{b_n\}$ y observemos que las siguientes sumas parciales verifican

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{k+1}.$$

Intentemos extender esta propiedad a series infinitas. Consideremos $a_n = b_n - b_{n+1}$ para $n \in \mathbb{N}$. Luego, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ se denomina *serie telescópica*.

Teorema 2.3.1. *Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones tales que $a_n = b_n - b_{n+1}$ para $n \in \mathbb{N}$. La serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge si y solo si la sucesión $\{b_n\}$ converge. Más aún,*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = b_1 - \ell,$$

donde $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Demostración. Ejercicio. □

Ejemplo 2.3.1. *1. Consideremos $a_n = \frac{1}{n^2+n}$. Luego,*

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Considerando $b_n = \frac{1}{n}$ en el teorema anterior, resulta

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k} = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_n = 1 - 0 = 1.$$

2. Observemos que $\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \ln(n) - \ln(n+1)$. Como $\ln(n) \to +\infty$ entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ no converge.

2.4. La serie geométrica

Consideremos las sumas parciales

$$s_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}.$$

Si $x = 1$, $s_n = n$ y como ya hemos visto, la serie no converge.
Consideremos ahora $x \neq 1$, luego

$$(1-x)s_n = (1-x)\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \sum_{k=0}^{n-1}(x^k - x^{k+1}) = 1 - x^n.$$

Ergo,

$$s_n = \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}.$$

En consecuencia, si $|x| < 1$, $x^n \to 0$. Por lo tanto, si $|x| < 1$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$. Además, si $|x| > 1$, como $|x^n| \to +\infty$, la sucesión no converge y entonces la serie no converge. En conclusión, tenemos el siguiente resultado

Proposición 2.4.1. *Sea $x \in \mathbb{C}$. Luego, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$ converge si y solo si $|x| < 1$.*

Nota 2.4.1. *1. Si reemplazamos en la serie geométrica x por x^2, tenemos que si $|x| < 1$,*

$$1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2k} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} = \frac{1}{1-x^2}.$$

2. *Multiplicando en la igualdad anterior ambos lados por x, se tiene que si* $|x| < 1$,

$$x + x^3 + x^5 + \cdots + x^{2k+1} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k+1} = \frac{x}{1-x^2}.$$

3. *Reemplazando x por* $-x$ *en la serie geométrica, si* $|x| < 1$ *resulta*

$$1 - x + +x^2 - x^3 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = \frac{1}{1+x}.$$

4. *Reemplazando en lo anterior x por* x^2, *si* $|x| < 1$

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^k x^{2k} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} = \frac{1}{1+x^2}.$$

5. *Multiplicando ambos lados de la igualdad anterior por x, si* $|x| < 1$ *resulta*

$$x - x^3 + x^5 - x^7 + \cdots + (-1)^k x^{2k+1} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k+1} = \frac{x}{1+x^2}.$$

6. *Sustituyendo x por* $2x$ *en la serie geométrica, tenemos que si* $|2x| < 1$, *i.e. si* $|x| < \frac{1}{2}$,

$$1 - 2x + 4x^2 + 8x^3 + \cdots + 2^k x^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k = \frac{1}{1-2x}.$$

7. *Todas estas series tienen la forma general*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

   donde para $k \in \mathbb{N}_0$, a_k *son los coeficientes (reales o complejos). Este tipo de series se denominan* series de potencias.

2.5. Tests de convergencia

En esta sección veremos condiciones suficientes y/o necesarias para la convergencia de una serie.

Teorema 2.5.1. *Si la serie* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *converge, entonces la sucesión* $\{a_n\}$ *converge a* 0.

Demostración. La demostración sigue de observar que $a_n = s_n - s_{n-1}$ y calcular el límite para $n \to \infty$. □

Nota 2.5.1. *Observemos que la implicación recíproca del resultado anterior no es cierta, ya que* $\{\frac{1}{n}\}$ *es una sucesión convergente, pero la serie* $\sum \frac{1}{n}$ *no converge, como ya hemos visto.*

Teorema 2.5.2. *[Test para series de términos no negativos] Sea* $a_n \geq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Luego, la serie* $\sum a_n$ *converge si y solo si la sucesión de sumas parciales está acotada.*

Demostración. El resultado surge inmediatamente del Teorema 1.3.2 aplicado a la sucesión de sumas parciales. □

Ejemplo 2.5.1. *Consideremos la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$. *Observemos que si* $k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$. *Por lo tanto,*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2.$$

A partir del resultado anterior obtenemos que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ *converge. Más aún, veremos que su suma es* $e-1$.

Teorema 2.5.3. *Sean* $a_n \geq 0$ *y* $b_n \geq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Si existe una constante* $c > 0$ *tal que* $a_n \leq cb_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *entonces la convergencia de* $\sum b_n$ *implica la convergencia de la serie* $\sum a_n$.

Demostración. Sea $S = \sum b_n$. Luego, $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq cS$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Aplicando ahora el Teorema 2.5.2 a la sucesión de términos no negativos $\sum a_n$ surge que esta serie es convergente. □

Teorema 2.5.4. *[Test de comparación de límites] Sean* $a_n > 0$ *y* $b_n > 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Si*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1,$$

(se dice que estas sucesiones son asintóticamente iguales) entonces $\sum a_n$ *converge si y solo si* $\sum b_n$ *converge.*

Demostración. Como $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, existe N tal que si $n \geq N$ entonces $\frac{1}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2}$. Por lo tanto, $n \geq N$ entonces $b_n < 2a_n$ y $a_n < \frac{3}{2}b_n$. Aplicando el Teorema 2.5.3 usando ambas desigualdades surge el resultado deseado. □

Teorema 2.5.5. *[Test de la integral] Sea* f *una función positiva decreciente definida en* $[1, +\infty)$. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$, *sean*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(k), \qquad t_n = \int_1^n f(x)\, dx.$$

Luego, ambas sucesiones $\{s_n\}$ *y* $\{t_n\}$ *son convergentes o ambas son divergentes a* $+\infty$.

Demostración. Observemos que

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_1^n f(x)\, dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k),$$

i.e. $s_n - f(1) \leq t_n \leq s_{n-1}$.

Como las sucesiones $\{s_n\}$ y $\{t_n\}$ son ambas crecientes, estas desigualdades implican que ambas son acotadas o ambas son no acotadas. Ergo, ambas sucesiones convergen o ambas divergen a $+\infty$. □

Ejemplo 2.5.2. *Consideremos, dado* $s \in \mathbb{R}$, *la serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}.$$

Si $s \leq 0$, *la sucesión* $\{\frac{1}{n^s}\}$ *no converge a* 0, *y por lo tanto la serie no converge.*

Tomemos $f(x) = x^{-s} = \frac{1}{x^s}$ para $x \geq 1$ y $s > 0$. Resulta

$$t_n = \int_1^n \frac{1}{x^s} = \begin{cases} \frac{n^{1-s}-1}{1-s} & si\ s \neq 1, \\ \ln(n) & si\ s = 1. \end{cases}$$

Si $s > 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1-s} = 0$ y por lo tanto la sucesión $\{t_n\}$ converge. Aplicando el test de la integral obtenemos que si $s > 1$ la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ es convergente.

Por otro lado, si $0 < s \leq 1$, la sucesión $\{t_n\}$ diverge y entonces la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ diverge.

Teorema 2.5.6. *[Test de la raíz] Sea $\sum a_n$ una serie de términos no negativos tal que*

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{n}} = R.$$

1. *Si $R < 1$, entonces la serie $\sum a_n$ converge.*
2. *Si $R > 1$, entonces la serie $\sum a_n$ no converge.*
3. *Si $R = 1$, este criterio no determina la naturaleza de la serie $\sum a_n$.*

Demostración.

1. Supongamos $R < 1$. Sea x tal que $R < x < 1$. Luego, dado que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{n}} = R$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $a_n^{\frac{1}{n}} < x$, i.e. $a_n < x^n$. En consecuencia, aplicando el test de comparación con la serie $\sum x^n$ surge que la serie $\sum a_n$ converge, ya que $x < 1$.
2. Si $R > 1$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $a_n > 1$. Por lo tanto la sucesión $\{a_n\}$ no convere ge a 0, lo que implica que la serie $\sum a_n$ no converge.
3. Si $R = 1$, observemos que considerando $a_n = \frac{1}{n}$ y $a_n = \frac{1}{n^2}$, tenemos que en ambos casos $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{n}} = 1$. Sin embargo, como ya hemos visto, la serie $\sum \frac{1}{n}$ no converge y la serie $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

$\square$

Ejemplo 2.5.3. *Consideremos la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$. Tenemos que*

$$a_n^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \to \frac{1}{e}.$$

Como $\frac{1}{e} < 1$, del Test de la raíz surge que la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ es convergente.

Teorema 2.5.7. *[Test del cociente] Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = R.$$

1. *Si $R < 1$, entonces la serie $\sum a_n$ converge.*
2. *Si $R > 1$, entonces la serie $\sum a_n$ no converge.*

3. *Si $R = 1$, este criterio no determina la naturaleza de la serie $\sum a_n$.*

Demostración. 1. Supongamos $R < 1$. Sea x tal que $R < x < 1$. Luego, dado que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = R$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $\frac{a_{n+1}}{a_n} < x$, dividiendo en ambos lados por x^{n+1} resulta $\frac{a_{n+1}}{x^{n+1}} < \frac{a_n}{x^n}$. Luego, la sucesión $\frac{a_n}{x^n}$ es decreciente para $n \geq N$. Por lo tanto, si $n \geq N$, $\frac{a_n}{x^n} \leq \frac{a_N}{x^N}$, i.e.

$$a_n \leq cx^n, \quad \text{donde } c = \frac{a_N}{x^N}.$$

Luego la serie $\sum a_n$ está dominada por la serie convergente $\sum x^n$, lo que implica que $\sum a_n$ es convergente.

2. Si $R > 1$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, i.e. $a_{n+1} > a_n$. Por lo tanto la sucesión $\{a_n\}$ es estrictamente creciente y cada término es positivo, lo que implica que no converge a 0. Ergo, la serie $\sum a_n$ no converge.

3. Si $R = 1$, observemos que considerando $a_n = \frac{1}{n}$ y $a_n = \frac{1}{n^2}$, tenemos que en ambos casos $\lim_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{n}} = 1$. Sin embargo, como ya hemos visto, la serie $\sum \frac{1}{n}$ no converge y la serie $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

□

Ejemplo 2.5.4. *Consideremos la serie $\sum \frac{n!}{n^n}$. Tenemos que*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n!}{n^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \to \frac{1}{e}.$$

Como $\frac{1}{e} < 1$, del Test del cociente surge que la serie $\sum \frac{n!}{n^n}$ es convergente.

2.6. Series alternantes

Definición 2.6.1. *Llamamos serie alternante (o alternada) a una serie que alterna términos positivos y negativos, i.e. a una serie de la forma*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{k-1}a_k + \ldots,$$

donde para todo $k \in \mathbb{N}$, $a_k > 0$

Algunos ejemplos de series alternantes que ya hemos mencionado son, para $|x| < 1$,

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^k x^{2k} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k} = \frac{1}{1+x^2},$$

y

$$x - x^3 + x^5 - x^7 + \cdots + (-1)^k x^{2k+1} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k+1} = \frac{x}{1+x^2}.$$

Veamos algunos resultados sobre este tipo de series.

Teorema 2.6.1. *[Regla de Leibniz] Sea $\{a_n\}$ una sucesión monótona decreciente con límite 0. Luego, la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k$ converge. Además, si S es la suma de la serie y s_n es la n-ésima suma parcial, se verifica que*

$$0 < (-1)^n(S - s_n) < a_{n+1},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Observemos que las sumas parciales s_{2n} forman una sucesión creciente ya que $s_{2n+2} - s_{2n} = a_{2n+1} - a_{2n+2} > 0$. Similarmente, la sucesión s_{2n-1} es decreciente. Además, ambas sucesiones están acotadas inferiormente por s_2 y superiormente por s_1. Luego, ambas sucesiones son monótonas y acotadas, por lo que son convergentes. Sean $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} = S'$ y $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n-1} = S''$. Vemos que $S' = S''$, ya que,

$$S' - S'' = \lim_{n\to\infty} s_{2n} - \lim_{n\to\infty} s_{2n-1} = \lim_{n\to\infty}(s_{2n} - s_{2n-1}) = \lim_{n\to\infty} -a_{2n} = 0.$$

Sea $S = S' = S''$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n-1} = S$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = S$ (probarlo). A partir del crecimiento de s_{2n} y el decrecimiento de s_{2n-1} tenemos que $s_{2n} < s_{2n+2} \leq S$ y $S \leq s_{2n+1} < s_{2n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia,

$$0 < S - s_{2n} \leq s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1},$$

y

$$0 < s_{2n-1} - S \leq s_{2n-1} - s_{2n} = a_{2n}.$$

Estas dos desigualdades derivan en la desigualdad

$$0 < (-1)^n(S - s_n) < a_{n+1},$$

enunciada en el teorema. □

Ejemplo 2.6.1. 1. *Observemos que la sucesión* $\{\frac{1}{n}\}$ *es decreciente y converge a* 0. *Luego, aplicando la Regla de Leibniz surge que la serie armónica alternante* $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$ *es convergente. Recordemos que la serie armónica* $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots$ *no es convergente.*

2. *Observemos que la serie alternante* $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\ln(k)}{k}$ *es convergente. Vemos que la sucesión* $\frac{\ln(k)}{k}$ *es decreciente y convergente a* 0 *(esto puede probarse considerando la función* $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$ *para* $x\geq 1$ *y aplicando propiedades de las sucesiones).*

2.7. Convergencia condicional y absoluta

Hemos visto que la serie armónica alternante $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$ es convergente, mientras que la serie obtenida considerando los valores absolutos de cada término es la serie armónica, que no es convergente. Es decir, la convergencia de una serie no implica necesariamente la convergencia de la serie de sus valores absolutos. Veamos ahora qué ocurre en la dirección contraria.

Teorema 2.7.1. *Si la serie* $\sum|a_k|$ *converge entonces la serie* $\sum a_k$ *converge y vale que*

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}a_k\right|\leq\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|.$$

Demostración. Supongamos primero que $a_k\in\mathbb{R}$ para todo $k\in\mathbb{N}$. Sea $b_k=a_k+|a_k|$. Si probamos que la serie $\sum b_k$ converge, del Teorema 2.2.1 surge que la serie $\sum a_k$ converge.

De la definición tenemos que $b_k=0$ o $b_k=2a_k$, luego $0\leq b_k\leq 2|a_k|$. Entonces la serie $\sum|a_k|$ domina a la serie $\sum b_k$, y del Teorema 2.5.3 surge que $\sum b_k$ es convergente.

Consideremos ahora que los términos a_k son complejos. Sea $a_k=u_k+iv_k$ donde u_k y v_k son reales. Como $0\leq|u_k|\leq|a_k|$, la convergencia de $\sum|a_k|$ implica la convergencia de $\sum|u_k|$. Luego, como los términos u_k son reales, de lo probado antes tenemos que la serie $\sum u_k$ es convergente. De manera similar se prueba que la serie $\sum v_k$ es convergente. Luego, por linealidad concluimos que la serie $\sum a_k=\sum u_k+iv_k$ es convergente.

La desigualdad $\left|\sum_{k=1}^{\infty}a_k\right|\leq\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$, surge inmediatamente de tomar el límite en la desigualdad de un número finito de términos $\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|\leq\sum_{k=1}^{n}|a_k|$. □

Definición 2.7.1. *Una serie* $\sum a_k$ *se dice absolutamente convergente si* $\sum|a_k|$ *es convergente. Si* $\sum a_k$ *es convergente pero* $\sum|a_k|$ *no es convergente, la serie* $\sum a_k$ *se dice condicionalmente convergente.*

Por ejemplo, la serie armónica alternante $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$ es condicionalmente convergente.

2.8. Tests de Dirichlet y Abel

Teorema 2.8.1. *[Sumas parciales de Abel] Sean* $\{a_k\}$ *y* $\{b_k\}$ *dos sucesiones de números complejos. Consideremos* $A_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$. *Entonces, se verifica la identidad*

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=A_nb_{n+1}+\sum_{k=1}^{n}A_k(b_k-b_{k+1}).$$

Demostración. Si consideramos $A_0 = 0$, resulta $a_k = A_k - A_{k-1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Ergo,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_k b_{k+1} + A_n b_{n+1} = A_n b_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} A_k (b_k - b_{k+1}).$$

□

Teorema 2.8.2. *[Test de Dirichlet] Sea $\sum a_k$ una serie de términos complejos tal que sus sumas parciales forman una sucesión acotada. Sea $\{b_n\}$ una secuencia decreciente que converge a 0. Entonces la serie $\sum a_k b_k$ es convergente.*

Demostración. Sean A_n como en el Teorema 2.8.1 anterior. Luego, existe $M > 0$ tal que $|A_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces la sucesión $A_k b_{k+1}$ converge a 0 ("acotada por una que tiende a 0"). Para ver la convergencia de $\sum a_k b_k$, en virtud del Teorema 2.8.1 es suficiente probar que la serie $\sum A_k (b_k - b_{k+1})$ es convergente.

Dado que $\{b_k\}$ es decreciente tenemos

$$|A_k (b_k - b_{k+1})| \leq M (b_k - b_{k+1}).$$

Como la serie $\sum b_k - b_{k+1}$ es telescópica y la sucesión $\{b_k\}$ es convergente, del Teorema 2.3.1 surge que la serie $\sum b_k - b_{k+1}$ es convergente. Además, por la desigualdad anterior, esta serie domina a la serie $\sum |A_k (b_k - b_{k+1})|$. En consecuencia la serie $\sum A_k (b_k - b_{k+1})$ es absolutamente convergente y por lo tanto, del Teorema 2.7.1, la serie $\sum A_k (b_k - b_{k+1})$ es convergente. □

Teorema 2.8.3. *[Test de Abel] Sea $\sum a_k$ una serie de términos complejos y $\{b_n\}$ una sucesión monótona convergente de términos reales. Entonces la serie $\sum a_k b_k$ es convergente.*

Demostración. Usamos nuevamente la notación del Teorema 2.8.1. La convergencia de la serie $\sum a_k$ implica la convergencia de la sucesión $\{A_k\}$, y esto último la convergencia de la sucesión $\{A_k b_{k+1}\}$, ya que por hipótesis $\{b_k\}$ es convergente. Además, $\{A_k\}$ es una sucesión acotada. Ahora, el resto de la demostración es análoga a la que acabamos de ver en el Teorema 2.8.2. □

Para aplicar el Test de Dirichlet necesitamos series con sumas parciales acotadas. Es claro que una serie convergente tiene sus sumas parciales acotadas. Un ejemplo interesante de serie no convergente con sumas parciales acotadas es la serie geométrica $\sum x^k$ con x compleja tal que $|x| = 1$ y $x \neq 1$. Si $|x| = 1$ notamos $x = e^{2i\theta}$ con $\theta \in \mathbb{R}$.

Teorema 2.8.4. *Sea $\theta \in \mathbb{R}$ distinto de un múltiplo entero de π. Entonces, se verifica la igualdad*

$$\sum_{k=1}^{n} e^{2ik\theta} = \frac{\operatorname{sen}(n\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)} e^{i(n+1)\theta}.$$

Además,

$$\left| \sum_{k=1}^{n} e^{2ik\theta} \right| \leq \frac{1}{|\operatorname{sen}(\theta)|}.$$

Demostración. Si $x \neq 0$, las sumas parciales de la serie geométrica es

$$\sum_{k=1}^{n} x^k = x \frac{x^n - 1}{x - 1}.$$

Tomando $x = e^{2i\theta}$ ($\theta \in \mathbb{R}$ diferente de un múltiplo entero de π), se tiene

$$\sum_{k=1}^{n} e^{2ik\theta} = e^{2i\theta}\frac{e^{2in\theta}-1}{e^{2i\theta}-1} = \frac{e^{in\theta}-e^{-in\theta}}{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}e^{i(n+1)\theta} = \frac{\operatorname{sen}(n\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)}e^{i(n+1)\theta}.$$

Finalmente, la desigualdad surge observando que $|\operatorname{sen}(n\theta)| \leq 1$ y $|e^{i(n+1)\theta}| = 1$. □

Ejemplo 2.8.1. *Sea $\{b_k\}$ una sucesión decreciente de números reales, con límite 0. Considerando $a_k = x^k$ en el Test de Dirichlet, donde x es compleja tal que $|x| = 1$ y $x \neq 1$, resulta que la serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k x^k$$

es convergente. Notar que la Regla de Leibniz sigue simplemente de considerar $x = -1$.

Tomemos ahora $x = e^{i\theta}$, donde $\theta \in \mathbb{R}$ es diferente de un múltiplo entero de 2π y tomemos las partes real e imaginaria en la serie anterior. Deducimos entonces que las series

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos(k\theta) \quad y \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{sen}(k\theta),$$

son convergentes.

En particular, si $b_k = \frac{1}{k^s}$ con $s > 0$, las series

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ik\theta}}{k^s}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k\theta)}{k^s}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(k\theta)}{k^s},$$

son convergentes. Más aún, si $s > 1$ las series son absolutamente convergentes ya que están dominadas por $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$.

2.9. Reordenamiento de series

Sabemos que la suma de un número finito de términos no se altera si modificamos el orden en que los sumamos, ya que la suma es conmutativa. Veamos qué ocurre en el caso de series.

Primero, enunciamos un resultado que nos permite afirmar que si la serie es absolutamente convergente entonces su suma no se modifica si alteramos el orden de los términos de la serie. Para esto, definamos primero qué entendemos por reordenamiento de una serie.

Definición 2.9.1. *Sea $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ una función biyectiva. A tal función se la denomina permutación (de $\mathbb{N}$). Si $\sum a_k$ y $\sum b_k$ son dos series tales que para todo $k \in \mathbb{N}$*

$$b_k = a_{f(k)},$$

para alguna permutación f, entonces la serie $\sum b_k$ es un reordenamiento de la serie $\sum a_k$.

Teorema 2.9.1. *Sea $\sum a_k$ una serie absolutamente convergente con suma S. Entonces, todo reordenamiento de $\sum a_k$ es absolutamente convergente y tiene suma S.*

Ahora bien, surge naturalmente analizar si la condición de convergencia absoluta puede relajarse, i.e. ¿qué ocurre con una serie condicionalmente convergente?

Veremos que una serie condicionalmente convergente de términos reales puede reordenarse de forma tal que su suma sea cualquier número real preestablecido.

Dada una serie $\sum a_k$ definimos dos nuevas series $\sum a_k^+$ y $\sum a_k^-$ obtenidas tomando solamente los términos positivos y solamente los términos negativos, respectivamente. De esta forma, serán

$$a_k^+ = \frac{a_k + |a_k|}{2}, \qquad a_k^- = \frac{a_k - |a_k|}{2}.$$

Observemos que si a_k es positivo, entonces $a_k^+ = a_k$ y $a_k^- = 0$, y si a_k es negativo, entonces $a_k^- = a_k$ y $a_k^+ = 0$.

Teorema 2.9.2. *Sean $\sum a_k$ una serie de términos reales y a_k^+ y a_k^- como acabamos de definir.*

1. *Si $\sum a_k$ es condicionalmente convergente, las series $\sum a_k^+$ y $\sum a_k^-$ no convergen.*
2. *Si $\sum a_k$ es absolutamente convergente, las series $\sum a_k^+$ y $\sum a_k^-$ convergen y vale*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-.$$

Demostración.

1. Observemos que las serie $\sum \frac{1}{2} a_k$ converge y $\sum \frac{1}{2}|a_k|$ no converge. En consecuencia, aplicando el Corolario 2.2.1 obtenemos que las series $\sum a_k^+$ y $\sum a_k^-$ no convergen.
2. Las series $\sum \frac{1}{2} a_k$ y $\sum \frac{1}{2}|a_k|$ convergen. Luego, del Teorema 2.2.1 obtenemos que las series $\sum a_k^+$ y $\sum a_k^-$ convergen y

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-.$$

□

Teorema 2.9.3. *Sea $\sum a_k$ una serie de términos reales condicionalmente convergente y sea S un número real cualquiera. Luego, existe un reordenamiento $\sum b_k$ de $\sum a_k$ que converge a S*

Demostración. Del Teorema anterior sabemos que $\sum a_k^+$ y $\sum a_k^-$ divergen. Reordenamos la serie $\sum a_k$ de la siguiente forma: Tomamos, en orden, la cantidad mínima de términos a_k^+ de forma tal que su suma sea mayor a S. Si se requieren p_1 términos positivo, entonces

$$\sum_{k=1}^{p_1} a_k^+ > S \quad \text{pero} \quad \sum_{k=1}^{q} a_k^+ \leq S \quad \text{si } q < p_1.$$

Esto es posible ya que $\sum a_k^+$ tiende a $+\infty$.

Ahora, a esta suma agregamos la cantidad mínima de términos negativos a_k^- (en orden), digamos n_1 tal que la suma resultante sea menor a S. Nuevamente, esto es posible ya que $\sum a_k^-$ tiende a $-\infty$. Resulta entonces

$$\sum_{k=1}^{p_1} a_k^+ + \sum_{k=1}^{n_1} a_k^- < S \quad \text{pero} \quad \sum_{k=1}^{p_1} a_k^+ + \sum_{k=1}^{m} a_k^- \geq S \quad \text{si } m < n_1.$$

Repitiendo este procedimiento (agregando la cantidad mínima de términos positivos que sea mayor a S y luego la cantidad mínima de términos negativos tal que la suma sea menor a S) obtenemos un reordenamiento $\sum b_k$. Vemos que cada suma parcial $\sum b_k$ difiere de S en a lo sumo un término a_k^+ o a_k^-. Observemos que la sucesión $\{a_k\}$ converge a 0 ya que por hipótesis la serie $\sum a_k$ converge. Luego, el reordenamiento $\sum b_k$ converge y tiene suma S. □

3. Sucesiones y series de funciones

Consideremos ahora una sucesión de funciones $\{f_n\}$ de variable real con mismo dominio y con codominio en $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$). Luego, para cada x en su dominio, tenemos ahora una sucesión numérica $\{f_n(x)\}$ correspondiente a los valores de cada f_n en x. Sea S el conjunto de puntos x del dominio para los cuales esta sucesión converge. Es decir, tenemos una función f con dominio en S tal que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \qquad \text{si } x \in S.$$

Esta función es llamada *función límite* de la sucesión $\{f_n\}$, y se dice que la sucesión $\{f_n\}$ converge puntualmente a f en S. Surge preguntarse, ¿qué propiedades de las funciones (continuidad, derivabilidad, integrabilidad) de la sucesión hereda la función f?

Veamos algunos ejemplos

Ejemplo 3.0.1. 1. *Sean $f_n(x) = x^n$ para $x \in [0,1]$. Esta sucesión converge puntualmente a la función f dada por*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \in [0,1), \\ 1 & si\ x = 1. \end{cases}$$

Notar que esta función es discontinua en 1, mientras que todas las funciones f_n son continuas en $[0,1]$.

2. *Sean $f_n(x) = nx(1-x^2)^n$ para $x \in [0,1]$. Esta sucesión converge puntualmente a la función f constante nula en el intervalo $[0,1]$.*

   Observemos que

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = n\int_0^1 x(1-x^2)^n\,dx = -\frac{n}{2}\frac{(1-x^2)^{n+1}}{n+1}\bigg|_0^1 = \frac{n}{2(n+1)}.$$

   Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2}$, pero $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0$. Es decir, el límite de las integrales no necesariamente es la integral del límite puntual.

Acabamos de ver que algunas de las propiedades mencionadas no pueden "pasar" directamente al límite puntual de las funciones. Veremos un criterio de convergencia más fuerte que el puntual, el cual nos permitirá heredar a la función límite estas propiedades.

3.1. Convergencia uniforme

Definición 3.1.1. *Una sucesión de funciones $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en un conjunto S si, dado $\varepsilon > 0$, existe N tal que si $n \geq N$ entonces*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \qquad \textit{para todo } x \in S.$$

Notación:

$$f \to f \qquad \textit{uniformemente en } S.$$

Observemos que el valor de N solo dende de ε y no depende de x.

Teorema 3.1.1. *Supongamos que $f_n \to f$ uniformemente en un intervalo S. Si f_n es continua $p \in S$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces f es continua en p.*

Demostración. Probaremos que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x-p| < \delta$ y $x \in S$ entonces $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$.

Sea $\varepsilon > 0$. De la convergencia uniforme sabemos que existe N tal que si $n \geq N$ entonces

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por otro lado, como f_N es continua en p, existe $\delta_N > 0$ tal que si $|x-p| < \delta_N$ y $x \in S$, entonces

$$|f_N(x) - f_N(p)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Sea $\delta = \delta_N$. Luego, si $|x-p| < \delta$ y $x \in S$ entonces

$$|f(x) - f(p)| = |f(x) - f_N(x) + f_N(x) - f_N(p) + f_N(p) - f(p)| \leq$$

$$\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(p)| + |f_N(p) - f(p)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

como queríamos probar. □

Consideremos una sucesión de funciones u_k y sean f_n la suma parcial n-ésima de las u_k, i.e.

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x).$$

Si $f_n \to f$ puntualmente en $x \in S$, tenemos que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x),$$

para cada $x \in S$. En este caso decimos que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ converge puntualmente a f en S.

De la misma forma, si $f_n \to f$ uniformemente en S, decimos que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ converge uniformemente a f en S.

Observemos que si las u_k son todas continuas en un punto $p \in S$, entonces cada f_n es continua en $p \in S$. Luego, aplicando el teorema anterior a la sucesión de sumas parciales f_n se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.1.2. *Si una serie de funciones $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ converge uniformemente a f en S y cada u_k es continua en un punto $p \in S$, entonces f es continua en p.*

Veamos ahora qué ocurre con la integración en el caso de la converegncia uniforme.

Teorema 3.1.3. *Supongamos que $f_n \to f$ uniformemente en un intervalo $[a,b]$ y cada f_n es continua en $[a,b]$. Sean, para cada $n \in \mathbb{N}$,*

$$g_n(x) = \int_a^x f_n(t)\, dt, \qquad \text{si } x \in [a,b],$$

$$g(x) = \int_a^x f(t)\ dt.$$

Entonces, $g_n \to g$ uniformemente en $[a,b]$, i.e.

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n(t)\ dt = \int_a^x \lim_{n\to\infty} f_n(t)\ dt.$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces

$$|f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{b-a}, \quad \text{para todo } t \in [a,b].$$

Luego, si $x \in [a,b]$ y $n \geq N$ entonces

$$|g_n(x) - g(x)| = \left| \int_a^x (f_n(t) - f(t))\ dt \right| \leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\ dt < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\ dt = \varepsilon.$$

En consecuencia, $g_n \to g$ uniformemente en $[a,b]$. $\square$

Corolario 3.1.1. *Sea $\sum u_k$ una serie de funciones que converge uniformemente a la función suma f en un intervalo $[a.b]$, donde cada u_k es continua en $[a,b]$. Para $x \in [a,b]$, sean*

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_a^x u_k(t)\ dt, \quad y \quad g(x) = \int_a^x f(t)\ dt.$$

Entonces, $g_n \to g$ uniformemente en $[a,b]$, i.e.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^x u_k(t)\ dt = \int_a^x \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\ dt.$$

Demostración. El resultado surge inmediatamente de aplicar el teorema anterior a la sucesión de sumas parciales $f_n(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(t)$. $\square$

3.1.1. Condición suficiente para convergencia uniforme

Teorema 3.1.4 (Test M de Weierstrass)**.** *Sea $\sum u_k$ una serie de funciones que converge puntualmente a la función f en un conjunto S. Si existe una serie numérica convergente de términos positivos tal que*

$$0 \leq |u_k(x)| \leq M_n \quad \text{para todo } x \in S \text{ y todo } n \in \mathbb{N},$$

entonces la serie $\sum u_k$ converge uniformemente en S.

Demostración. El test de comparación muestra que la serie $\sum u_k$ converge absolutamentepar cada $x \in S$. Además, para cada $x \in S$, tenemos

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k.$$

Como la serie $\sum M_k$ converge, para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} M_k < \varepsilon.$$

Luego,

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \right| < \varepsilon,$$

para todo $n \geq N$ y para todo $x \in S$. Por lo tanto, la serie $\sum u_k$ converge uniformemente a f en S. $\square$

3.2. Series de potencias. Círculo de convergencia.

Una serie de la forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k (z-a)^k = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots + a_k(z-a)^k + \dots$$

donde $z, a, a_k \in \mathbb{C}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, es denominada *serie de potencias en $z-a$*.

Veremos que las series de potencias tienen asociado un *círculo de convergencia*, con un *radio de convergencia r*, tal que para z en el interior de dicho círculo la serie resulta absolutamente convergente y si z está fuera de este círculo la serie diverge. En particular, la serie puede solo converger para $z = a$, en cuyo caso diremos que $r = 0$, o puede converger en todo el plano complejo y en tal caso diremos que $r = +\infty$.

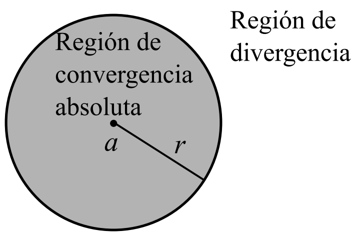

Figura 1: Círculo de convergencia de radio r.

Ejemplo 3.2.1.

1. *Consideremos la serie $\sum \frac{z^n}{n!}$. Aplicando el criterio del cociente, para $z \neq 0$, tenemos*

$$\left| \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{z^n} \right| = \frac{|z|}{n+1}.$$

Como este cociente tiende a 0 cuando $n \to \infty$, resulta que la serie converge absolutamente para todo $z \neq 0$. Como también es convergente para $z = 0$, el radio de convergencia es $r = +\infty$.

2. *Tomemos ahora la serie $\sum n^2 3^n z^n$. A partir del criterio de la raíz, resulta*

$$(n^2 3^n |z|^n)^{1/n} = n^{2/n} 3|z|.$$

Como $n^{1/n}$ converge a 1 cuando $n \to \infty$, entonces $n^{2/n} = n^{1/n} n^{1/n}$ converge a 1. Luego, $(n^2 3^n |z|^n)^{1/n} = n^{2/n} 3|z|$ converge a $3|z|$, y por lo tanto la serie converge absolutamente si $|z| < \frac{1}{3}$ y diverge si $|z| > \frac{1}{3}$. En consecuencia, el radio de convergencia es $r = \frac{1}{3}$.

Observemos que esta serie diverge en todos los puntos de la frontera del círculo de convergencia ($z : |z| = \frac{1}{3}$), ya que el término general $n^2 3^n z^n$ tiene valor absoluto n^2, el cual no tiende a 0 cuando $n \to \infty$.

3. *Consideremos ahora las series* $\sum \frac{z^n}{n}$ *y* $\sum \frac{z^n}{n^2}$*. Aplicando el criterio del cociente surge que el radio de convergencia es* $r = 1$*. Observemos que la serie* $\sum \frac{z^n}{n}$ *diverge para* $z = 1$ *y converge en cualquier otro* z *de la frontera. Sin embargo, la serie* $\sum \frac{z^n}{n^2}$ *converge en toda la frontera* $|z| = 1$*, ya que para estos valores de* z *está dominada por la serie* $\sum \frac{1}{n^2}$*.*

Teorema 3.2.1. *Sea* $\sum a_k z^k$ *una serie de potencias que converge para algún* $z_1 \neq 0$*. Entonces:*

1. *La serie converge absolutamente para todo* z *tal que* $|z| < |z_1|$*.*

2. *La serie converge uniformemente en todo disco circular cerrado de radio* $R < |z_1|$ *con centro en* 0*.*

Demostración. Como la serie $\sum a_k z_1^k$ converge, su término general $a_k z_1^k$ tiende a 0 cuando $n \to 0$. Luego, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $|a_k z_1^k| < 1$.

Sea S un disco cerrado de radio $R < |z_1|$. Si $z \in S$ y $n \geq N$, entonces $|z| \leq R$ y

$$|a_k z^k| = |a_k z_1^k| \left|\frac{z}{z_1}\right|^k < \left|\frac{z}{z_1}\right|^k \leq \left|\frac{R}{z_1}\right|^k = t^k,$$

con $t = \left|\frac{R}{z_1}\right|$.

Como $0 < t < 1$, la serie $\sum a_k z^k$ está dominada por la serie $\sum t^k$, la cual es convergente. Del Test M de Weierstrass surge que la serie $\sum a_k z^k$ converge uniformemente en S, lo cual demuestra el segundo item.

De esto último, también se deduce que la serie converge absolutamente para todo $z \in S$. En consecuencia, si $|z| < |z_1|$ entonces existe R tal que $|z| < R < |z_1|$ y por lo tanto z está en el disco cerrado de radio R. Luego, la serie converge absolutamente en z, lo cual prueba el primer item. ☐

Teorema 3.2.2 (Existencia del Círculo de convergencia)**.** *Sea* $\sum a_k z^k$ *una serie de potencias que converge para algún* $z_1 \neq 0$ *y diverge para algún* $z_2 \neq 0$*. Entonces, existe* $r > 0$ *tal que la serie converge absolutamente si* $|z| < r$ *y diverge si* $|z| > r$*.*

Demostración. Sea A el conjunto de todos los números positivos $|z|$ para los cuales la serie de potencias $\sum a_k z^k$ converge. El conjunto A es no vacío ($|z_1| \in A$) y por el Teorema 3.2.1 resulta que ningún elemento de A es mayor a $|z_2|$. Luego, A es un conjunto de números reales no vacío acotado superiormente, lo que, por el Axioma del Supremo, implica que existe $r = sup(A)$.

Evidentemente, como ningún número en A es mayor a r, la serie $\sum a_k z^k$ diverge si $|z| > r$.

Es claro que $r \geq |z_1|$. Además, si $|z| < r$, existe un número $t \in A$ tal que $|z| < t < r$. Como $t \in A$, del Teorema 3.2.1 obtenemos que la serie $\sum a_k z^k$ converge absolutamente. ☐

3.3. Series de Potencias reales

Estudiaremos ahora *series de potencias reales*, i.e. series de la forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k,$$

donde $a_k, x, a \in \mathbb{R}$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$.

De lo visto antes, surge que existe un intervalo de convergencia, o sea, existe r tal que la serie de potencias reales converge absolutamente para todo $x \in (a-r, a+r)$ y converge uniformemente en $[a-R, a+R]$ para todo R con $0 < R < r$. De los resultados vistos sobre continuidad e integración surge el siguiente:

Teorema 3.3.1. *Sea f una función representada en serie de potencia reales como*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k,$$

en el intervalo $(a-r, a+r)$. Entonces, f es continua en este intervalo y su integral sobre cualquier subintervalo cerrado puede calcularse integrando la serie término a término. En particular, para todo $x \in (a-r, a+r)$, resulta

$$\int_a^x f(t)\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_a^x (t-a)^k\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1}.$$

Veamos ahora qué ocurre en el caso de la derivación término a término.

Teorema 3.3.2. *Sea f una función representada en serie de potencia reales como*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k,$$

en el intervalo de convergencia $(a-r, a+r)$. Entonces:

1. *La serie derivada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k a_k (x-a)^{k-1}$ también tiene radio de convergencia r.*

2. *La derivada $f'(x)$ existe para cada x en el intervalo de convergencia y está dada por*

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-a)^{k-1}.$$

Demostración. Nuevamente, sin pérdida de generalidad podemos asumir que $a = 0$.

Probaremos primero que la serie derivada converge absolutamente en $(-r, r)$. Sea $x \in (0, r)$. Consideremos h tal que $x < x+h < r$ (e.g. $h = \frac{r-x}{2}$). Luego, las series para $f(x)$ y para $f(x+h)$ son ambas absolutamente convergentes, ya que x y $x+h$ pertenecen al intervalo $(-r, r)$. En consecuencia,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+h)^k - x^k}{h}.$$

La serie de la derecha es absolutamente convergente, ya que es una combinación lineal de series absolutamente convergentes. Aplicando el Teorema del Valor Medio tenemos,

$$(x+h)^k = hkc_k^{k-1},$$

con $x < c_k < x+h$. Luego,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+h)^k - x^k}{h} = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k c_k^{k-1},$$

la cual converge absolutamente.

La serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k a_k c_k^{k-1}$ no es una serie de potencias, pero domina a la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ (ya que$x < c_k$), por lo que esta última serie es convergente para este x. Esto prueba que el radio de convergencia de la serie derivada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ka_k x^{k-1}$ es al menos r. Pero, por otro lado, el radio de convergencia de la serie derivada no puede exceder r ya que la serie derivada domina a la serie original $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ (notar que $a_k x^k \leq x.(ka_k x^{k-1})$). Esto prueba la parte (a) del teorema.

Para probar la segunda parte, consideremos g la función suma de la serie derivada, i.e.

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} ka_k x^{k-1}.$$

Aplicando el teorema anterior a g, podemos integrar témino a término en el intervalo de convergencia y obtenemos,

$$\int_0^x g(t)\, dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x ka_k t^{k-1}\, dt = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = f(x) - a_0.$$

Como g es continua, del Primer Teorema Fundamental del Cálculo surge que $f'(x)$ existe y es igual a $g(x)$ para cada x en el intervalo de convergencia, lo cual demuestra la parte (b). $\square$