FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA

Escuela de Formación Básica - Departamento de Matemática

Álgebra y Geometría I

Vectores

Raúl D. Katz

2011

1. Introducción

Este material es una ampliación del que oportunamente fuera elaborado en forma conjunta con la Profesora Martha Guzmán. En el mismo se presentan nuevos ejemplos y problemas, se realizan las demostraciones de algunas propiedades que estaban propuestas para el alumno y se recomiendan actividades de Internet que posiblemente contribuyan a una mejor comprensión del tema.
Seguramente encontrará dificultades, que no deben desalentarlo. Por el contrario, superar las mismas tiene que ser un desafío.
Para ello le sugiero concurrir y participar activamente de las clases, plantear sus dudas, interactuar con sus compañeros, asistir a los horarios de consulta, realizar las actividades que se proponen, y otras, que podrá encontrar en diferentes medios.
Su estudio no debe limitarse a recordar una fórmula para el cálculo inmediato. Es importante apropiarse de las definiciones, de las representaciones simbólicas, poder enunciar claramente las propiedades y comprender significativamente las demostraciones, estableciendo relaciones entre los diferentes conceptos y procedimientos.
En síntesis, usted debe asumirse como estudiante universitario, comprometiéndose responsablemente con el estudio.

Agradezco al Prof. Pablo Sabatinelli por haber mejorado la presentación de este material.

Lic. Raúl D. Katz

Índice

2. Sistema de coordenadas

2.1. Referencia histórica

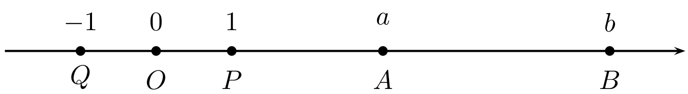
La idea de emplear un número para ubicar un punto en una recta era conocida por los antiguos griegos. En 1637 Descartes extendió esta idea utilizando un par ordenado de números (a_1, a_2) para situar un punto en el plano, y una terna ordenada de números (a_1, a_2, a_3) para situar un punto en el espacio. En el siglo XIX, los matemáticos Cayley y Grassmann empezaron a utilizar las cuaternas de números (a_1, a_2, a_3, a_4) o más general, las n-uplas o conjuntos ordenados de n números reales $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Recuerde

$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ es el conjunto de todos los pares ordenados de números reales (ordenados significa que (x, y) es distinto de (y, x)).
$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$ es el conjunto de todas las ternas ordenadas de números reales.
$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n\}$ es el conjunto de todas las n-uplas ordenadas de números reales.

2.2. Sistema de coordenadas sobre una recta

Dada una recta y sobre la misma un punto O, que llamamos origen, éste divide a la recta en dos semirrectas. Al punto O le hacemos corresponder el número 0.
Eligiendo arbitrariamente otro punto P ("a la derecha de O"), al que se le hace corresponder el número 1, quedan determinados: una semirrecta positiva (la que contiene al punto P) y un segmento OP, que llamamos segmento unitario.



Estos elementos determinan sobre la recta una escala, a través de la cual, se puede establecer una *correspondencia biunívoca* entre los puntos de la recta y los números reales. Esto significa que: a cada punto A le corresponde un único número real a, que llamamos abscisa o coordenada de A, y recíprocamente a cada número real a le corresponde un único punto A.
Sobre la semirrecta con origen en O que no contiene al punto P se representan los números negativos. Por ejemplo, al punto Q ubicado sobre la recta y simétricamente a P respecto del origen O, le corresponde el número -1.
Los puntos ubicados sobre la semirrecta que contiene a P tendrán abscisas o coordenadas positivas, razón por la cual a dicha semirrecta se la denomina *semieje positivo*. Los puntos ubicados sobre la otra semirrecta tendrán abscisas o coordenadas negativas. A dicha semirrecta se la denomina *semieje negativo*. Con este procedimiento se ha determinado sobre la recta un *sistema de coordenadas*. En tales circunstancias se la denomina *recta real* o *eje real*.
Merece destacarse que la correspondencia establecida entre puntos de una recta (entes geométricos) y los números reales (entes algebraicos) *conserva el orden*, en el sentido que A (punto de coordenada a) se encuentra a la izquierda de B (punto de coordenada b) siempre y cuando $a < b$.
La distancia entre A y B se determina a través de $b - a$, la coordenada mayor menos la coordenada menor.
Asimismo notemos que la correspondencia tiene la propiedad de que a "puntos suficientemente cercanos" le corresponden "números suficientemente cercanos", y recíprocamente; razón por la cual decimos que la correspondencia es *bicontinua*.

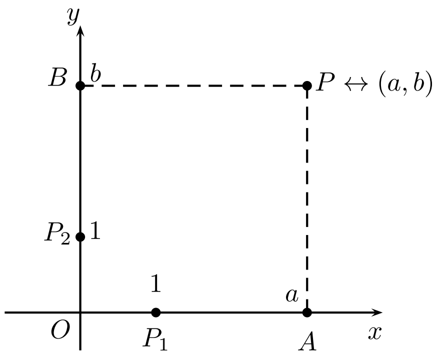
2.3. Propuesta

1. Ubique sobre el eje real los puntos de abscisas: $\frac{5}{2}$, $-\frac{5}{2}$, $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2} + 1$.
2. ¿Cuál es la distancia entre los puntos de abscisas -3 y -8?
3. ¿Cuál es la abscisa del punto medio entre -3 y 5?

2.4. Sistema de coordenadas en el plano

En el párrafo anterior hemos explicado cómo se establece una correspondencia biunívoca entre los números reales y puntos de una recta. Vamos a ampliar este procedimiento estableciendo una correspondencia

biunívoca entre los puntos de un plano y los pares ordenados de números reales. A tal fin consideramos un par de rectas perpendiculares, una horizontal y la otra vertical, que se cortan en un punto O, que se toma como el origen para ambas rectas. Sobre cada recta se eligen respectivamente un punto P_1 y otro P_2, como se muestra en la siguiente figura. Estos puntos determinan una unidad de medida sobre cada recta. Cuando las unidades son iguales en ambas rectas, hemos construido un sistema de ejes cartesianos. Al ser las rectas perpendiculares decimos *un sistema de ejes cartesianos ortogonales*. Al eje horizontal se lo acostumbra llamar eje x, y al eje vertical eje y.
Fijado un sistema de ejes cartesianos ortogonales en el plano, a cada punto P del plano se le hace corresponder un par ordenado de números reales de la manera que sigue. Se trazan por P rectas perpendiculares a los ejes x e y. Estas rectas cortan a los ejes x e y en los puntos A y B, cuyas coordenadas en dichos ejes son respectivamente: a y b. Por lo tanto hacemos corresponder al punto P el par ordenado (a, b). Al número a se lo llama *abscisa* de P, mientras que al número b se lo llama *ordenada* de P.



Recíprocamente, dado un par ordenado (a, b) de números reales, representando sobre el eje x el punto A de coordenada a y sobre el eje y el punto B de coordenada b, y trazando luego por A y por B rectas paralelas a los ejes, el punto P en que dichas rectas se cortan, tiene coordenadas (a, b). De esta manera se establece una correspondencia biunívoca entre los puntos de un plano y el conjunto de los pares ordenados de números reales, $\mathbb{R}^2$.
Observe que si P se encuentra sobre el eje y (también llamado eje de las ordenadas) entonces $a = 0$. En cambio, si P se encuentra sobre el eje x (también llamado eje de las abscisas) entonces $b = 0$.

2.5. Propuesta

1. Represente en un sistema de ejes cartesianos ortogonales los puntos de coordenadas: $(3, 2)$; $(-3, 0)$; $(0, 4)$; $\left(\frac{3}{2}, -1\right)$; $\left(-2, \sqrt{5}\right)$; $(-3, -4)$.

2. ¿Qué propiedad geométrica común tienen los puntos $(2, 4)$, $(2, -3)$, $(2, 0)$, $(2, 5)$?

3. Dado el punto P de coordenadas $(3, 2)$ represente gráficamente y explicite las coordenadas de los puntos Q, R y S, que son los simétricos de P con respecto al eje x, al eje y y al origen de coordenadas, respectivamente.

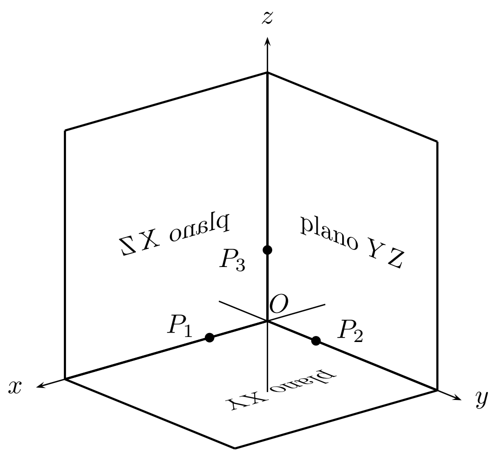
4. Analice si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.

   a) las coordenadas de los puntos de la bisectriz del primer y tercer cuadrante son de la forma (a, a) donde $a \in \mathbb{R}$ (conjunto de los números reales).

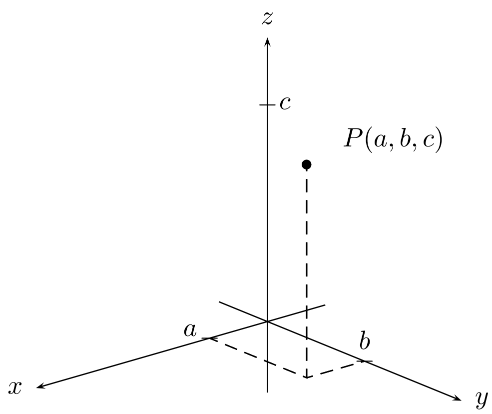
   b) las coordenadas de los puntos de la bisectriz del segundo y cuarto cuadrante son de la forma $(-a, -a)$ donde $a \in \mathbb{R}$.

2.6. Sistemas de coordenadas en el espacio

Consideremos tres rectas que no están sobre un mismo plano, dos a dos perpendiculares entre sí, que se cortan en un punto O. Sobre cada recta se toman respectivamente los puntos P_1, P_2 y P_3 como se muestra en la figura; los mismos determinan la unidad de medida sobre cada recta. Salvo que se diga lo contrario elegimos la misma unidad de medida sobre cada recta. De este modo queda determinado un sistema de ejes cartesianos ortogonales en el espacio. Las rectas que contienen a los puntos P_1, P_2 y P_3 se denominan ejes coordenados x, y, z respectivamente. Los tres ejes coordenados determinan tres planos coordenados. El plano XY contiene a los ejes: x, y; el plano YZ contiene a los ejes: y, z; el plano XZ contiene a los ejes: x, z. Estos tres planos coordenados dividen al espacio en ocho partes, llamados *octantes*. El *primer octante*, queda determinado por los tres "semiejes positivos".



Dado un sistema de ejes cartesianos ortogonales en el espacio, establecemos una correspondencia biunívoca entre los puntos del espacio y las ternas (x, y, z) de números reales, de la manera que se explica a continuación.



Por el punto P trazamos un plano paralelo al plano coordenado YZ, que corta al eje x en un punto de coordenada a; análogamente el plano que contiene a P y es paralelo al plano XZ corta al eje y en un punto de coordenada b, y el plano que contiene a P y es paralelo al plano coordenado XY corta al eje z en un punto de coordenada c. La terna ordenada (a, b, c) está determinada de manera única por el punto P. También dicha terna determina de manera única al punto P. Queda establecida de esta manera una correspondencia biunívoca entre los puntos del espacio (entes geométricos) y las ternas ordenadas de números reales (entes algebraicos o analíticos). Decimos que (a, b, c) son las coordenadas del punto P y se acostumbra escribir $P(a, b, c)$.

Al asignar coordenadas a los puntos de un plano o a los puntos del espacio podemos traducir conceptos geométricos en conceptos analíticos, lo que constituye el punto central de la Geometría Analítica.

2.7. Propuesta

1. ¿Qué propiedad geométrica común tienen los puntos $(0, 1, 2)$, $(0, 3, -4)$, $(0, 2, 5)$?

2. ¿Qué propiedad geométrica común tienen los puntos $(1, 2, 9)$, $(1, 3, -2)$, $(1, 4, 3)$?

3. ¿Qué propiedad geométrica común tienen los puntos $(3, 4, -2)$, $(3, 4, 2)$, $(3, 4, 5)$?

4. ¿Cuál de los puntos $A(6, 2, 3)$, $B(5, -1, 3)$ y $C(1, 3, 8)$ se encuentra "más cerca" del plano XZ? ¿Cuál es el punto del plano XZ "más cercano" a dicho punto?

5. Escriba las coordenadas de un punto en el espacio y determine luego las coordenadas de los siguientes puntos: el simétrico respecto a cada plano coordenado, el simétrico respecto a cada eje coordenado, el simétrico respecto del origen de coordenadas.

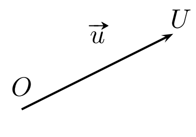
3. Vectores

3.1. Magnitudes escalares y vectoriales

Existen magnitudes que, una vez fijada la unidad de medida, se determinan por medio de un único número real. Tales magnitudes, como lo son la longitud de una barra, el volumen, la temperatura y masa de un cuerpo se denominan *magnitudes escalares.* Hay otras magnitudes que no pueden determinarse mediante un único número real. Por ejemplo, para la velocidad de un móvil no basta conocer su intensidad, sino que hace falta conocer además la dirección y el sentido en que el móvil se mueve.
Lo mismo ocurre con las fuerzas: su efecto depende no sólo de la intensidad, sino también de la dirección y sentido en que actúan.
Otros ejemplos de magnitudes vectoriales son la aceleración, presión, campo eléctrico, etc. Estas magnitudes en las cuales hay que distinguir su intensidad (que es una magnitud escalar), su dirección y sentido, se llaman *magnitudes vectoriales.* La noción de vector aparece para caracterizar a las mismas.
En lo que sigue, las nociones de punto, recta, plano, ángulo, etc. se utilizarán de acuerdo a lo que se conoce de la geometría elemental.

3.2. Definición de vector

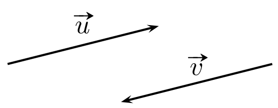
Se llama *vector* a todo segmento orientado, es decir a todo segmento determinado por un par ordenado (O, U) de puntos. El punto O se llama origen y el punto U se llama extremo del vector. Se lo representa gráficamente mediante una flecha, razón por la cual algunos lo denominan de esa manera. Usamos indistintamente las siguientes notaciones: $\overrightarrow{OU}$ o simplemente $\vec{u}$.



En todo vector se distinguen:

1. la *dirección*, que está dada por la recta que lo contiene (recta sostén) o por una paralela cualquiera a la misma,

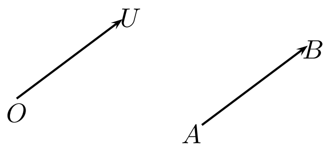
2. el *sentido*, que está dado por la orientación de la flecha (cada dirección tiene dos sentidos). Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección pero sentidos opuestos.



3. el *módulo*, que es igual a la longitud del segmento orientado que define al vector. El módulo de $\overrightarrow{OU}$ lo simbolizamos $\left|\overrightarrow{OU}\right|$. El módulo es siempre un número no negativo. Si el módulo es cero quiere decir que el origen coincide con el extremo, es decir, el vector se reduce a un punto y por lo tanto no puede hablarse propiamente de un vector. En este caso, aun cuando la dirección y el sentido no están determinados, para facilitar muchas operaciones que se verán más adelante, decimos que se trata del *vector nulo* y lo simbolizamos: $\vec{0}$.
En síntesis $|\vec{u}| \geq 0$, más aún: $|\vec{u}| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.

3.3. Igualdad de vectores

Dos *vectores* se dicen *iguales* cuando ambos tienen módulo cero, o cuando ambos tienen la misma dirección, el mismo sentido e iguales módulos.
Con esta definición de igualdad entre vectores, todos los vectores iguales a uno dado pueden ser trasladados de manera que tengan un origen común. De esta manera, cada vector "y todos sus iguales" tendrán un "solo representante" con origen en el punto mencionado.
De acuerdo a la definición de igualdad, dado un punto A y un vector $\overrightarrow{OU}$, existe un vector con origen en A igual al vector OU, o equivalentemente, existe un punto B tal que $\overrightarrow{OU} = \overrightarrow{AB}$.



Si $\overrightarrow{OU} = \overrightarrow{AB}$, ¿cómo son $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{UB}$?

La igualdad así definida caracteriza a los *vectores libres*. En algunos casos es necesario considerar los llamados *vectores deslizantes* como asimismo los *vectores fijos*, que se diferencian por definiciones de igualdad más exigentes. Así entre los vectores deslizantes, los vectores se dicen iguales cuando tienen igual módulo, la misma dirección, el mismo sentido y además determinan la misma recta. Esta definición se hace necesaria, por ejemplo, cuando se estudia el efecto de fuerzas sobre un cuerpo rígido, donde tal efecto varía según cuál sea la recta de acción de cada fuerza. Entre los vectores fijos dos vectores se dicen iguales cuando tienen iguales módulos, la misma dirección, el mismo sentido y el mismo origen. Esta definición se necesita, por ejemplo, al estudiar el efecto de una fuerza sobre un cuerpo elástico, donde el efecto cambia según el punto de aplicación de la fuerza. Salvo que se diga lo contrario trabajaremos con vectores libres y los llamamos directamente vectores.

3.4. Otras definiciones

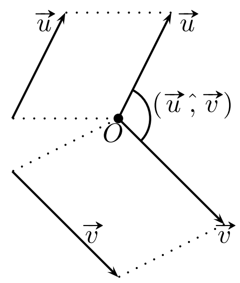
1. Se llama *versor* o *vector unitario* a todo vector de módulo uno.

2. Se llama *versor asociado* a $\vec{u}$ y se simboliza con $\vec{u}_0$ al versor de igual sentido que $\vec{u}$.

3. Decimos que dos *vectores* son *paralelos* o *colineales* cuando tienen igual dirección (aunque no tengan el mismo sentido y/o módulo).

4. Dado el vector $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, al vector $\overrightarrow{BA}$ se lo llama *vector opuesto* de $\vec{u}$ y se simboliza $-\vec{u}$. (Si $\vec{u}$ es no nulo entonces $\vec{u}$ y $-\vec{u}$ tienen igual módulo y dirección pero sentidos opuestos. El vector nulo es igual a su opuesto)

5. Dados dos vectores no nulos $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se define el *ángulo* entre ambos *vectores* y se lo representa por $(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v})$, al ángulo convexo determinado por dichos vectores cuando sus orígenes se aplican en un punto común. Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos se define el ángulo entre ellos de 0° o 180° según sean de igual sentido o de sentido opuesto.



Consecuencias inmediatas de la definición:

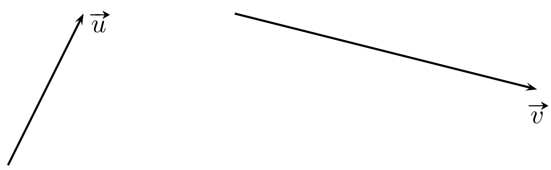
- $0 \leq (\vec{u}\,\hat{;}\,\vec{v}) \leq \pi$.
- $(\vec{u}\,\hat{;}\,\vec{v}) = (\vec{v}\,\hat{;}\,\vec{u})$ (no existen ángulos nevativos entre vectores)
- $(\vec{u}\,\hat{;}\,\vec{v}) + (-\vec{u}\,\hat{;}\,\vec{v}) = \pi$ (180º).

3.5. Propuesta

1. Analice si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F).

   a) $|\vec{v}| > |\vec{v}_0|$.

   b) Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de la figura son de sentido opuesto.

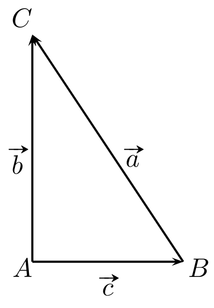
   

   c) Si $|\vec{v}| > |\vec{u}|$ entonces $|\vec{v}_0| > |\vec{u}_0|$.

   d) Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y son paralelos de igual sentido entonces $\vec{u}_0 = \vec{v}_0$.

   e) Si $\vec{u}_0 = -\vec{v}_0$ entonces $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos de sentido opuesto.

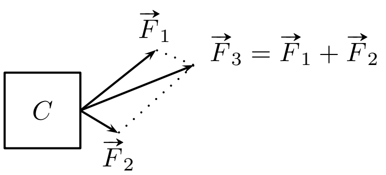
2. El triángulo de la figura es isósceles y recto en A. Determine $\left(\vec{a}\,\hat{;}\,\vec{b}\right)$, $(\vec{a}\,\hat{;}\,\vec{c})$ y $\left(\vec{b}\,\hat{;}\,\vec{c}\right)$.

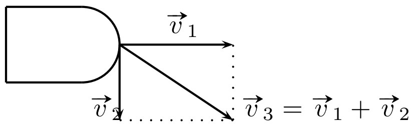
3. La proposición $\cos(\vec{u}\,\hat{;}\,\vec{v}) = 1 \Leftrightarrow (\vec{u}\,\hat{;}\,\vec{v}) = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ es falsa. ¿Por qué?

3.6. Suma de vectores

Si sobre un cuerpo C actúan dos fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, la experiencia muestra que el efecto es el mismo que si actuara la fuerza $\vec{F}_3$ obtenida como diagonal del paralelogramo construido sobre los vectores $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$.

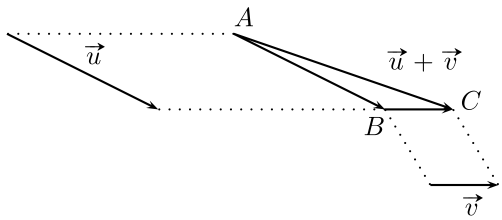


Análogamente, si una embarcación que se mueve con velocidad $\vec{v}_1$ en un río cuyas aguas tienen una velocidad $\vec{v}_2$, el resultado es que la embarcación se mueve con velocidad $\vec{v}_3$ obtenida como diagonal del paralelogramo construido sobre los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$.



Se dice que $\vec{v}_3$ es la suma de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ y escribimos: $\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$.

Definición de suma. Sean dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Fijado arbitrariamente un punto A queda determinado un punto B tal que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, el que a su vez determina un punto C tal que $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$. Se llama *suma* de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, al vector $\overrightarrow{AC}$ así obtenido y lo simbolizamos $\vec{u} + \vec{v}$.



Observe que el vector $\vec{u} + \vec{v}$ es independiente de la elección del punto A.

Propiedades de la suma. Cualesquiera sean los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ se verifican las siguientes propiedades:

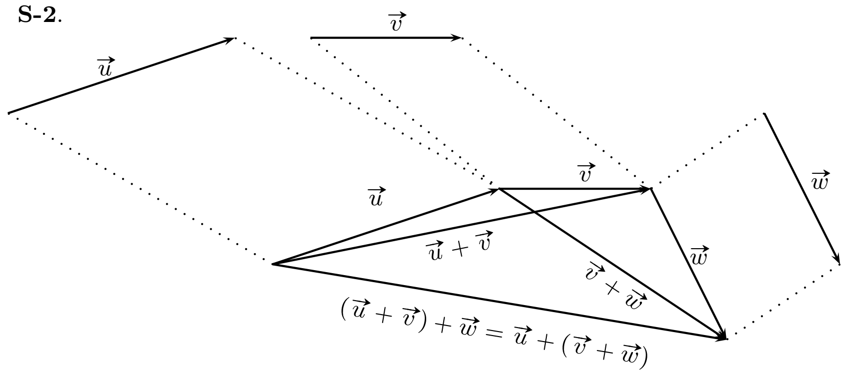
S-1 $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (Conmutativa).

S-2 $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (Asociativa).

S-3 $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$ (Existencia del elemento neutro[1]).

S-4 $\vec{v} + (-\vec{v}) = (-\vec{v}) + \vec{v} = \vec{0}$ (Existencia del elemento opuesto[2]).

Demostración: S-2.



S-3 surge como consecuencia inmediata de las definiciones de vector nulo y suma.

Para justificar **S-4** consideremos $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$. En consecuencia $\overrightarrow{QP} = -\vec{v}$. Luego

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PP} = \vec{0}.$$

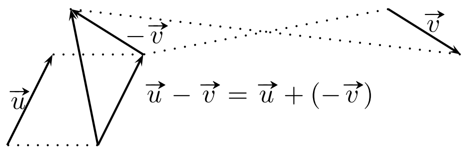
■

[1]El vector nulo es el único vector que deja invariante a la suma y se denomina elemento neutro de la suma.

[2]Para cada vector $\vec{v}$, el opuesto de $\vec{v}$, $-\vec{v}$, es el único vector que verifica **S-4**.

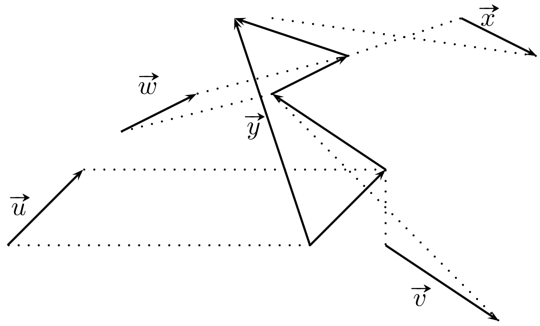
La propiedad **S-4** permite definir la diferencia entre vectores del modo que sigue.

Vector diferencia. Dados $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se llama *vector diferencia* entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y se simboliza $\vec{u} - \vec{v}$ al vector definido por $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$ ($\vec{u}$ más el opuesto de $\vec{v}$).



La suma de vectores se extiende a cualquier número de sumandos, llevando sucesivamente cada uno a continuación del precedente y uniendo, al final, el origen del primero con el extremo del último.

En la figura que sigue se representa la suma $\vec{u} - \vec{v} + \vec{w} - \vec{x} = \vec{y}$

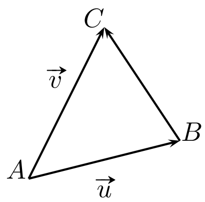


3.7. Propuesta

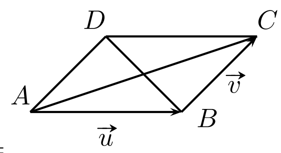
1. Represente gráficamente los vectores $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$ y $\vec{v} - \vec{u}$ sabiendo que: $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 5$ y $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\pi}{6}$.

2. Determine $|\vec{u} + \vec{v}|$ y $|\vec{u} - \vec{v}|$ sabiendo que: $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 4$ y $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\pi}{2}$.

3. Exprese los vectores pedidos en función de $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Considere que los segmentos que se ven paralelos, lo son.



- $\overrightarrow{CB} =$
- $\overrightarrow{BC} =$
- $\overrightarrow{CA} =$



- $\overrightarrow{AC} =$
- $\overrightarrow{CD} =$
- $\overrightarrow{DA} =$
- $\overrightarrow{DB} =$

4. El punto O es el centro de gravedad del triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$. Verifique gráficamente que

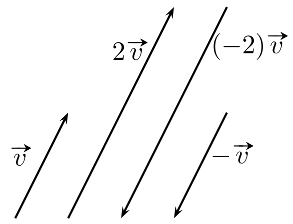
$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}.$$

Observación: el centro de gravedad de un triángulo (homogéneo) se encuentra en el punto de intersección de las medianas.

5. Dados $\vec{u}$ y $\vec{v}$, encuentre $\vec{x}$ tal que $\vec{x} + \vec{u} = \vec{v}$.

3.8. Producto de un vector por un escalar

De la definición de suma de vectores se deduce que $\vec{v} + \vec{v}$ es un vector de mismo sentido que $\vec{v}$ y cuyo módulo es igual al doble del módulo de $\vec{v}$. Si simbolizamos $\vec{v} + \vec{v}$ con $2\vec{v}$, entonces $2\vec{v}$ es un vector de igual sentido que $\vec{v}$ y tal que $|2\vec{v}| = 2\,|\vec{v}|$. Análogamente $(-\vec{v}) + (-\vec{v})$ es un vector de sentido opuesto al vector $\vec{v}$ y cuyo módulo es igual al doble del módulo de $\vec{v}$. Si simbolizamos $(-\vec{v}) + (-\vec{v})$ con $(-2)\vec{v}$ entonces $(-2)\vec{v}$ es un vector de sentido opuesto al de $\vec{v}$ y tal que $|(-2)\vec{v}| = 2\,|\vec{v}|$.



Estas consideraciones motivan la siguiente definición:

Sea $\vec{v}$ un vector y α un escalar (es decir, un número real) cualquiera. Se llama *producto del escalar α por el vector $\vec{v}$*, y se simboliza $\alpha \cdot \vec{v}$ al vector que verifica:

1. $|\alpha \cdot \vec{v}| = |\alpha|\,|\vec{v}|$.

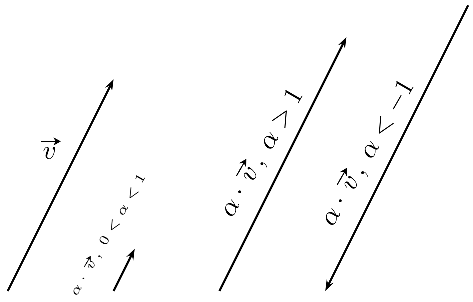
2. Si $\alpha \neq 0$ y $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\alpha \cdot \vec{v}$ tiene la misma dirección que $\vec{v}$ ($\alpha \cdot \vec{v}$ y $\vec{v}$ son paralelos).

3. Si $\alpha > 0$ entonces $\alpha \cdot \vec{v}$ tiene el mismo sentido que $\vec{v}$; en cambio si $\alpha < 0$ entonces $\alpha \cdot \vec{v}$ y $\vec{v}$ tienen sentidos opuestos.

Observación

> Como ya se señalara, el vector nulo es el único vector con módulo cero. Por lo tanto si en 1 se considera $\alpha = 0$ y/o $\vec{v} = \vec{0}$ resulta que $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$ y $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

En la figura se muestran algunas posibilidades según los valores de α.



Propiedades del producto de un vector por un escalar.
Cualesquiera sean los escalares α y β y los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se verifican las siguientes propiedades:

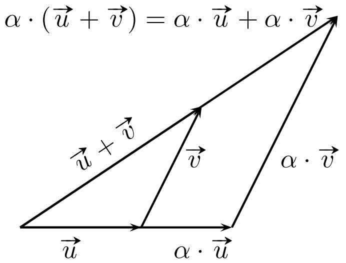
P-1 $\alpha \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \alpha \cdot \vec{u} + \alpha \cdot \vec{v}$. Distributiva respecto de la suma de vectores.

P-2 $(\alpha + \beta) \cdot \vec{u} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{u}$. Distributiva respecto de la suma de escalares.

P-3 $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{u}) = (\alpha\beta) \cdot \vec{u}$. Homogeneidad o asociativa de los escalares.

P-4 $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$. El escalar 1 es la unidad para el producto.

La siguiente gráfica sugiere la validez de **P-1**. Los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u} + \vec{v}$ por un lado, y los vectores $\alpha \cdot \vec{u}$, $\alpha \cdot \vec{v}$, $\alpha \cdot (\vec{u} + \vec{v})$ por otra lado, determinan triángulos semejantes de razón α.



La demostración de **P-4** resulta inmediata de la definición de: producto de un vector por un escalar e igualdad de vectores.
Si desea conocer las demostraciones de **P-2** y **P-3** las podrá encontrar, en la referencia bibliográfica 4.

Hemos agrupado aquellas propiedades de la suma de vectores y producto por un escalar que caracterizan "una estructura de espacio vectorial", que será objeto de estudio en el curso de Álgebra y Geometría II. En lo que sigue se enuncian otras propiedades que también tienen su interés, pero prescindimos en algunos casos de su justificación.

Otras propiedades.

1. $(-1) \cdot \vec{u} = -\vec{u}$.
2. $(-\alpha) \cdot \vec{u} = -(\alpha \cdot \vec{u})$
3. $\alpha \cdot \vec{u} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = 0$ o $\vec{u} = \vec{0}$, o ambos.
4. $\vec{u}_0 = \dfrac{1}{|\vec{u}|} \cdot \vec{u}$.

Demostración de 4: Siendo $1/|\vec{u}|$ un escalar positivo y teniendo en cuenta la definición de producto de un vector por un escalar, resulta que: $\frac{1}{|\vec{u}|} \cdot \vec{u}$ es un vector de igual dirección y sentido que $\vec{u}$, por lo tanto de igual dirección y sentido que su versor asociado, $\vec{u}_0$.

Por otra parte

$$\left|\frac{1}{|\vec{u}|} \cdot \vec{u}\right| = \left|\frac{1}{|\vec{u}|}\right| |\vec{u}| = \frac{1}{|\vec{u}|} |\vec{u}| = 1.$$

Luego tanto $\vec{u}_0$ como $\frac{1}{|\vec{u}|} \cdot \vec{u}$ tienen módulo uno, con lo cual queda completada la prueba. ∎

Le sugerimos reflexionar sobre el significado de cada barra. En algunos casos se tratan de barras de valor absoluto, en otros casos simbolizan el módulo de un vector.
Como consecuencia inmediata de la propiedad 4 resulta que:

$$\vec{u} = |\vec{u}| \cdot \vec{u}_0,$$

es decir, todo vector no nulo se puede expresar como el producto de su módulo por el versor asociado.

3.9. Condición de paralelismo entre vectores

Propiedad

Dos vectores no nulos $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos si y sólo si existe un número real $\alpha \neq 0$ tal que $\vec{v} = \alpha \cdot \vec{u}$.

Demostración:

1. Supongamos que existe un número real $\alpha \neq 0$ tal que $\vec{v} = \alpha \cdot \vec{u}$. Siendo $\vec{u}$ paralelo a $\alpha \cdot \vec{u}$, por definición de producto de un vector por un escalar, y $\vec{v} = \alpha \cdot \vec{u}$ (por hipótesis) resulta que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos.

2. Supongamos ahora que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos. Puede ocurrir que sean de igual sentido o de sentido opuesto. En el primer caso el valor de α tiene que ser positivo, en cambio en el segundo caso α tiene que ser negativo. En cualquiera de los casos α depende tanto del módulo de $\vec{u}$ como del módulo de $\vec{v}$. Suponiendo que $\vec{v} = \alpha \cdot \vec{u}$, veamos cómo tiene que ser α.

$$\vec{v} = \alpha \cdot \vec{u} \Rightarrow |\vec{v}| = |\alpha \cdot \vec{u}| = |\alpha| \, |\vec{u}| \Rightarrow |\alpha| = \frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|} \Rightarrow \alpha = \frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|} \text{ o } \alpha = -\frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}.$$

   Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos de igual sentido entonces

$$\vec{v} = \frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|} \cdot \vec{u}.$$

   Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos de sentido opuesto entonces

$$\vec{v} = -\frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|} \cdot \vec{u}.$$

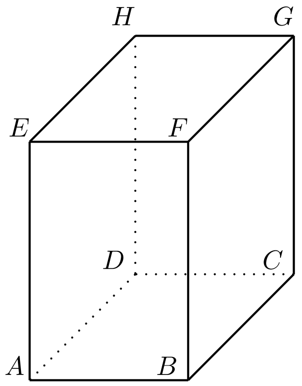
∎

Esta caracterización de los vectores paralelos es fundamental ya que permitirá transitar del estudio geométrico al estudio analítico de los vectores; es decir de los vectores flecha a los vectores dados por sus componentes escalares.

3.10. Propuesta

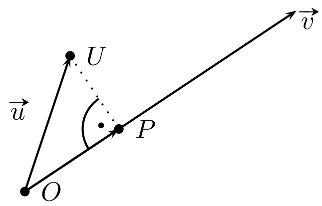
En el paralelepípedo recto de la figura se han dado los vectores que coinciden con sus aristas. $\overrightarrow{AB} = \vec{m}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{n}$, $\overrightarrow{AE} = \vec{p}$. Obtenga gráficamente los vectores:

1. $\vec{m} + \vec{n} + \vec{p}$;
2. $\vec{m} + \vec{n} - \vec{p}$;
3. $\vec{m} + \vec{n} + \frac{1}{2} \cdot \vec{p}$;
4. $\frac{1}{2} \cdot \vec{m} + \frac{1}{2} \cdot \vec{n} + \vec{p}$;
5. $-\vec{m} - \vec{n} + \frac{1}{2} \cdot \vec{p}$.



3.11. Proyección ortogonal de un vector sobre la dirección de otro vector

Definición.
Dados los vectores $\vec{u} = \overrightarrow{OU}$ y $\vec{v} = \overrightarrow{OV}$ (dos vectores no nulos) se llama *vector proyección ortogonal* de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ y se nota $\operatorname{proy}_{\vec{v}} \vec{u}$ al vector $\overrightarrow{OP}$, donde P es el punto de intersección entre la recta sostén de $\vec{v}$ y la perpendicular a ella que contiene a U.



Si $\vec{u} = \vec{0}$ definimos $\operatorname{proy}_{\vec{v}} \vec{u} = \vec{0}$. Al número $p = |\vec{u}| \cos(\vec{u}, \vec{v})$ se lo llama *proyección escalar* de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

3.12. Propuesta

1. ¿Cuál es el vector $\operatorname{proy}_{\vec{v}} \vec{u}$, cuando $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares?
2. Dibuje un par de vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de modo que $\operatorname{proy}_{\vec{v}} \vec{u}$ resulte:
   a) de igual sentido que $\vec{v}$,
   b) de sentido opuesto a $\vec{v}$.
3. Verifique que $\operatorname{proy}_{\vec{v}} \vec{u} = p \cdot \vec{v}_0$. (el vector proyección ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ es igual al producto de la proyección escalar por el versor asociado a $\vec{v}$).

3.13. Producto escalar

Definición.
Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores cualesquiera, se llama *producto escalar* (o producto interior) de $\vec{u}$ por $\vec{v}$, y se simboliza $\vec{u} \times \vec{v}$ al número real definido por:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{cases} |\vec{u}|\,|\vec{v}| \cos(\vec{u}, \vec{v}) & \text{cuando } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ y } \vec{v} \neq \vec{0}, \\ 0 & \text{cuando } \vec{u} = \vec{0} \text{ y/o } \vec{v} = \vec{0}. \end{cases}$$

Observaciones

1. Cuando $\vec{u} \neq \vec{0}$ y $\vec{v} \neq \vec{0}$, entonces

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}.$$

2. $\vec{u} \times \vec{u} = |\vec{u}|^2$.

La igualdad $\vec{u} \times \vec{u} = |\vec{u}|^2$ debe leerse:

“el producto escalar entre $\vec{u}$ y $\vec{u}$ es igual al módulo de $\vec{u}$ al cuadrado”.
¡No tiene sentido decir “$\vec{u}$ al cuadrado”!

Propiedades del producto escalar.
Cualesquiera que sean los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ y el escalar α, se verifica:

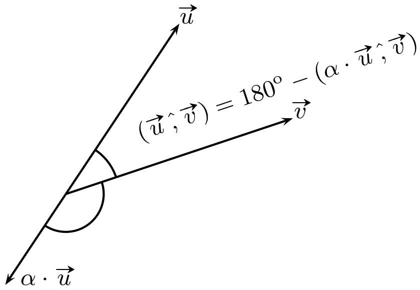
E-1 $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{v} \times \vec{u}$. Propiedad conmutativa.

E-2 $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$. Propiedad distributiva.

E-3 $\alpha\,(\vec{u} \times \vec{v}) = (\alpha \cdot \vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha \cdot \vec{v})$.

E-4 $\vec{u} \times \vec{u} \geq 0$, valiendo la igualdad si y sólo si $\vec{u} = \vec{0}$.

Demostración de E-3 : Consideramos que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son no nulos y que $\alpha < 0$.



$$(\alpha \cdot \vec{u}) \times \vec{v} = |\alpha \cdot \vec{u}|\,|\vec{v}| \cos(\alpha \cdot \vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v}) = |\alpha|\,|\vec{u}|\,|\vec{v}| \cos(\alpha \cdot \vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v}) \overset{(1)}{=} -\alpha\,|\vec{u}|\,|\vec{v}| \cos(\alpha \cdot \vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v}) \overset{(2)}{=}$$
$$= -\alpha\,|\vec{u}|\,|\vec{v}|\,(-\cos(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v})) = \alpha\,|\vec{u}|\,|\vec{v}| \cos(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v}) = \alpha\,(\vec{u} \times \vec{v}).$$

En el transcurso de la prueba hemos aplicado:

(1) Si $\alpha < 0$ entonces $|\alpha| = -\alpha$.

(2) Si $\alpha < 0$ entonces $\alpha \cdot \vec{u}$ tiene sentido opuesto a $\vec{u}$, en consecuencia, $(\alpha \cdot \vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v})$ y $(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v})$ son ángulos suplementarios; por lo tanto sus cosenos son opuestos. ■

Demostración de E-4 : Sea $\vec{u} \neq \vec{0}$; entonces $(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{u}) = 0^o$. Por definición de producto escalar es

$$\vec{u} \times \vec{u} = |\vec{u}|\,|\vec{u}| \cos(0^o) = |\vec{u}|^2 > 0 \qquad (1)$$

donde $|\vec{u}| > 0$ pues $\vec{u} \neq \vec{0}$. Si $\vec{u} = \vec{0}$, entonces por definición, es $\vec{u} \times \vec{u} = 0$.

Queda probado que: cualquiera sea el vector $\vec{u}$, $\vec{u} \times \vec{u} \geq 0$.
De la definición de producto escalar y lo probado en 1 es inmediato que

$$\vec{u} \times \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}.$$

■

Recuerde

En el contexto del material didáctico que está utilizando, el símbolo $\times$ denota el producto escalar entre vectores. En los textos de Física, donde se utiliza esta operación se acostumbra a notar $\vec{u} \cdot \vec{v}$ en lugar de $\vec{u} \times \vec{v}$.

3.14. Propuesta

1. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no nulos. Decimos que $\vec{u}$ es *perpendicular* a $\vec{v}$ (notamos $\vec{u} \perp \vec{v}$) si y sólo si $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 90^{\circ}$. Pruebe que
$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \times \vec{v} = 0.$$

2. Verifique que: $\text{proy}_{\vec{v}} \vec{u} = (\vec{u} \times \vec{v}_0) \cdot \vec{v}_0$. Una vez realizada la prueba note que:
$$|\text{proy}_{\vec{v}} \vec{u}| = |(\vec{u} \times \vec{v}_0) \cdot \vec{v}_0| = |\vec{u} \times \vec{v}_0| \, |\vec{v}_0| = |\vec{u} \times \vec{v}_0| = \left| \vec{u} \times \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v} \right| = \frac{1}{|\vec{v}|} \, |\vec{u} \times \vec{v}| \, .$$
¿Podría justificar cada igualdad?

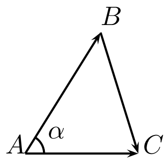
Recuerde

> El módulo del vector proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ se obtiene haciendo el valor absoluto del producto escalar entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$, dividido por el módulo de $\vec{v}$.

Utilizará este resultado en las siguientes unidades cuando resuelva el problema de calcular la distancia de un punto a una recta en el plano y la distancia de un punto a un plano.

3. En base a los datos $|\vec{u}| = \sqrt{3}$, $|\vec{v}| = 2$, $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\pi}{6}$, le proponemos que calcule:
   a) $\vec{u} \times \vec{u}$.
   b) $\vec{u} \times \vec{v}$.
   c) $\vec{u} \times (-\vec{v})$.
   d) $\vec{u} \times \vec{v}_0$.
   e) $(3 \cdot \vec{u}) \times (-2 \cdot \vec{v})$.
   f) $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} + \vec{v})$.
   g) $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v})$.
   h) $(3 \cdot \vec{u} + \vec{v}) \times (2 \cdot \vec{u} - \vec{v})$.

4. *a*) Demuestre el Teorema de coseno
$$\left|\overrightarrow{BC}\right|^2 = \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 - 2\left|\overrightarrow{AC}\right| \left|\overrightarrow{AB}\right| \cos\alpha.$$



   Recuerde que $\left|\overrightarrow{BC}\right|^2 = \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.

   b) Como caso particular del resultado anterior deduzca el Teorema de Pitágoras.

5. Determine analíticamente que condiciones deben verificar los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ para que se cumplan las siguientes condiciones:
   a) $|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u} - \vec{v}|$.
   b) $|\vec{u} + \vec{v}| > |\vec{u} - \vec{v}|$.
   c) $|\vec{u} + \vec{v}| < |\vec{u} - \vec{v}|$.

   Interprete geométricamente los resultados. Sugerencia: recuerde que $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} + \vec{v})$.

6. Determine $|\vec{u} + \vec{v}|$, sabiendo que $|\vec{u}| = 11$, $|\vec{v}| = 23$ y $|\vec{u} - \vec{v}| = 30$.

7. Explique por qué la siguiente proposición es falsa:
$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \times \vec{w} \Rightarrow \vec{v} = \vec{w}.$$

8. Pruebe la desigualdad triangular
$$|\vec{u}+\vec{v}| \leq |\vec{u}|+|\vec{v}|$$
y analice cuándo se verifica la igualdad.

En el curso de Algebra y Geometría II se estudiarán los espacios vectoriales euclídeos, en general. Por el momento le decimos que:

> El conjunto de los vectores geométricos con las operaciones de suma, producto de un escalar por un vector y producto escalar (o interior) que verifican las propiedades **S-1**, **S-2**, **S-3**, **S-4**; **P-1**, **P-2**, **P-3**, **P-4**; **E-1**, **E-2**, **E-3** y **E-4** se denomina *espacio vectorial real euclídeo.*

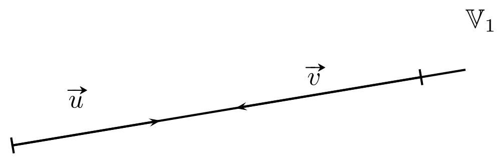
3.15. Descomposición de un vector

En lo que sigue distinguiremos los vectores según sean de una recta, de un plano o del espacio.

Notamos con

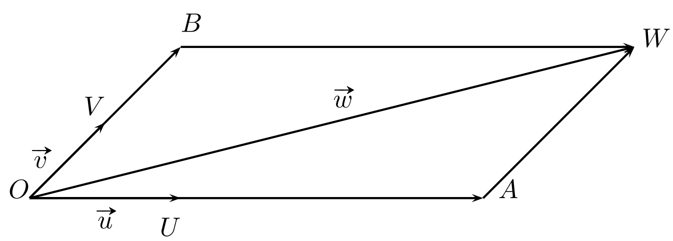
$\mathbb{V}_1$: conjunto de los vectores de una recta.
$\mathbb{V}_2$: conjunto de los vectores de un plano.
$\mathbb{V}_3$: conjunto de los vectores del espacio.

1. Dado en $\mathbb{V}_1$ un vector no nulo $\vec{u}$, cualquier otro vector $\vec{v}$, de $\mathbb{V}_1$, se puede expresar de manera única como $\vec{v}=\alpha\cdot\vec{u}$. (Recuerde la condición de paralelismo entre vectores).



Diremos que la expresión $\vec{v}=\alpha\cdot\vec{u}$ es la descomposición de $\vec{v}$ en la *base* formada por $\vec{u}$ y que el escalar α es la *componente escalar* de $\vec{v}$ en la base formada por $\vec{u}$.
De este modo, fijado un vector $\vec{u}$ no nulo de $\mathbb{V}_1$, se establece una correspondencia biunívoca entre vectores de $\mathbb{V}_1$ y $\mathbb{R}$, conjunto de los números reales. A cada vector de $\mathbb{V}_1$ se le hace corresponder su componente escalar en la base fijada, y recíprocamente. Esta correspondencia biunívoca nos permite identificar a cada vector geométrico de $\mathbb{V}_1$ con un número real y recíprocamente.
Se vio que $\operatorname{proy}_{\vec{v}}\vec{u} = p\cdot\vec{v}_0$ donde $p=|\vec{u}|\cos(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$. Por lo tanto $p=|\vec{u}|\cos(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ es la componente escalar de $\operatorname{proy}_{\vec{v}}\vec{u}$ en la base formada por $\vec{v}_0$.

2. Sean dados en un plano dos vectores $\overrightarrow{OU}=\vec{u}$ y $\overrightarrow{OV}=\vec{v}$, ambos no nulos ni paralelos y $\overrightarrow{OW}=\vec{w}$ otro vector cualquiera del mismo plano.



Si por el punto W trazamos rectas paralelas a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se determinan respectivamente los puntos A y B tal que $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OW}$. Como $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ son respectivamente paralelos con $\vec{u}$ y $\vec{v}$, existen únicos escalares α y β tales que $\overrightarrow{OA}=\alpha\cdot\vec{u}$ y $\overrightarrow{OB}=\beta\cdot\vec{v}$, y en consecuencia
$$\vec{w}=\alpha\cdot\vec{u}+\beta\cdot\vec{v}. \tag{2}$$

Se concluye que:
Dados en el plano, dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, no nulos ni paralelos, cualquier otro vector $\vec{w}$, del mismo plano, puede escribirse de manera única de la forma expresada en 2. Decimos que $\vec{w}$ es *combinación*

lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ con los escalares α y β.
En general el vector

$$\alpha_1 \cdot \vec{v}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n \cdot \vec{v}_n$$

se llama combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ con los escalares α_1, α_2, $\ldots$, α_n.

Dos vectores no nulos ni paralelos de un plano tienen la propiedad de que cualquier otro vector del mismo plano, se puede expresar de manera *única*, como se establece en (2). Por tal razón decimos que el conjunto formado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$ constituyen *una base para los vectores de un plano* y los escalares α y β se llaman las componentes de $\vec{w}$ en dicha base.
Observamos que fijada una base en $\mathbb{V}_2$, queda establecida una correspondencia biunívoca entre los vectores de $\mathbb{V}_2$ (constituido por entes u objetos geométricos, como lo son los segmentos orientados) y $\mathbb{R}^2$ (constituido por objetos algebraicos, como lo son los pares ordenados de números reales).
A $\vec{w}$ le corresponde el par ordenado (α, β), que son los únicos escalares que permiten expresar a $\vec{w}$ como combinación lineal de los vectores de la base dada ($\vec{w} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$) y al par ordenado (α, β), le corresponde el vector $\vec{w}$ que resulta de hacer la combinación lineal de α y β con los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ (en ese orden).

Obviamente si se cambia la base de $\mathbb{V}_2$ por otro par ordenado de vectores no nulos ni paralelos, entonces serán otros los pares ordenados de números reales que se corresponden biunívocamente con cada vector de $\mathbb{V}_2$.

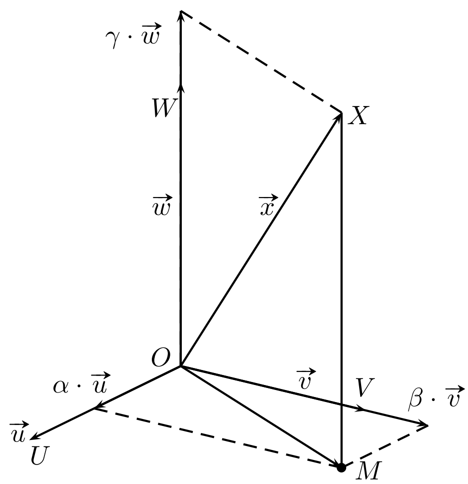
Las componentes de un vector dependen de la base de referencia, de modo que, al cambiar la base, cambian las componentes del vector. Estos temas los profundizará en Algebra y Geometría II, donde entre otras cuestiones verá cómo se relacionan las componentes de un vector en bases distintas.

Hemos visto que cualquier vector del plano se puede expresar de manera única como combinación lineal de dos vectores no nulos ni paralelos del mismo plano.

3.16. Propuesta

¿De cuántas formas diferentes puede expresarse un vector como combinación lineal de tres vectores? (considere a todos los vectores en un mismo plano).

3. Sean dados en el espacio tres vectores $\overrightarrow{OU} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OV} = \vec{v}$ y $\overrightarrow{OW} = \vec{w}$ no nulos ni paralelos a un mismo plano y $\overrightarrow{OX} = \vec{x}$.



Si por el punto X trazamos una recta paralela a $\vec{w}$, ésta corta al plano determinado por $\overrightarrow{OU}$ y $\overrightarrow{OV}$ en un punto que llamamos con M. Como $\overrightarrow{OM}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ están en un mismo plano $\overrightarrow{OM} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$.
Por otra parte, $\vec{x} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MX}$, y $\overrightarrow{MX} = \gamma \cdot \vec{w}$, entonces

$$\vec{x} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} + \gamma \cdot \vec{w}. \tag{3}$$

Se concluye que:
Dados en el espacio, tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ (en ese orden), no nulos ni paralelos a un mismo plano, cualquier otro vector $\vec{x}$ puede escribirse como combinación lineal de ellos con únicos escalares α, β y γ ($\vec{x} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} + \gamma \cdot \vec{w}$).

Observe que tres vectores no nulos ni paralelos a un plano tienen la propiedad de que cualquier otro vector del mismo plano, se puede expresar de manera única, como se establece en (3). Por tal razón decimos que el conjunto formado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ (en ese orden) constituye una base para los vectores del espacio. Asimismo, fijada una base en $\mathbb{V}_3$, (tres vectores no nulos ni paralelos a un plano) queda establecida una correspondencia biunívoca entre los vectores de $\mathbb{V}_3$ y las ternas ordenados de números reales, $\mathbb{R}^3$. A $\vec{x}$ le corresponde la terna ordenada (α, β, γ), que son los únicos escalares que permiten expresar a $\vec{x}$ como combinación lineal de los vectores de la base dada ($\vec{x} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} + \gamma \cdot \vec{w}$), y a la terna ordenada (α, β, γ), le corresponde el vector $\vec{x}$ que resulta de hacer la combinación lineal de α, β,γ con los vectores dados $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.
Los números o escalares (α, β, γ) constituyen las componentes (escalares) de $\vec{x}$ en la base formada por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ (en ese orden), y convenimos en escribir: $\vec{x} = (\alpha, \beta, \gamma)$.

3.17. A modo de síntesis y para remarcar

1. Si $\vec{v} \neq \vec{0}$ y $\vec{v} \in \mathbb{V}_1$ entonces $\{\vec{v}\}$ es una base de $\mathbb{V}_1$. Cualquier vector de $\mathbb{V}_1$ se expresa de una única manera como combinación lineal de $\vec{v}$.

2. Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son dos vectores no nulos ni paralelos de $\mathbb{V}_2$ entonces el conjunto ordenado $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ constituye una base de $\mathbb{V}_2$. Cualquier vector de $\mathbb{V}_2$ se expresa de una única manera como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

3. Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son tres vectores no nulos ni paralelos de $\mathbb{V}_3$ entonces el conjunto ordenado $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ constituye una base de $\mathbb{V}_3$. Cualquier vector de $\mathbb{V}_3$ se expresa de una única manera como combinación lineal de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

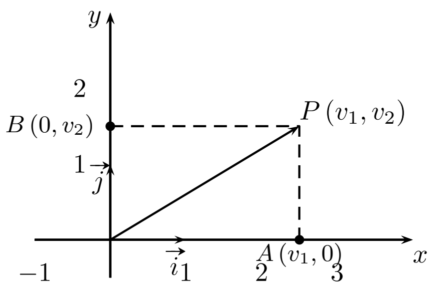
Le sugerimos ingresar a la siguiente página de Internet y realizar las actividades que se proponen. Algunas de ellas requieren avanzar con los contenidos que siguen.

`http://www.xtec.es/~jbartrol/vectores/manual/vectores.html`

3.18. Versores fundamentales. Descomposición canónica.

Fijado un sistema de ejes cartesianos ortogonales en el plano, (O, x, y), llamamos *versores fundamentales* y simbolizamos con $\vec{i}$, $\vec{j}$, a los versores cuyas direcciones y sentidos son las de los semiejes coordenados positivos x e y respectivamente.

Dado en el plano un punto V de coordenadas (v_1, v_2) queda determinado un vector $\vec{v} = \overrightarrow{OV}$ llamado vector posición del punto V. Si por el punto V trazamos paralelas a los ejes se obtienen los puntos A de coordenadas $(v_1, 0)$ y B de coordenadas $(0, v_2)$, como se muestra en la figura.



Por otra parte $\vec{v} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = v_1 \cdot \vec{i} + v_2 \cdot \vec{j}$. Esta descomposición del vector como combinación lineal de los versores fundamentales se llama *descomposición canónica* de $\vec{v}$ en la base $\left\{\vec{i}, \vec{j}\right\}$.

Observemos que las componentes de $\vec{v}$ en la base $\left\{\vec{i}\,,\vec{j}\right\}$ son las coordenadas de V en el sistema (O,x,y). Escribimos

$$\vec{v}=v_1\cdot\vec{i}+v_2\cdot\vec{j}=(v_1,v_2)\,.$$

En forma análoga, fijado un sistema de ejes cartesianos ortogonales en el espacio, (O,x,y,z), y llamando con $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ a los versores cuyas direcciones y sentidos son los de los semiejes positivos, para cada punto V de coordenadas (v_1,v_2,v_3) queda determinado un vector $\vec{v}=\overrightarrow{OV}$ de componentes v_1, v_2, v_3 en la base $\left\{\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right\}$. Escribimos

$$\vec{v}=v_1\cdot\vec{i}+v_2\cdot\vec{j}+v_3\cdot\vec{k}=(v_1,v_2,v_3)\,.$$

En lo que sigue se continúa con el *estudio analítico de los vectores* que surge de la representación geométrica cuando se introduce un sistema coordenado. Cuando se expresa un vector por sus componentes, se supone, salvo que se diga lo contrario, que las mismas están dadas en la base canónica.

Algunas trivialidades

1. Las componentes de $\vec{i}$ son $(1,0,0)$ ya que $\vec{i} = 1\cdot\vec{i} + 0\cdot\vec{j} + 0\cdot\vec{k}$. ¿Cuáles son las componentes de los versores $\vec{j}$, $\vec{k}$ y del vector $\vec{0}$?

2. Si $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ entonces
$$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow u_i = v_i \, \forall i.$$

3. Si dibujamos en el plano el vector $\vec{v} = \overrightarrow{OV}$ de componentes (v_1, v_2) y calculamos $\vec{v} \times \vec{i}$ y $\vec{v} \times \vec{j}$, aplicando la definición de producto escalar, observamos que: $v_1 = \vec{v} \times \vec{i}$ y $v_2 = \vec{v} \times \vec{j}$. En consecuencia, podemos escribir
$$\vec{v} = \left(\vec{v} \times \vec{i}\right)\vec{i} + \left(\vec{v} \times \vec{j}\right)\vec{j}.$$
Si $\vec{v}$ es un vector del espacio entonces
$$\vec{v} = \left(\vec{v} \times \vec{i}\right)\cdot\vec{i} + \left(\vec{v} \times \vec{j}\right)\cdot\vec{j} + \left(\vec{v} \times \vec{k}\right)\cdot\vec{k}.$$

3.19. Operaciones por componentes

Propiedades. Si $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces:

1. $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$.
2. $\alpha \cdot \vec{u} = (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3)$.
3. $\vec{u} \times \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$.

Demostración de 1.: Si $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ entonces

$$\vec{u}+\vec{v} = u_1\cdot\vec{i}+u_2\cdot\vec{j}+u_3\cdot\vec{k}+v_1\cdot\vec{i}+v_2\cdot\vec{j}+v_3\cdot\vec{k} = \left(u_1\cdot\vec{i}+v_1\cdot\vec{i}\right)+\left(u_2\cdot\vec{j}+v_2\cdot\vec{j}\right)+\left(u_3\cdot\vec{k}+v_3\cdot\vec{k}\right) =$$
$$= (u_1+v_1)\cdot\vec{i} + (u_2+v_2)\cdot\vec{j} + (u_3+v_3)\cdot\vec{k}.$$

En consecuencia $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$. ■

En el transcurso de la prueba hemos aplicado las propiedades conmutativa y asociativa, probadas para la suma de vectores geométricos y la propiedad distributiva para la suma de escalares, cuando se multiplica un vector por un escalar.

Demostración de 3.: Por simplicidad lo hacemos para vectores del plano. Si $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$ entonces

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(u_1\cdot\vec{i} + u_2\cdot\vec{j}\right) \times \left(v_1\cdot\vec{i} + v_2\cdot\vec{j}\right) =$$
$$= \left(u_1\cdot\vec{i}\right)\times\left(v_1\cdot\vec{i}\right) + \left(u_1\cdot\vec{i}\right)\times\left(v_2\cdot\vec{j}\right) + \left(u_2\cdot\vec{j}\right)\times\left(v_1\cdot\vec{i}\right) + \left(u_2\cdot\vec{j}\right)\times\left(v_2\cdot\vec{j}\right) =$$
$$= u_1v_1\left(\vec{i}\times\vec{i}\right)+u_1v_2\left(\vec{i}\times\vec{j}\right)+u_2v_1\left(\vec{j}\times\vec{i}\right)+u_2v_2\left(\vec{j}\times\vec{j}\right) = u_1v_1 1+u_1v_2 0+u_2v_1 0+u_2v_2 1 = u_1v_1+u_2v_2.$$ ■

En el transcurso de la prueba hemos aplicado la propiedad distributiva del producto escalar respecto de la suma de vectores como asimismo la propiedad

$$\alpha\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) = (\alpha\cdot\vec{u})\times\vec{v} = \vec{u}\times(\alpha\cdot\vec{v}).$$

Por otra parte, aplicando la definición de producto escalar se obtiene que: $\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = 1$, $\vec{i}\times\vec{j} = \vec{j}\times\vec{i} = 0$. Le proponemos verificar estos resultados.

La demostración de 2. queda a cargo del alumno.

Algunas consecuencias inmediatas

1. Sean $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ dos vectores no nulos. Se probó que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos siempre y cuando existe un escalar $\alpha \neq 0$ tal que $\vec{v} = \alpha \cdot \vec{u}$. Si expresamos por componentes resulta que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos siempre y cuando

$$v_1 = \alpha u_1, \quad v_2 = \alpha u_2, \quad v_3 = \alpha u_3. \tag{4}$$

Hemos aplicado la operación de producto de un vector por un escalar y la igualdad de vectores por componentes. No habiendo componentes nulas, (4) es equivalente a

$$\frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2} = \frac{v_3}{u_3} = \alpha.$$

En el caso en que $\alpha > 0$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos de igual sentido. En cambio cuando $\alpha < 0$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos de sentido opuesto. Por ejemplo, los vectores $\vec{u} = (2, -1, 3)$ y $\vec{v} = (4, -2, 6)$ son paralelos de igual sentido, más aún $\vec{v} = 2 \cdot \vec{u}$ o $\vec{u} = \frac{1}{2} \cdot \vec{v}$. En cambio los vectores $\vec{a} = (-3, 1, 5)$ y $\vec{b} = (9, -3, -15)$ son paralelos de sentidos opuestos, más aún $\vec{b} = -3 \cdot \vec{a}$ o $\vec{a} = -\frac{1}{3} \cdot \vec{b}$.

2. Si $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ entonces $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$. Como consecuencia de la definición de producto escalar se obtuvo que $\vec{u} \times \vec{u} = |\vec{u}|^2$. Por otra parte, operando por componentes resulta que

$$\vec{u} \times \vec{u} = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2.$$

Combinando ambos resultados es

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}. \tag{5}$$

Le proponemos representar en un sistema de ejes cartesianos ortogonales del espacio, al vector $\vec{u}$, y “visualizar” la validez de (5) a través de la aplicación repetida del teorema de PITÁGORAS.

3. Si $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ entonces: $-\vec{u} = (-1) \cdot \vec{u} = (-u_1, -u_2, -u_3)$ y

$$\vec{u}_0 = \frac{1}{|\vec{u}|} \cdot \vec{u} = \left(\frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}, \frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}, \frac{u_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}} \right).$$

4. Cuando $\vec{u} \neq \vec{0}$ y $\vec{v} \neq \vec{0}$ entonces

$$\cos(\vec{u} \,\hat{;}\, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}.$$

Le proponemos expresar $\cos(\vec{u} \,\hat{;}\, \vec{v})$ en función de las componentes de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

5. Sean $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ dos vectores no nulos. Se probó que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares siempre y cuando $\vec{u} \times \vec{v} = 0$. Expresando por componentes resulta: $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares siempre y cuando $u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = 0$. Por ejemplo los vectores $\vec{u} = (-3, 2, 1)$ y $\vec{v} = (1, 2, -1)$ son perpendiculares.

Observación

Es “conveniente y usual” considerar al vector nulo como paralelo y perpendicular a cualquier vector. Desde esta perspectiva, si se considera por ejemplo $\vec{u} = (2, 1)$, el conjunto A de todos los vectores paralelos a $\vec{u}$, se expresa como:

$$A = \{\alpha \cdot (2, 1), \text{ con } \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

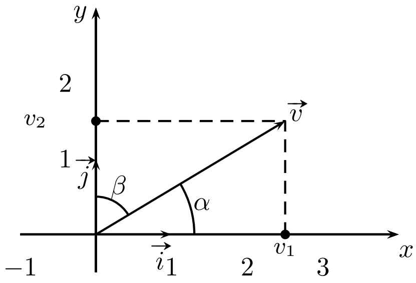
Del mismo modo, el conjunto B de todos los vectores perpendiculares a $\vec{u}$, se expresa como:

$$B = \{(\alpha, \beta) : (2, 1) \times (\alpha, \beta) = 0, \text{ con } \alpha \in \mathbb{R} \text{ y } \beta \in \mathbb{R}\} = \{(\alpha, \beta) : 2\alpha + \beta = 0\}.$$

Le sugerimos representar en un sistemas de ejes cartesianos al vector $\vec{u} = (2, 1)$ y algunos elementos del conjunto A y B. ¿Cuáles son sus observaciones?

3.20. Ángulos y cosenos directores de un vector

Sea $\vec{v} = \overrightarrow{OV} = (v_1, v_2)$ un vector no nulo; éste determina con los versores $\vec{i}$, $\vec{j}$ dos ángulos: $\alpha = \left(\vec{v} \,\hat{;}\, \vec{i}\right)$ y $\beta = \left(\vec{v} \,\hat{;}\, \vec{j}\right)$ que llamamos *ángulos directores*. A los cosenos de dichos ángulos se los denomina *cosenos directores*.



Si observamos la figura resulta que:

$$\cos\alpha = \cos\left(\vec{v} \,\hat{;}\, \vec{i}\right) = \frac{v_1}{|\vec{v}|}, \quad \cos\beta = \cos\left(\vec{v} \,\hat{;}\, \vec{j}\right) = \frac{v_2}{|\vec{v}|}.$$

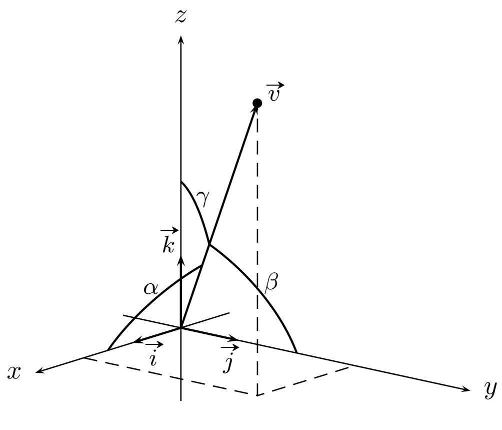
Recuerde que

$$(\cos\alpha, \cos\beta) = \left(\frac{v_1}{|\vec{v}|}, \frac{v_2}{|\vec{v}|}\right) = \vec{v}_0.$$

Los cosenos directores de un vector son las componentes del versor asociado. Más aún, los cosenos directores de un vector guardan la siguiente relación:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1.$$

Repetimos las definiciones y observaciones para un vector del espacio. Sea $\vec{v} = \overrightarrow{OV} = (v_1, v_2, v_3)$ un vector no nulo; éste determina con los versores $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ tres ángulos: $\alpha = \left(\vec{v} \,\hat{;}\, \vec{i}\right)$, $\alpha = \left(\vec{v} \,\hat{;}\, \vec{j}\right)$, $\alpha = \left(\vec{v} \,\hat{;}\, \vec{k}\right)$ que llamamos ángulos directores. A los cosenos de dichos ángulos se los denomina cosenos directores.



Si en la figura completa la gráfica de un paralelepípedo observará que:

$$\cos\alpha = \cos\left(\vec{v} \,\hat{;}\, \vec{i}\right) = \frac{v_1}{|\vec{v}|}, \quad \cos\beta = \cos\left(\vec{v} \,\hat{;}\, \vec{j}\right) = \frac{v_2}{|\vec{v}|}, \quad \cos\gamma = \cos\left(\vec{v} \,\hat{;}\, \vec{k}\right) = \frac{v_3}{|\vec{v}|}.$$

En consecuencia:

$$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \left(\frac{v_1}{|\vec{v}|}, \frac{v_2}{|\vec{v}|}, \frac{v_3}{|\vec{v}|}\right) = \vec{v}_0.$$

Se concluye que los que cosenos directores de un vector son las componentes del versor asociado. Más aún, los cosenos directores de un vector guardan la siguiente relación:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

3.21. Propuesta

1. Determine los cosenos directores del vector $\vec{v} = (2, -1, 0)$.
2. Determine las componentes de un vector $\vec{v}$ sabiendo que los cosenos directores son: $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, $\cos\beta = -\frac{1}{3}$, $\cos\gamma = \frac{\sqrt{7}}{3}$ y $|\vec{v}| = 3$.
3. ¿Cuáles son los cosenos directores de los versores fundamentales?
4. Analice si $\vec{v}$ puede formar con los versores fundamentales los siguientes ángulos:

   a) $\left(\vec{v}\,\hat{;}\,\vec{i}\right) = 45^{\circ}$, $\left(\vec{v}\,\hat{;}\,\vec{j}\right) = 130^{\circ}$ y $\left(\vec{v}\,\hat{;}\,\vec{k}\right) = 60^{\circ}$.

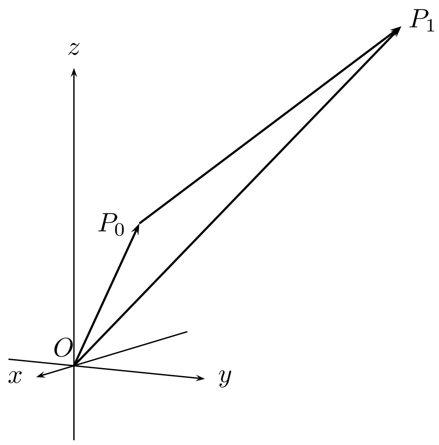
   b) $\left(\vec{v}\,\hat{;}\,\vec{i}\right) = 90^{\circ}$, $\left(\vec{v}\,\hat{;}\,\vec{j}\right) = 150^{\circ}$ y $\left(\vec{v}\,\hat{;}\,\vec{i}\right) = 60^{\circ}$.

3.22. Dos nuevos problemas

Dados $P_0\,(x_0, y_0, z_0)$ y $P_1\,(x_1, y_1, z_1)$ nos proponemos encontrar:

1. las componentes del vector $\overrightarrow{P_0P_1}$.
2. las coordenadas del punto medio.

1. Si representamos en un sistema de ejes cartesianos ortogonales del espacio los vectores $\overrightarrow{OP_0}$, $\overrightarrow{OP_1}$ y $\overrightarrow{P_0P_1}$, observamos que $\overrightarrow{P_0P_1} = \overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0}$.



Si recordamos que $\overrightarrow{OP_1} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overrightarrow{OP_0} = (x_0, y_0, z_0)$, y operamos luego por componentes resulta que

$$\overrightarrow{P_0P_1} = \overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0} = (x_1, y_1, z_1) + (-x_0, -y_0, -z_0) = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)\,.$$

Las componentes de $\overrightarrow{P_0P_1}$ se obtienen restando a las coordenadas del extremo las coordenadas del origen.

Ejemplo

Si $P_0\,(2, -3, 1)$ y $P_1\,(4, 2, -5)$ entonces

$$\overrightarrow{P_0P_1} = (4 - 2, 2 - (-3), -5 - 1) = (2, 5, -6).$$

2. Para obtener las coordenadas (x, y, z) de M, punto medio entre $P_0\,(x_0, y_0, z_0)$ y $P_1\,(x_1, y_1, z_1)$ procedemos de la siguiente manera (realice una gráfica):

$$\begin{aligned}
2\cdot\overrightarrow{P_0M} &= \overrightarrow{P_0P_1}, \quad \text{operando por componentes se tiene que}\\
2\cdot(x-x_0, y-y_0, z-z_0) &= (x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0),\\
[2(x-x_0), 2(y-y_0), 2(z-z_0)] &= (x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0).
\end{aligned}$$

Igualando las respectivas componentes y "despejando" las incógnitas se obtiene:

$$x=\frac{x_0+x_1}{2},\quad y=\frac{y_0+y_1}{2},\quad z=\frac{z_0+z_1}{2}.$$

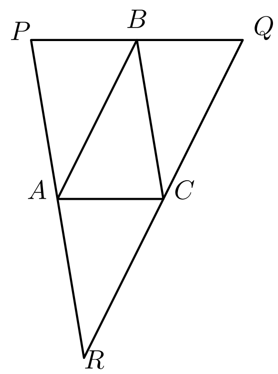
Las coordenadas del punto medio entre dos puntos dados se obtienen promediando las respectivas coordenadas.

3.23. Propuesta

1. *a*) Dados los puntos $A(-1,2,4)$, $B(5,-1,2)$ y $C(2,3,5)$ determine tres puntos P, Q y R tales que cada uno de ellos es el cuarto vértice de un paralelogramo del cual A, B y C son tres vértices.

   b) En el triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ calcule la longitud de la mediana del segmento BC.

   c) Calcule $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)$.



2. *a*) Pruebe que los puntos $A(4,2,1)$, $B(7,5,3)$ y $C(2,2,4)$ son vértices de un triángulo rectángulo.

   b) Calcule el área del triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$.

3. Determine las coordenadas de los extremos del segmento que es dividido en tres segmentos de igual longitud, por los puntos $C(2,0,2)$ y $D(5,-2,0)$.

4. Halle las componentes de $\vec{v}$ sabiendo que $|\vec{v}|=50$, $\vec{v}$ es colineal con el vector $\vec{b}=(12,-16,-15)$ y forma un ángulo agudo con $\vec{k}$.

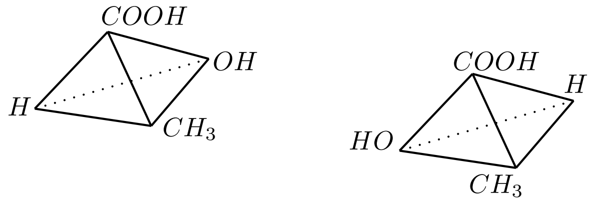
3.24. La orientación del espacio: ternas directas e inversas

Algunas curiosidades

1. La imagen en el espejo de un brazo izquierdo es un brazo derecho.
2. Algunos carteles en las ambulancias, patrulleros policiales, etc. suelen "pintarse al revés" para que puedan ser leídos en los espejos retrovisores de otros vehículos.
3. Al dar vuelta un guante de la mano derecha resulta un guante de la mano izquierda.
4. Si se coloca frente a un espejo un papel sobre el cual se dibujó una circunferencia con una

flecha que indique el sentido antihorario, la imagen que se obtiene es un circunferencia con el sentido horario.

5. Hay sustancias, que a pesar de tener la misma composición química, tienen propiedades diferentes. Observe las siguientes representaciones de dos moléculas. Cada una de ellas parece la imagen especular (deriva de espejo) de la otra y que no hay manera de superponerlas sin “abrir” uno de los tetraedros y “darlo vuelta” como si fuera un guante.



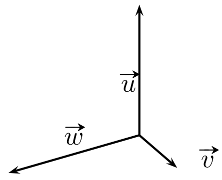
Todos estos fenómenos se relacionan con una propiedad que tienen tanto la recta, el plano como el espacio, y se conoce con el nombre de *orientabilidad.*

Consideremos las ternas (ordenadas) de los versores ortogonales $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ y $\left(\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'}\right)$.

¿Es posible “mover” la terna $\left(\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'}\right)$ como si fuese un cuerpo rígido, de modo tal que coincidan en dirección y sentido $\vec{i}$ con $\vec{i'}$, $\vec{j}$ con $\vec{j'}$ y $\vec{k}$ con $\vec{k'}$?
Observemos que si $\vec{j'}$ coincide con $\vec{j}$ y $\vec{k'}$ con $\vec{k}$ entonces $\vec{i'}$ y $\vec{i}$ tienen sentidos opuestos. Realizando todas las pruebas posibles se verifica que, cada vez que dos pares de versores indicados con la misma letra coinciden los versores del otro par tienen sentidos opuestos. Sin necesidad de realizar estos movimientos, ¿cómo podemos caracterizar la terna ordenada $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ para diferenciarla de $\left(\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'}\right)$?
A tal fin introducimos la regla de la mano derecha. Si colocamos la mano derecha extendida con el pulgar separado de los otro cuatro dedos unidos coincidiendo con el versor $\vec{i}$, de modo que la palma esté dirigida hacia el versor $\vec{j}$, resulta que el dedo pulgar indica el sentido de $\vec{k}$. Decimos, en este caso, que $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ verifica la regla de la mano derecha y constituye una terna orientada en sentido directo. En general, cualquier terna de versores ortogonales que verifica la regla de la mano derecha se dice que es una terna orientada en sentido directo.
Procediendo de la misma manera con la terna $\left(\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'}\right)$ el dedo pulgar indica el sentido opuesto del versor $\vec{k'}$. Por lo tanto $\left(\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'}\right)$ no verifica la regla de la mano derecha. En este caso decimos que $\left(\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'}\right)$ es una terna orientada en sentido inverso, y cualquier terna de versores ortogonales que no verifica la regla de la mano derecha es una terna orientada en sentido inverso.

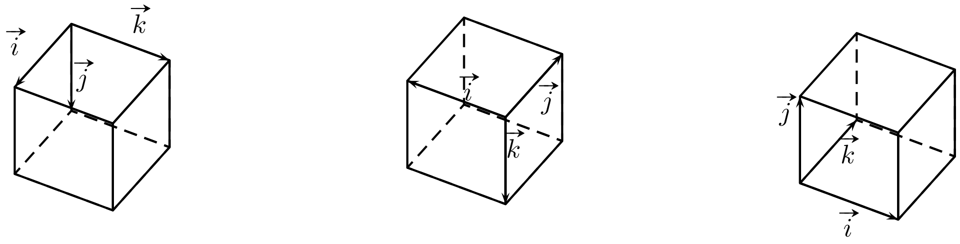
En Física, por ejemplo, para determinar el sentido de la fuerza que actúa sobre una carga eléctrica que se mueve en un campo eléctrico se utiliza la “regla de la mano derecha”.

El concepto de orientación que se acaba de definir puede aplicarse a bases ordenadas cualesquiera (no necesariamente de versores ortogonales). Por ejemplo, la base ordenada $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ es una terna orientada en sentido inverso.



3.25. Propuesta

Clasifica las siguientes ternas según su sentido de orientación.



3.26. Producto vectorial

En numerosas aplicaciones a problemas de Geometría y de Mecánica resulta útil disponer de un método sencillo para obtener un vector perpendicular a cada uno de dos vectores dados. Esto se logra a través de una operación llamada producto vectorial.

Definición. Fijada una terna $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ y dados $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}_3$, se llama producto vectorial de y se simboliza $\vec{u} \wedge \vec{v}$ al vector tal que:

- Si $\vec{u}$ y/o $\vec{v}$ son nulos entonces $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
- Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son no nulos entonces:
  1. $|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,\mathrm{sen}\,(\vec{u}\,\hat{;}\,\vec{v})$.
  2. la dirección de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ es perpendicular a la dirección de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
  3. el sentido de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ es tal que la terna ordenada $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ tiene la misma orientación que la terna $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Consecuencias inmediatas de la definición.

1. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no nulos. Entonces $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} \,||\, \vec{v}$.

   $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow |\vec{u} \wedge \vec{v}| = 0 \Leftrightarrow |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,\mathrm{sen}\,(\vec{u}\,\hat{;}\,\vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{sen}\,(\vec{u}\,\hat{;}\,\vec{v}) = 0 \Leftrightarrow (\vec{u}\,\hat{;}\,\vec{v}) = 0^{\circ} \vee 180^{\circ} \Leftrightarrow \vec{u} \,||\, \vec{v}$.

2. $\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$ (constituye un caso particular de lo probado en 1).

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}, \quad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}.$$

   A modo de ejemplo mostramos la prueba de $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$.
   Hay que probar que $\vec{i} \wedge \vec{j}$ y $\vec{k}$ tienen igual módulo, dirección y sentido.

   - $\left|\vec{i} \wedge \vec{j}\right| = \left|\vec{i}\right|\left|\vec{j}\right| \mathrm{sen}\left(\vec{i}\,\hat{;}\,\vec{j}\right) = 1 \cdot 1 \cdot \mathrm{sen}(90^{\circ}) = 1 = \left|\vec{k}\right|$.
   - $\vec{i} \wedge \vec{j}$ es perpendicular al plano determinado por $\vec{i}$ y por $\vec{j}$, por lo tanto tiene igual dirección que $\vec{k}$.

- Asimismo la terna $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{i} \wedge \vec{j}\right)$ verifica la regla de la mano derecha, por lo tanto $\vec{i} \wedge \vec{j}$ tiene igual sentido que $\vec{k}$.

3. El producto vectorial no es conmutativo.

Algunas propiedades del producto vectorial. Cualesquiera sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ y el escalar α, se verifica:

V-1 $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\left(\vec{v} \wedge \vec{u}\right)$.

V-2 $\alpha \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = (\alpha \cdot \vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\alpha \cdot \vec{v})$.

V-3 $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$.

Le sugerimos probar **V-1** y **V-2**.

3.26.1. Expresión del producto vectorial por componentes

Si $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ entonces aplicando propiedades del producto vectorial y propiedades del producto de un escalar por un vector, resulta:

$$\begin{aligned}
\vec{u} \wedge \vec{v} &= \left(u_1 \cdot \vec{i} + u_2 \cdot \vec{j} + u_3 \cdot \vec{k}\right) \wedge \left(v_1 \cdot \vec{i} + v_2 \cdot \vec{j} + v_3 \cdot \vec{k}\right) \\
&= u_1 v_1 \cdot \left(\vec{i} \wedge \vec{i}\right) + u_1 v_2 \cdot \left(\vec{i} \wedge \vec{j}\right) + u_1 v_3 \cdot \left(\vec{i} \wedge \vec{k}\right) + u_2 v_1 \cdot \left(\vec{j} \wedge \vec{i}\right) + u_2 v_2 \cdot \left(\vec{j} \wedge \vec{j}\right) + \\
&\quad + u_2 v_3 \cdot \left(\vec{j} \wedge \vec{k}\right) + u_3 v_1 \cdot \left(\vec{k} \wedge \vec{i}\right) + u_3 v_2 \cdot \left(\vec{k} \wedge \vec{j}\right) + u_3 v_3 \cdot \left(\vec{k} \wedge \vec{k}\right) \\
&= (u_2 v_3 - u_3 v_2) \cdot \vec{i} + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \cdot \vec{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \cdot \vec{k}.
\end{aligned}$$

Las componentes del vector $\vec{u} \wedge \vec{v}$ pueden calcularse mediante el siguiente determinante simbólico (decimos simbólicos en razón de que los elementos de la primera fila no son números)

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

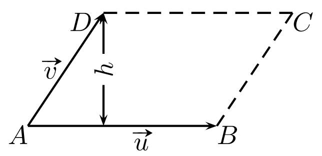
Ejemplo

Si $\vec{u} = (1, 3, -2)$ y $\vec{v} = (2, 1, 1)$ entonces:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} = 5 \cdot \vec{i} - 5 \cdot \vec{j} - 5 \cdot \vec{k}.$$

3.26.2. Interpretación geométrica del módulo del producto vectorial

El módulo del producto vectorial de dos vectores no nulos ni paralelos es igual al área del paralelogramo determinado por ambos vectores.



$$|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \operatorname{sen}(\vec{u}\,\hat{;}\,\vec{v}) = |\vec{u}|\,h = \mathcal{A}(ABCD).$$

3.27. Propuesta

1. Si $\vec{u} = (3, -1, -2)$ y $\vec{v} = (1, 2, -1)$, calcule:

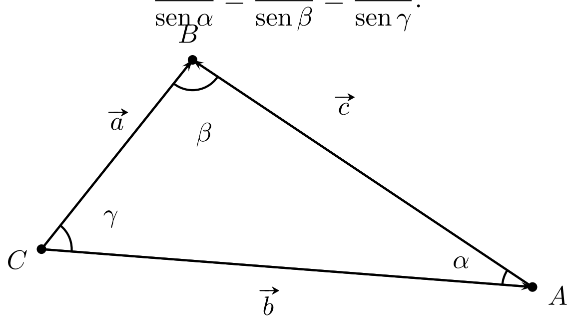
   a) $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

   b) $(2 \cdot \vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{v}$.

   c) $(2 \cdot \vec{u} - \vec{v}) \wedge (2 \cdot \vec{u} + \vec{v})$.

2. Pruebe que

$$\frac{|\vec{a}|}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\left|\vec{b}\right|}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{|\vec{c}|}{\operatorname{sen}\gamma}.$$



3.28. Producto mixto

Definición. Dados los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ de $\mathbb{V}_3$, el producto escalar $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \times \vec{w}$ se llama *producto mixto* entre $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

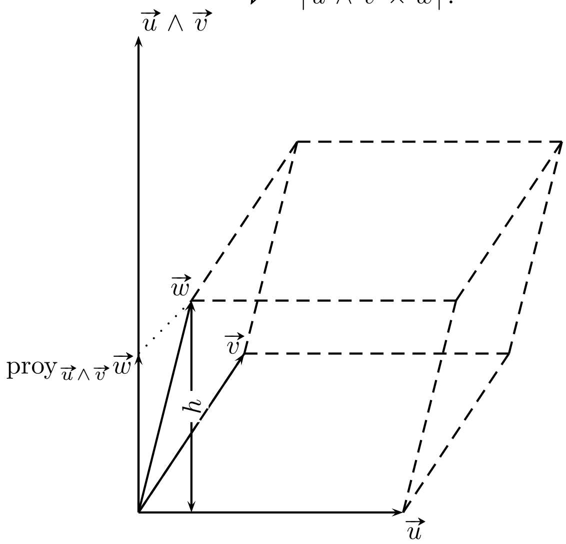
Observaciones

- $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \times \vec{w}$ es un número real.
- El paréntesis es innecesario, pues no hay otra forma de agrupar los vectores para que la expresión tenga sentido.

3.28.1. Volumen de un paralelepípedo

El volumen, $\mathcal{V}$, del paralelepípedo determinado por los vectores (no coplanares) $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es

$$\mathcal{V} = |\vec{u} \wedge \vec{v} \times \vec{w}|.$$



Por definición de producto escalar es

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \times \vec{w} = |\vec{u} \wedge \vec{v}|\,|\vec{w}| \cos\left(\vec{u} \wedge \vec{v}\,\hat{;}\,\vec{w}\right).$$

En consecuencia

$$|\vec{u} \wedge \vec{v} \times \vec{w}| = |\vec{u} \wedge \vec{v}|\,|\vec{w}|\,|\cos\left(\vec{u} \wedge \vec{v}\,\hat{;}\,\vec{w}\right)| = Ah = \mathcal{V}.$$

3.29. Propuesta

1. Dados $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ verifique que:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

2. Verifique que $\vec{u} \wedge \vec{v} \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} \wedge \vec{w}$.

3. Pruebe que los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son coplanares $\Leftrightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} \times \vec{w} = 0$.

4. Analice si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son dos vectores no nulos ni paralelos de $\mathbb{V}_3$ entonces:

   a) $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}\}$ es una base de $\mathbb{V}_3$.

   b) Existen escalares α y β tales que $\vec{u} \wedge \vec{v} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$.

   c) $\vec{u} \times \vec{v} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) \neq 0$.

5. El volumen del tetraedro, tres de cuyos vértices son $A(2, 1, -1)$, $B(3, 0, 1)$ y $C(2, 1, 5)$ es 5 unidades. Determine las coordenadas del cuarto vértice D, sabiendo que pertenece al eje y. ¿Existe solución única?

3.30. Propuesta para la revisión

1. Dibuje los vectores $\vec{u} = (0, 1, 2)$, $\vec{v} = (1, 0, 2)$ y $\vec{w} = (1, 3, 2)$ y calcule:

   a) sus módulos,

   b) las componentes de $\vec{a} = 2 \cdot \vec{u} + \frac{1}{3} \cdot \vec{v} - \vec{w}_0$,

   c) el valor de $b = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{w} \times \vec{w}$.

2. Dados $\vec{u} = (1, -2, 3)$ y $\vec{v} = (2, -1, -2)$ determine:

   a) las componentes del vector $\vec{w} = (\vec{v} \times \vec{u}) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \vec{u} - 6 \cdot \vec{v}_0\right)$,

   b) el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$,

   c) el valor de x para que $\vec{u}$ sea ortogonal a $\vec{c} = (0, 3x, 3)$,

   d) el valor de s para que $\vec{v}$ sea paralelo a $\vec{b} = (-6, 3, 2s)$.

3. Si $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son vectores cualesquiera, pruebe que $\left(\vec{v} - \frac{1}{5} \cdot \vec{w}\right)$ y $(\vec{w} - 5 \cdot \vec{v})$ son vectores paralelos.

4. ¿Qué valores debe tomar el escalar m para que $\vec{u} = 2 \cdot \vec{i} + m \cdot \vec{j}$ sea ortogonal a

   a) $\vec{a} = -3 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j} + \vec{k}$,

   b) $\vec{b} = \vec{k}$.

5. Calcule las componentes de los vectores $\text{proy}_{\vec{v}}\vec{u}$ y $\text{proy}_{\vec{u}}\vec{v}$, siendo y $\vec{u} = (-1, 1, 1)$ y $\vec{v} = (2, 1, -3)$.

6. Calcule el área del triángulo con vértices en $A(5, 3, -1)$, $B(1, -2, 4)$ y $C(6, 4, -2)$.

7. Halle las componentes de $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ sabiendo que: $\vec{v}$ es paralelo al vector con origen en $A(3, -1, 2)$ y extremos en $B(-1, 3, 5)$, $|\vec{v}| = \sqrt{164}$ y $v_1 < 0$.

8. Verifique que $\{(2, -3), (1, 2)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$. Determine luego analíticamente y gráficamente las componentes de $\vec{w} = (9, 4)$ en dicha base.

9. Calcule $\vec{a} \wedge \vec{b} \times \vec{c}$ sabiendo que: $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$, $\left(\vec{a} \,\hat{;}\, \vec{b}\right) = 30^o$, $|\vec{a}| = 6$, $\left|\vec{b}\right| = 3$ y $|\vec{c}| = 3$.

10. Calcule $\left|\vec{a} \wedge \vec{b}\right|$ sabiendo que $|\vec{a}| = 10$, $\left|\vec{b}\right| = 2$ y $\vec{a} \times \vec{b} = 12$.

11. Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos al plano OYZ, $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 4$ y $\vec{u} \times \vec{v} = 0$, ¿qué puede concluir acerca de $\vec{u} \wedge \vec{v}$?

12. Determine si los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son coplanares cuando:

    a) $\vec{u} = (2, 3, -1)$, $\vec{v} = (1, -1, 3)$ y $\vec{w} = (1, 9, -11)$.
    b) $\vec{u} = (3, -2, 1)$, $\vec{v} = (2, 1, 2)$ y $\vec{w} = (3, -1, -2)$.
    c) ¿En qué caso $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ forman una base de $\mathbb{R}^3$.

13. *a*) Verifique que los puntos $A(3, 2, 1)$, $B(-2, -1, 1)$, $C(4, 1, 0)$ y $D(9, 4, 0)$ son coplanares.
    b) ¿Es $\left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right\}$ una base de $\mathbb{R}^3$?
    c) ¿Es $\overrightarrow{AD}$ combinación lineal de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$? En caso afirmativo encuentre los escalares de la combinación lineal.
    d) Calcule el área del cuadrilátero $\overset{\square}{ABCD}$.
    e) Pruebe que los puntos medios de los segmentos AB, BC, CD y DA (en ese orden) forman un paralelogramo.

14. Analice si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.

    a) $|\vec{a}| \cdot \vec{b} + \left|\vec{b}\right| \cdot \vec{a}$ es perpendicular a $|\vec{a}| \cdot \vec{b} - \left|\vec{b}\right| \cdot \vec{a}$.
    b) si $\vec{u} \times \vec{v} = 0$ y $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ entonces al menos uno de los vectores es el vector nulo.
    c) $\left|\vec{a} \wedge \vec{b}\right|^2 + \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)^2 = |\vec{a}|^2 \left|\vec{b}\right|^2$.

15. Encuentre el ángulo entre una diagonal de un cubo y una de sus aristas.

16. Calcule $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}$ sabiendo que $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, $|\vec{a}| = 3$, $\left|\vec{b}\right| = 1$ y $|\vec{c}| = 4$.

4. Bibliografía

1. Fava, N.y Corach, G. (1997) Vectores en el plano y en el espacio. Ministerio de Cultura y Educación de la Nación.

2. Gigena, S. y otros.(2005). Algebra y Geometría Analítica. Universitas.

3. Guzmán, M.y Katz, R.(2001). Vectores.

4. Nasini, A y López, R.(1985). Lecciones de Algebra y Geometría Analítica. (V-1). Euca.

5. Santaló, L.(1981). Vectores y tensores con sus aplicaciones. Eudeba