Álgebra y Geometría Analítica I - LF 2016

Práctica 1: Algunos elementos de la Geometría Analítica

1. *a*) Marcar en un eje los puntos $a(1); b(-2)$ y $c(4)$.

   b) Hallar los puntos simétricos respecto al origen de a, b y c.

   c) Hallar las distancias entre a y b; c y a.

   d) Dados los puntos $p(x_p)$ y $q(x_q)$, hallar las coordenadas de sus simétricos respecto al origen, la distancia de p al origen y la distancia entre p y q.

2. *a*) Marcar en un sistema de coordenadas cartesianas los siguientes puntos:

   $$a(2,3);\ b(0,4);\ c(-2,3);\ d(3,-3);\ e\left(-\frac{1}{2},10\right);\ f(-1,1);\ g(3,-2);\ h\left(-\frac{3}{2},0\right).$$

   b) A partir del gráfico anterior, hallar las coordenadas de los puntos:

   i. Simétricos de a, b y c respecto al eje y.
   ii. Simétricos de b, d y h respecto al eje x.
   iii. Simétricos de a, b y d respecto al origen.
   iv. Proyección de d, h y b sobre el eje y.
   v. Proyección de a, e y h sobre el eje x.

3. Dados los puntos $a(x_a, y_a)$ y $b(x_b, y_b)$, determinar:

   a) Las coordenadas de los puntos simétricos respecto a cada eje coordenado y al origen.

   b) La distancia entre a y b.

4. Para resolver este ejercicio hacer, en cada caso, un dibujo y razonar geométricamente sobre el mismo. Hallar las coordenadas de todos los puntos:

   a) Del semiplano de la izquierda que están a una distancia de 3 del eje x y 2 del eje y.

   b) Que están a una distancia 7 del eje x y 4 del eje y.

   c) Del tercer cuadrante que están a una distancia 5 del origen y a una distancia 3 del eje x.

   d) Que están a una distancia 13 del punto $(1,0)$ y a una distancia 5 del eje x.

   e) De abscisa 10 que están a una distancia 5 del punto $(7,-1)$.

5. En este ejercicio se describen distintos lugares geométricos del plano. Hallar, en cada caso, una o más condiciones algebraicas que sólo cumplen las coordenadas (x, y) de sus puntos.

a) Recta paralela al eje x que contiene al punto $(3, 6)$.

b) Recta paralela al eje y que contiene al punto $(10, 3)$.

c) Eje y.

d) Semiplano de la derecha.

e) Semiplano superior.

f) Semiplano a la izquierda de la recta $x = 2$.

g) Semiplano inferior a la recta $y = 5$.

h) Cuarto cuadrante.

i) Cuadrado de lado 6 con centro en el origen.

j) Circunferencia con centro en el origen y radio 5.

k) Circunferencia con centro en $(7, -1)$ y radio 4.

l) Círculo con centro en el origen y radio 1.

m) Puntos que distan del origen más que 5.

Observando las condiciones obtenidas sacar conclusiones respecto a qué tipo de entes algebraicos caracterizan curvas y superficies (en el plano).

6. *a*) Marcar en un sistema de coordenadas cartesianas los siguientes puntos: $a(1, 1, 1)$; $b(1, -1, 1)$; $c(0, 3, 2)$.

   b) A partir del gráfico anterior, hallar las coordenadas de los siguientes puntos:

      I. Simétricos respecto al plano xy.

      II. Simétricos respecto al eje x.

      III. Simétricos respecto al origen.

      IV. Proyección sobre cada uno de los ejes coordenados.

   c) Hallar, analíticamente, la distancia entre los puntos a y b.

7. Dados los puntos $a(2, 3, 0)$; $b(0, 4, 0)$; $c(-2, 3, 0)$, hallar las coordenadas de sus puntos simétricos respecto al eje y, al eje x y al origen. Comparar los resultados obtenidos con los del ejercicio 2 para los correspondientes puntos a, b y c y sus conclusiones.

8. Para resolver este ejercicio hacer, en cada caso, un dibujo y razonar geométricamente sobre el mismo. Hallar las coordenadas de todos los puntos:

   a) que están a distancia 3 del plano xz;

   b) de coordenadas positivas que están a distancia 2 del plano xy y 3 del plano xz ;

   c) que están a distancia 7 del origen de coordenadas;

   d) de coordenadas positivas que están a distancia 7 del origen de coordenadas, a 2 del plano xy, y a 3 del plano xz.

9. En este ejercicio se describen distintos lugares geométricos del espacio. Hallar, en cada caso, una o más condiciones algebraicas que sólo cumplen las coordenadas (x, y, z) de sus puntos.

a) Plano paralelo al plano xy que contiene al punto $(1, 3, 2)$.

b) Eje coordenado x.

c) Recta paralela al eje coordenado x que contiene al punto $(1, 2, 3)$.

d) Puntos del cubo cuyos vértices son
$(0, 0, 0)$; $(1, 0, 0)$; $(1, 1, 0)$; $(0, 1, 0)$; $(0, 0, 1)$; $(1, 0, 1)$; $(0, 1, 1)$; $(1, 1, 1)$.

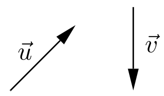
e) Puntos de la superficie esférica con centro en el origen y radio 7.

f) Puntos de la esfera con centro en $(1, 1, 1)$ y radio 2.

g) Puntos que distan del origen más de 3.

Observando las condiciones obtenidas, sacar conclusiones respecto a qué tipo de entes algebraicos caracterizan cuerpos, superficies y curvas en el espacio.

10. Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F).



a) $|\vec{v}| > |\vec{v}_0|$.

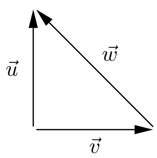
b) Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de la figura son opuestos.

c) Si $|\vec{v}| > |\vec{u}|$ entonces $|\vec{v}_0| > |\vec{u}_0|$.

d) Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos de igual sentido, entonces $\vec{u}_0 = \vec{v}_0$. (¿vale la recíproca?)

e) Si $\vec{u}_0 = -\vec{v}_0$ entonces $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos de sentido opuesto. (¿vale la recíproca?)

11. Siendo $\vec{u}$ y $\vec{v}$ ortogonales y de igual módulo, hallar los ángulos formados por c/u de ellos con el $\vec{w}$ de la figura.



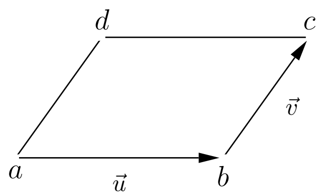
12. Expresar en cada caso los vectores indicados en función de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dados por el gráfico.

$\vec{cd} =$

$\vec{da} =$

$\vec{db} =$

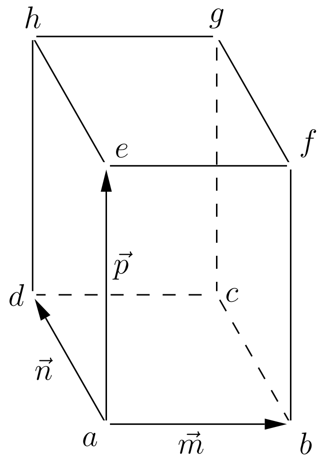
$\vec{ac} =$



13. Sean $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r \in V_2$. Interpretar geométricamente la situación: $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \cdots + \vec{u}_r = \vec{0}$.

14. Los vectores $\vec{m}$, $\vec{n}$ y $\vec{p}$ coinciden con aristas del paralelepípedo recto de la figura. Expresar, en función de sus vértices, los vectores:

a) $\vec{m} + \vec{n}$, *b*) $\vec{m} - \vec{n} - \vec{p}$, *c*) $-\vec{m} - \vec{n} + \vec{p}$, *d*) $\vec{m} + \vec{n} + \vec{p}$.

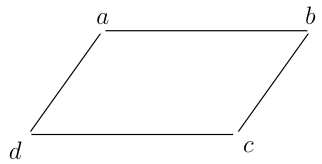


15. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vectores paralelos, de sentidos opuestos y tales que $|\vec{u}| = 5$ y $|\vec{v}| = \frac{4}{3}$. Hallar $\lambda \in \mathbb{R}$ en cada caso, de manera que verifique las condiciones pedidas:

   a) $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ *b*) $\vec{u} = \lambda(-\vec{v})$ *c*) $\vec{u} = \lambda(3\vec{v})$.

   OBSERVACIÓN: *en éste y en los restantes ejercicios en los que se expresan módulos de vectores se sobreentenderá que los mismos corresponden a alguna unidad de medida común.*

16. Demostrar, usando el álgebra de vectores (no gráficamente) que las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio. *Sugerencia:* Si consideramos un paralelogramo como el de la figura, probar que $\overline{ab} + \frac{1}{2}\overline{bd} = \frac{1}{2}\overline{ac}$.



17. Dibujar, en cada caso, un par de vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de modo que el vector proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ resulte:

   a) De igual sentido que $\vec{v}$.

   b) De sentido opuesto a $\vec{v}$.

   c) El vector nulo.

   d) De módulo igual al doble del de $\vec{v}$.

18. *a*) Calcular la proyección de un vector $\vec{a}$ de módulo 3 sobre un vector $\vec{c}$, sabiendo que $(\widehat{\vec{a},\vec{c}}) = 30°$.

   b) Calcular el módulo del vector $\vec{b}$ que determina un ángulo de 45° con $\vec{c}$, sabiendo que $proy_{\vec{c}}\,\vec{a} = proy_{\vec{c}}\,\vec{b}$.

19. Sabiendo que $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$ y $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{\pi}{4}$ calcular:

   a) $(3\vec{u} + \vec{v}) \times (2\vec{u} - \vec{v})$; *b*) $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v})$.

20. Sabiendo que $|\vec{u}| = 5$, $|\vec{v}| = 8$ y $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 60°$, determinar gráfica y analíticamente $|\vec{u} + \vec{v}|$ y $|\vec{u} - \vec{v}|$. *Sugerencia para el razonamiento analítico:* usar el hecho de que $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} + \vec{v})$.

21. En cada caso determinar analíticamente qué condiciones geométricas deben cumplir los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ para que resulte:

    a) $|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u} - \vec{v}|$
    b) $|\vec{u} + \vec{v}| > |\vec{u} - \vec{v}|$
    c) $|\vec{u} + \vec{v}| < |\vec{u} - \vec{v}|$

    Analizar si las condiciones obtenidas son necesarias y/o suficientes e interpretar gráficamente.

22. Analizar si son válidas las siguientes afirmaciones justificando las respuestas.

    a) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} + \vec{c} \Rightarrow \vec{b} = \vec{c}$
    b) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c} \Rightarrow \vec{b} = \vec{c}$
    c) $\exists\, \vec{a}, \vec{b} / \left(\widehat{\vec{a}, \vec{a} + \vec{b}}\right) = 45°$.
    d) $\exists\, \vec{a} / \vec{a} \times \vec{a} = -1$.
    e) $\alpha.\vec{a} = \alpha.\vec{b} \Rightarrow \vec{a} = \vec{b}$
    f) $\alpha.\vec{a} = \beta.\vec{a} \Rightarrow \alpha = \beta$.

23. Dados los puntos $a(2, 3)$; $b(7, 5)$; $c(4, -1)$; $d(9, 1)$; $e(-1, -3)$; $f(-6, -5)$, se pide:

    a) Hallar las componentes de los vectores $\overline{ab}$, $\overline{cd}$, $\overline{ec}$, $\overline{ef}$, $\overline{ed}$, $\overline{ba}$.
    b) Hallar las coordenadas del punto p tal que $\overline{op} = \overline{ab}$ (siendo o el origen de coordenadas).
    c) Graficar todos los puntos y vectores mencionados. ¿Cómo resultan éstos entre sí?
    d) Calcular el módulo de los vectores $\overline{ec}, \overline{ed}$ y $\overline{ef}$.
    e) Calcular las coordenadas del punto m tal que $\overline{am} = \frac{1}{2}\overline{ab}$.

24. Dados los vectores $\vec{a} = (1, -3, 2)$, $\vec{b} = 5\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{c} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$ y $\vec{d} = (-3, 4, -1)$, hallar:

    a) Las componentes de los vectores $3\vec{a} - \vec{b}$, $-\frac{1}{2}\vec{c} + 2\vec{d}$ y $\vec{a} + \vec{b} - (\vec{c} + \vec{d})$.
    b) El vector $\vec{x} \in V_3$ tal que $\vec{b} = \vec{a} + \vec{x}$.
    c) $|\vec{x} + \vec{e}|$ donde $\vec{x}$ es el del apartado *b*) y $\vec{e} = (-6, 3, -2)$.

25. Encontrar cuáles de los siguientes vectores son paralelos a $\vec{u} = (6, -8)$:

$$\vec{v}_1 = (-2, 4), \quad \vec{v}_2 = (-3, 4), \quad \vec{v}_3 = (3, 4), \quad \vec{v}_4 = (1, -\frac{4}{3}),$$
$$\vec{v}_5 = (6, 0), \quad \vec{v}_6 = (-8, 6), \quad \vec{v}_7 = (6, 8), \quad \vec{v}_8 = (12, -16).$$

26. Sabiendo que $p_1(3,5,2)$, $p_2(9,2,\alpha)$ y $d(p_1,p_2)=7$, hallar α

27.
    a) Dados los puntos $p(1,5)$ y $q(4,2)$ determinar las coordenadas de un punto r de modo que los vectores $\overline{pr}$ y $\overline{qr}$ tengan ambos módulo 5. Interpretar gráficamente y encontrar todas las soluciones del problema.
    b) Si en el apartado a) se pide que ambos vectores tengan módulo d, analizar si este problema tiene o no solución para todo valor positivo de d y para los valores de d para los cuales exista dicha solución, calcularla.

28. Si $\vec{x}=4\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{a}=2\vec{u}-\vec{v}$, $\vec{b}=\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$ y $\vec{c}=5\vec{a}+3\vec{w}$, mostrar que $\vec{x}$ es combinación lineal de $\vec{u},\vec{v}$ y $\vec{w}$. ¿Con qué escalares?

29.
    a) Sabiendo que $\overline{op}=\overline{rs}=\overline{to}=(2,3)$, $o(0,0)$ y $r(3,5)$, hallar las coordenadas de p, s y t.
    b) Sabiendo que $\overline{op}=\overline{rs}=\overline{to}=(2,5,-1)$, $o(0,0,0)$ y $r(6,0,-4)$, hallar las coordenadas de p, s y t.

30.
    a) El centro de gravedad de una varilla homogénea está en el punto $c(1,-1,5)$ y uno de sus extremos en $a(-2,-1,7)$. Averiguar las coordenadas del otro extremo. (Obs.: el centro de gravedad de una varilla homogénea se encuentra en su centro, punto medio de sus extremos).
    b) Determinar las coordenadas de los extremos del segmento que es dividido en tres partes iguales por los puntos $b(2,0,2)$ y $d(5,-2,0)$.

31. Dados $\vec{u}=(1,1,1)$, $\vec{v}=(0,1,1)$ y $\vec{w}=(2,1,1)$ se pide:
    a) Encontrar $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha\neq 0$ tal que $\alpha\vec{u}-\vec{v}-\vec{w}=\vec{0}$.
    b) Deducir que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ no es base de V_3.
    c) Analizar si $\vec{s}=(1,2,2)$ y $\vec{t}=(1,2,3)$ son combinación lineal de $\vec{u},\vec{v}$ y $\vec{w}$.

32.
    a) Encontrar las componentes del vector $\vec{u}=\vec{i}+10\vec{j}$ en la base $(\vec{v}_1,\vec{v}_2)$, siendo $\vec{v}_1=(2,3)$ y $\vec{v}_2=(5,-1)$.
    b) Verificar gráficamente que los vectores $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{v}=2\vec{i}$ y $\vec{w}=\vec{j}-\vec{k}$ forman una base de V_3 y hallar las componentes del vector $\vec{t}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$ en dicha base.

33.
    a) Hallar los cosenos directores y el versor asociado al vector $\vec{u}=(-3,7,2)$.
    b) Ídem a) para $\vec{v}=\frac{1}{2}\vec{i}-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$.
    c) Hallar además el vector $\vec{w}$ que tiene los mismos cosenos directores que $\vec{v}$ y módulo 14.

34. Analizar si un vector $\vec{u}$ de módulo 3 puede formar con los versores canónicos los siguientes ángulos:
    a) $(\widehat{\vec{u},\vec{i}})=45^\circ$, $(\widehat{\vec{u},\vec{j}})=135^\circ$, $(\widehat{\vec{u},\vec{k}})=60^\circ$.
    b) $(\widehat{\vec{u},\vec{i}})=90^\circ$, $(\widehat{\vec{u},\vec{j}})=150^\circ$, $(\widehat{\vec{u},\vec{k}})=60^\circ$.

c) $(\vec{u},\vec{i}) = (\vec{u},\vec{j}) = (\vec{u},\vec{k})$.

En los casos afirmativos hallar las componentes de $\vec{u}$.

35. Determinar si existen uno o más vectores de módulo 5 que forman 45° con el versor $\vec{i}$ y 120° con el versor $\vec{k}$. En caso afirmativo, determinar las componentes de cada uno.

36. Hallar las componentes del vector $\vec{v}$ de módulo 32 que es colineal con $\vec{a} = (3, -2, -\frac{1}{3})$ y que forma un ángulo agudo con el versor $\vec{j}$.

37. a) Mostrar que el ángulo que forman entre sí los vectores $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ es el doble del ángulo que forman entre sí los vectores $\vec{c} = \vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{d} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + 5\vec{k}$.

    b) Calcular $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{c} \times \vec{d}$, $(\vec{a} + 3\vec{c}) \times \vec{d}$, $proy_{\vec{d}}(\vec{a} + 3\vec{c})$ y $proy_{\vec{j}}\vec{c}$.

38. Dado $\vec{u} = (2, 3)$, hallar un vector cuya primera componente sea 2 y tal que su proyección sobre $\vec{u}$ sea 4.

39. a) Hallar las coordenadas de los puntos que se indican cuando se efectúa una traslación de ejes a un nuevo punto origen o', siendo:

$$a(2, -1),\ b(-3, 1),\ c(2, 1),\ d(-1, -4),\ o'(-1, 2).$$

    b) Hallar las coordenadas de los puntos del ítem a) respecto del sistema de referencia $o'x''y''$ que se obtiene al rotar $o'x'y'$ un ángulo $\alpha = 45°$.

40. Sean $a(-1, 2)$, $b(1, 1)$, $\vec{u} = (\sqrt{3} + 1, 1)$, $\vec{v} = (2, -3)$. Hallar las componentes de los vectores que se indican cuando se efectúa una traslación de ejes al nuevo punto origen $o'(1, 1)$ y se efectúa una rotación de los ejes en un ángulo $\alpha = 30°$

a) $\vec{ab}$ b) $\vec{u}$ c) $\vec{v}$.

41. Hallar el ángulo α de rotación para que:

    a) El vector $\vec{u} = (2, 2)$ sea paralelo al eje ox'

    b) El vector $\vec{v} = (-\sqrt{3}, 1)$ sea paralelo al eje oy'.