

QUANTIZED BOND GRAPH: UNA APROXIMACIÓN PARA LA SIMULACIÓN DE SISTEMAS FÍSICOS POR EVENTOS DISCRETOS.

Ernesto Kofman

Departamento de Electrónica. Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura.
Universidad Nacional de Rosario. Becario del CONICET. Riobamba 245 bis – Rosario -
e-mail: ekofman@eie.fceia.unr.edu.ar

Resumen: Se presenta una nueva clase de Bond Graphs, denominados Quantized Bond Graph. Se demuestra como estos sistemas pueden ser simulados exactamente por una estructura DEVS y como un Bond Graph estándar representando un sistema físico puede ser aproximado por un Quantized Bond Graph para su simulación. Se muestra también que las causalidades derivativas desaparecen de esta clase de modelos, dando lugar a conmutaciones causales similares a las que aparecen en Switched Bond Graphs. Finalmente, se presentan resultados de simulación obtenidos por esta técnica mediante un software propio desarrollado a tal fin.

Keywords: Dynamic Systems, Discrete Event Systems, Simulation, Bond Graphs.

1. INTRODUCCIÓN

La simulación de sistemas dinámicos representados mediante Bond Graph (BG) es tratada en numerosos trabajos (Cellier, 1991; Karnopp and Rosenberg, 1983). La principal diferencia respecto a la simulación de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (ODE's) es la frecuente aparición de singularidades estructurales que resultan en Sistemas de Ecuaciones Algebraico Diferenciales.

Al igual que en la simulación de ODE's, en la simulación de BG aparecen los típicos inconvenientes frente a los problemas Stiff. En trabajos recientes se han mostrado ciertas ventajas al simular esta clase de problemas con un enfoque de eventos discretos (Giambiasi, 1998, Zeigler, *et al.*, 2000, Kofman, 2000).

La idea de simular Bond Graphs por eventos discretos es desarrollada por Naamane, *et al.* (1999), a través de la aproximación de las trayectorias continuas de los BG por trayectorias seccionalmente polinomiales. En este trabajo, se propone una metodología diferente, consistente en la cuantificación de los almacenadores y fuentes del BG transformándolo en un sistema cuantificado simulable. De esta manera, es posible estudiar y deducir propiedades sobre el sistema cuantificado resultante que luego se traducirán en

importantes propiedades del método de simulación, que permitirán garantizar convergencia y darán una importante simplificación para el tratamiento de sistemas con ciertos casos de singularidades estructurales.

2. QUANTIZED BOND GRAPH.

Se presentará un ejemplo muy simple para introducir la definición de los Quantized Bond Graphs (QBG).

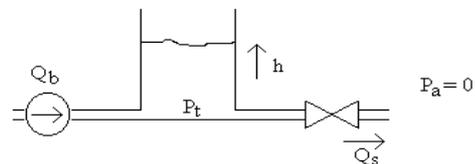


Fig. 1. Sistema hidráulico

El sistema hidráulico de la Figura 1 puede representarse mediante el Bond Graph de la Figura 2. Suponiendo que el tanque tiene area constante (A) y la densidad del fluido es ρ , el volumen V en el tanque y la presión P_t se relacionan según una ley lineal. Una aproximación a dicha ley, puede ser dada por la curva de la Figura 3 (función seccionalmente constante).

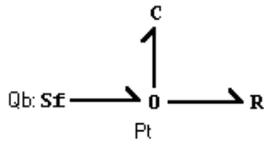


Fig. 2. Bond Graph del sistema hidráulico

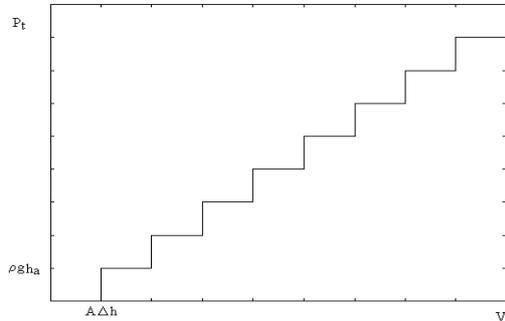


Fig. 3. Característica "cuantificada" de la ley P_t vs. V .

Un tanque con una relación P_t vs. V que puede aproximarse por la curva de la Figura 3 puede ser el de la Figura 4, asumiendo que $\Delta h \ll h_a$, y $V_a \gg V_b$.

El Bond Graph del sistema con este nuevo tanque en lugar del anterior, sigue siendo el mismo (Figura 2). Lo único que cambia es la relación entre el esfuerzo (e) y el desplazamiento (q) del capacitor que representa al tanque.

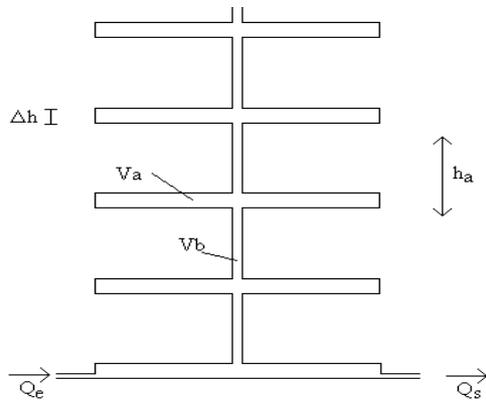


Fig. 4. Un tanque "cuantificado".

Por motivos que luego serán detallados, a la curva de la Figura 3 se le agrega una ventana de histéresis, obteniéndose la curva de la Figura 5.

Se define entonces como capacitor cuantificado a un capacitor cuya relación e vs. q tiene la forma de la Figura 5 (Relación de cuantificación con histéresis).

De manera análoga, se define una inercia cuantificada como una inercia en la cual la relación f vs. p es una relación de cuantificación con histéresis.

Por otro lado, se denominará fuente de esfuerzo cuantificada a una fuente de esfuerzo en la que la trayectoria del esfuerzo sea una función

seccionalmente constante y acotada y análogamente se define una fuente de flujo cuantificada.

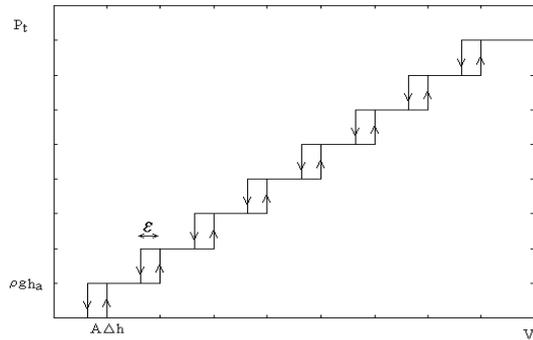


Fig. 5. P_t vs. V . con el agregado de histéresis.

Finalmente, se define como Quantized Bond Graph a un Bond Graph en el cual todos los almacenadores y fuentes son cuantificados.

Es importante notar que no hay sistemas reales representables como QBG. Sin embargo, un Bond Graph estándar puede ser aproximado por un QBG para su simulación. La forma de realizar esta aproximación es mediante la cuantificación de los almacenadores y fuentes.

De esta forma, dado un Bond Graph estándar, se define como QBG asociado al anterior al QBG cuyos almacenadores y fuentes son versiones cuantificadas de los almacenadores y fuentes del primero (Fig. 6).

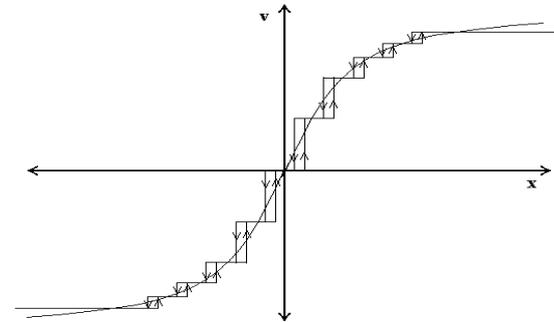


Fig. 6. Característica de un almacenador (continua) y característica del almacenador cuantificado asociado.

La definición formal de la característica de un almacenador cuantificado, esto es, una característica de cuantificación con histéresis, es la que sigue:

Sean los conjuntos finitos:

$$A_c = \{a_0, a_1, \dots, a_r, a_{r+1}\}, B_c = \{b_0, \dots, b_r\}, \text{ donde:}$$

$$a_0 = -\infty \quad a_{r+1} = \infty; \quad a_i < a_{i+1} \quad i = 0, \dots, r \quad \{1\}$$

$$\text{y } b_i < b_{i+1} \quad i = 0, \dots, r-1$$

A partir de estos conjuntos se define la siguiente función seccionalmente constante:

$$B^*(a) = b_i \quad \text{si } a \in [a_i, a_{i+1}); \quad \{2\}$$

y luego

$$B(a, c) = \begin{cases} B^*(a) & \text{si } B^*(a) = B^*(a + \epsilon) \\ B^*(c) & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \{3\}$$

Cuando la variable a sea una función del tiempo y la variable c sea $c = a(t_1^+)$, siendo t_1 el último instante de tiempo para el que $B^*(a)$ cambió, la función $B(a, c)$ se denominará función de cuantificación con histéresis. Debe cumplirse además que $\epsilon > 0$.

Sea una función de cuantificación con histéresis que cumple:

$$B(b, c) = b \quad \forall c, b \in B \quad \{4\}$$

Luego se define como característica del almacenador cuantificado a la función:

$$h(b, c) = v[B(b, c)] \quad \{5\}$$

La función $v(x)$ es la que vincula las variable de energía y de potencia en el almacenador (característica del almacenador continuo). La función h es entonces la característica del almacenador cuantificado asociado.

3. ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS QUANTIZED BOND GRAPHS.

Teorema 1: En un Quantized Bond Graph sin almacenadores acoplados en el cual los elementos pasivos y estructurales definen relaciones continuas y acotadas entre las variables que vinculan, las trayectorias de todas las *variables de potencia* son seccionalmente constantes.

Demostración: Bajo las hipótesis mencionadas, el QBG define un sistema de ecuaciones diferenciales (Rosenberg and Karnopp, 1983) de la forma:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n, w_1, \dots, w_m) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n, w_1, \dots, w_m) \end{cases} \quad \{6\}$$

En {7}, x_i son las variables de energía de los almacenadores. La forma en que cada una de estas variables se relaciona con el resto del sistema es siempre a través de la relación de cuantificación que la vincula con la variable de potencia correspondiente v_i . Por eso es posible escribir:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f'_1(v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f'_n(v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m) \end{cases} \quad \{7\}$$

Las funciones f'_i , bajo las hipótesis mencionadas, son continuas y acotadas en cualquier dominio cerrado.

Como consecuencia de todo esto, se demuestra que las trayectorias de las v_i son seccionalmente constantes (Kofman, 2000).

Cualquier otra variable de potencia puede calcularse estáticamente a partir de las v_i . Luego todas las variables de potencia tendrán trayectorias seccionalmente constantes.

Teorema 2: En un QBG que cumple todas las hipótesis del Teorema 1, las trayectorias de las *variables de energía* son seccionalmente lineales.

Demostración: es inmediata partiendo del Teorema 1.

Observación: La necesidad de la utilización de histéresis en la cuantificación se debe a que de no estar presente la misma, puede producirse un número infinito de transiciones en un tiempo finito e incluso nulo, lo que evidentemente resultará en una trayectoria que no es seccionalmente constante (y además hará que el sistema sea no simulable).

Los sistemas cuyas entradas y salidas tienen trayectorias seccionalmente constantes, pueden simularse exactamente por una estructura DEVS (Zeigler, *et al.*, 2000). Como consecuencia de los Teoremas 1 y 2, los Quantized Bond Graph son simulables de esta forma.

4. MODELO DEVS ASOCIADO A UN QUANTIZED BOND GRAPH.

La simulación via DEVS de sistemas con trayectorias de entrada y salida seccionalmente constantes requiere que estas sean representadas mediante una trayectoria de eventos, de modo tal que se asocie un evento a cada cambio en el valor de la trayectoria original.

Se definirá el modelo DEVS (Zeigler, 1976) como un acoplamiento de modelos asociados a componentes elementales de QBG, esto es, inercias cuantificadas, capacitores cuantificados, resistores y componentes estructurales (transformadores, giradores y vínculos uno y cero).

4.1 DEVS asociado a un capacitor cuantificado.

Sea un capacitor cuantificado con la característica dada por {6}. El modelo DEVS asociado es:

$C_d = \langle X, Y, S, \mathbf{d}_{int}, \mathbf{d}_{ext}, \mathbf{I}, ta \rangle$ donde:
 $X = \{("in_i", f_d)\}$ (conjunto de puertos y valores de entrada); $f_d \in \mathfrak{R}$
 $Y = \{("out_i", e_d)\}$ (conjunto de puertos y valores de salida); $e_d \in \mathfrak{R}$
 $S = \{(w, x, \mathbf{s})\}$ (conjunto de valores del estado)
donde $x, w \in \mathfrak{R}$; $\mathbf{s} \in \mathfrak{R}_0^+$
 $\mathbf{d}_{int}(w, x, \mathbf{s}) = (w, x + \mathbf{s}w, \mathbf{s}')$, (función de transición interna), donde:

$$\mathbf{s}' = \begin{cases} \frac{x^{i+1} - (x + \mathbf{s} \cdot w)}{w} & \text{si } w > 0 \\ \frac{\mathbf{e}}{|w|} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

siendo x^{i+1} el siguiente valor cuántico de $x' = x^i$ en este caso y \mathbf{e} el ancho de la ventana de histéresis.

$\mathbf{d}_{\text{ext}}[(w, x, \mathbf{s}), f_d, e] = (f_d, x', \mathbf{s}')$ (función de transición externa), donde

$$x' = x + w \cdot e; \text{ y } \mathbf{s}' = \begin{cases} \frac{x^{i+1} - x'}{f_d} & \text{si } f_d > 0 \\ \frac{x' - x^i + \mathbf{e}}{|f_d|} & \text{si } f_d < 0 \\ \infty & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$\mathbf{I}(w, x, \mathbf{s}) = (\text{"out}_i, v(x + \mathbf{s} w))$ (función de salida)

$ta(w, x, \mathbf{s}) = \mathbf{s}$ (función de avance de tiempo)

Esa estructura DEVS simula exactamente el funcionamiento de un capacitor cuantificado con la condición de que la trayectoria de flujo sea seccionalmente constante y la causalidad sea integral.

4.2 DEVS asociado a un Resistor

Sea un resistor causalizado de forma tal que calcule esfuerzo, a través de la característica dada por la función E . El modelo DEVS asociado es:

$R = \langle X, Y, S, \mathbf{d}_{\text{int}}, \mathbf{d}_{\text{ext}}, \mathbf{I}, ta \rangle$, donde

X e Y están definidos como antes.

$S = \{(w, \mathbf{s})\}$ con $w \in \mathfrak{R}$; $\mathbf{s} \in \mathfrak{R}_0^+$

$\mathbf{d}_{\text{int}}(w, \mathbf{s}) = (w, \infty)$

$\mathbf{d}_{\text{ext}}[(w, \mathbf{s}), (\text{"in}_i, f_d), e] = (f_d, 0)$

$\mathbf{I}(w, \mathbf{s}) = (\text{"out}_i, E(w))$

$ta(w, \mathbf{s}) = \mathbf{s}$

Si el resistor se causaliza calculando flujo el modelo es muy similar.

4.3 DEVS asociado a un vínculo uno

Sea un vínculo uno que tiene asociados N enlaces (bonds), siendo el j -ésimo el que impone el flujo. La estructura DEVS asociada es la siguiente:

$U = \langle X, Y, S, \mathbf{d}_{\text{int}}, \mathbf{d}_{\text{ext}}, \mathbf{I}, ta \rangle$ donde

$X = \{(\text{"in}_i, x_i), i=1 \dots N,$

$Y = \{(\text{"out}_j, y_j), (\text{"out}_f, y_f)\}$

$S = \{s_1, \dots, s_N, \mathbf{s}, port\}$

$s_i, x_i, y_i \in \mathfrak{R}$; $\mathbf{s}_d \in \{0, \infty\}$ $port \in \{1, \dots, N\}$

$\mathbf{d}_{\text{int}}(s_1, \dots, s_N, \mathbf{s}, port) = (s_1, \dots, s_N, \infty, port)$

$\mathbf{d}_{\text{ext}}((s_1, \dots, s_N, \mathbf{s}, port), (\text{"in}_k, x_k), e) =$

$(s_1, \dots, s'_k, \dots, s_N, 0, k)$

donde $s'_k = x_k$

$\mathbf{I}(s_1, \dots, s_N, \mathbf{s}, j) = (\text{"out}_f, s_j)$

$\mathbf{I}(s_1, \dots, s_N, \mathbf{s}, port^1 j) = (\text{"out}_j, \sum_{i=1, i \neq j}^N \pm s_i)$

donde los signos de la sumatoria son positivos o negativos según los enlaces sean salientes o entrantes al vínculo.

$ta(s_1, \dots, s_N, \mathbf{s}, port) = \mathbf{s}$

La representación de las restantes componentes es análoga a las ya vistas: la de la inercia es muy similar a la del capacitor, y las restantes componentes estructurales (girador, transformador y vínculo cero) tienen representaciones similares a la del vínculo uno. La representación de las fuentes en tanto es trivial. Solo resta definir la representación del acoplamiento:

4.4 Representación del acoplamiento.

La representación es la siguiente:

$NM = \langle X, Y, D, \{M_d \mid d \in D\}, Select, EIC, EOC, IC \rangle$

X e Y son vacíos (no se definió entradas o salidas externas al modelo), y por lo tanto EOC y EIC (External Input/Output Coupling) son también vacíos.

D es el conjunto de referencias, y está formado por elementos que identifican cada componente del Bond Graph. A su vez, cada componente está definido por una estructura M_d como las vistas para el capacitor, resistor y vínculo uno.

El conjunto IC (Internal Coupling) queda definido como sigue:

Sea BN el conjunto de bonds en el QBG. $BN = \{(r_j, s_k)\}$, Donde el par ordenado (r_j, s_k) indica la presencia de un enlace entre el puerto j del elemento r y el puerto k del elemento s , (r y s pertenecen a D), causalizado de modo tal que r calcula el esfuerzo. Para cada elemento de BN se define:

$ic1_{r_j, s_k} = ((r, \text{"out}_{j,r}), (s, \text{"in}_{k,s}))$

si s no es una fuente y r no es un vínculo uno

$ic1_{r_j, s_k} = ((r, \text{"out}_{f,r}), (s, \text{"in}_{k,s}))$

si s no es una fuente y r es un vínculo uno

Si s es una fuente (de flujo) el elemento $ic1_{r_j, s_k}$ no existe.

$ic2_{r_j, s_k} = ((s, \text{"out}_{k,s}), (r, \text{"in}_{j,r}))$

si r no es una fuente y s no es un vínculo cero

$ic2_{r_j, s_k} = ((r, \text{"out}_{f,r}), (s, \text{"in}_{j,r}))$

si r no es una fuente y s es un vínculo cero

Si r es una fuente (de esfuerzo) el elemento $ic2_{r_j, s_k}$ no existe.

Luego, el conjunto de acoplamiento interno es:

$IC = \{ic1_{r_j, s_k}\} \cup \{ic2_{r_j, s_k}\}$

Finalmente, la función $Select$ debe dar prioridad a los elementos estructurales cuando haya agendados

eventos simultáneos, ya que los mismos podrían perder algún evento de salida en dichos casos.

En ausencia de disipadores acoplados (lazos algebraicos) y de almacenadores acoplados, el modelo definido simula exactamente el funcionamiento de un QBG.

5. ALMACENADORES ACOPLADOS EN QUANTIZED BOND GRAPHS.

La presencia de almacenadores acoplados en los Bond Graphs continuos implica la aparición de causalidades derivativas en algunos de estos almacenadores. La simulación de sistemas de esta clase, implica la necesidad de contar con herramientas similares a las necesarias para resolver lazos algebraicos. Como se verá en el siguiente ejemplo, en QBG esta dificultad desaparece.

En la Fig. 7 se observa un sistema hidráulico y su respectivo Bond Graph. Puede observarse en dicho Bond Graph el acoplamiento entre ambos capacitores

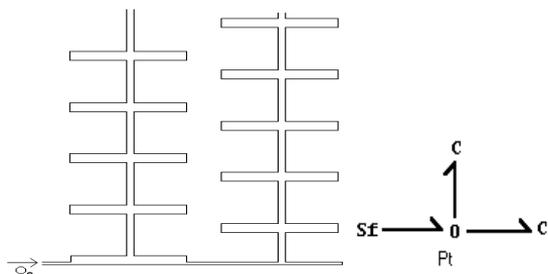


Fig. 7. Sistema cuantificado y su Bond Graph con almacenadores acoplados.

En sistemas continuos, uno de los capacitores debería causalizarse en forma derivativa ya que ambos no pueden imponer el esfuerzo a la vez por ser éste común a ambos.

Sin embargo, el sistema de la Fig. 7 funciona distinto: Suponiendo inicialmente descargados ambos tanques, el de la izquierda comienza a cargarse, con presión nula, mientras que en el otro el caudal que entra es nulo. Cuando termina de llenarse el primer compartimento del primer tanque, el otro comienza a llenar su segundo compartimento (imponiendo una presión acorde a la altura del mismo), mientras que el caudal del primer tanque es nulo ahora. Una vez que este se llena, otra vez comienza a llenarse el primero y así sucesivamente.

Este funcionamiento indica que la causalidad integral se va alternando entre uno y otro almacenador. Este funcionamiento con causalidad conmutada es muy parecido al de los Switched Bond Graphs, solo que en estos últimos hay un elemento (Switch) que impone flujo o esfuerzo nulo, mientras que aquí hay elementos que imponen flujo nulo o un valor cuantificado de esfuerzo, (para los capacitores).

Esta idea, se puede generalizar para el caso de múltiples almacenadores acoplados, incluyendo capacitores e inercias, resultando en un modelo con muchas posibles situaciones causales acorde a los valores de las variables de energía. La presencia de histéresis en dichos almacenadores (fundamental para la implementación de la simulación), no provoca modificación alguna en el razonamiento hecho.

De todos modos, la implementación de un modelo simulable capaz de tratar con estas conmutaciones causales es algo más complejo que el modelo desarrollado en la sección anterior, ya que dichas conmutaciones afectan no solamente a los almacenadores sino también a las componentes estructurales a las que están ligados.

6. CONSIDERACIONES SOBRE ESTABILIDAD DE LOS QUANTIZED BOND GRAPHS

Dado un sistema continuo se puede asegurar, bajo ciertas condiciones, que es posible encontrar una cuantificación sobre los estados que define un sistema cuantificado que conserva ciertas propiedades de estabilidad del sistema original (Kofman, 2000). Estas propiedades son las siguientes: Si el sistema original es asintóticamente estable y tiene como punto de equilibrio al origen, el sistema cuantificado tendrá también como punto de equilibrio al origen y convergerá de manera asintótica a una región arbitraria que contiene al origen.

En virtud de la ecuación {7}, y bajo las hipótesis usadas en el teorema 1, los Quantized Bond Graphs definen un sistema de estados cuantificados. De esta forma, se puede extender el resultado mencionado en el párrafo anterior a los QBG.

7. EJEMPLOS Y RESULTADOS

El método presentado fue implementado en una versión del software Power DynaMo (Kofman y Junco, 1999), que permite editar y simular los BG utilizando diferentes formas de cuantificación.

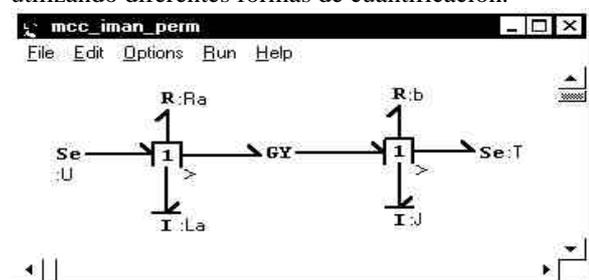


Fig. 8. BG del motor de cc. con imán permanente.

Se simuló el arranque en vacío de un motor de imán permanente y el agregado de la carga un segundo después (Figura 8). Los parámetros utilizados fueron: $Ra = 0.1$; $La = 10 \times 10^{-6}$; $b = 1$; $J = 1$; $U = 10$; $T = 10$ (no son parámetros realistas). Para la simulación se

adoptaron intervalos uniformes de cuantificación de 10×10^{-6} para la inductancia y 0.1 para la inercia.

Los resultados de la simulación se encuentran en las figuras 9, 10 y 11. La comparación de las figuras 10 y 11, muestra que el sistema es fuertemente stiff.

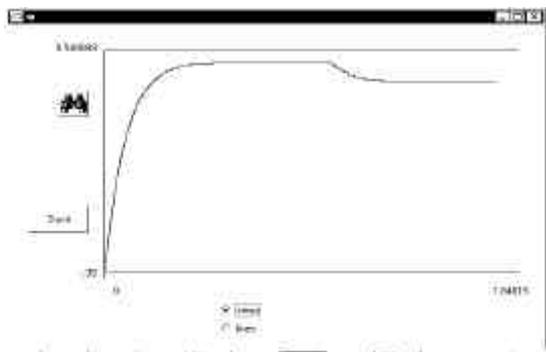


Fig. 9. Trayectoria de la velocidad

El número de transiciones internas realizadas por los modelos DEVS de los almacenadores fue de 203 (inductancia) y 102 (inercia). O sea, en total se realizaron 305 pasos para completar la simulación.

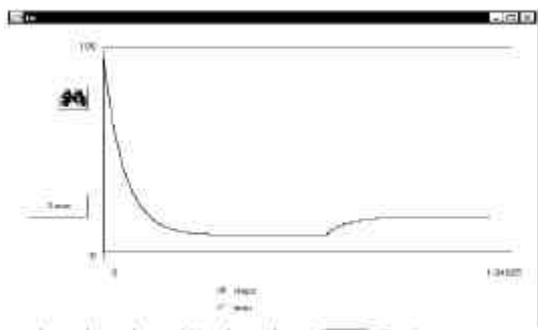


Fig. 10. Trayectoria de la corriente de armadura.

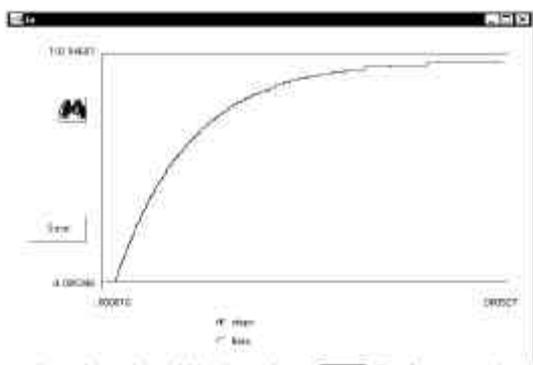


Fig. 11. Ampliación de los primeros $500 \mu s$ de la trayectoria de la corriente de armadura.

Para obtener una precisión similar utilizando el método de Euler son necesarios mas de 10000 pasos, mientras que Runge-Kutta necesita mas de 8000 pasos. Un algoritmo de paso variable como Runge-Kutta 4-5 (Press, *et al.*, 1986) (ode45 de Matlab), necesita mas de 6000 pasos.

El ode15s de Matlab puede lograr un resultado similar con solo 70 pasos. Debe tenerse en cuenta que se está comparando un método implícito de quinto orden contra un simple método explícito de primer orden como el presentado.

Al comparar métodos de eventos discretos con métodos de tiempo discreto hay que tener en cuenta también el hecho que en cada paso que realiza el sistema de tiempo discreto se realizan cálculos sobre todos los estados, mientras que en el de eventos discretos, sólo se realizan cálculos sobre el estado que realiza la transición interna y sobre los estados en los que este ejerce influencia directa, lo que en sistemas muy grandes implica una ventaja considerable.

8. CONCLUSIONES

Se presentó una nueva clase de Bond Graphs, que da lugar a una especificación exactamente simulable bajo un enfoque de eventos discretos. En base a esta especificación se construyó un modelo genérico DEVS capaz de simular dicha especificación.

Se discutió luego el comportamiento de los QBG en presencia de almacenadores acoplados, evidenciando una importante simplificación de dicho problema.

Finalmente, se presentó un ejemplo de aplicación, donde se evidencian algunas ventajas frente a los métodos de simulación clásicos.

REFERENCIAS

- Cellier, F. (1991), *Continuous System Modeling*, Springer-Verlag, New York.
- Giambiasi, N. (1998). Abstraction à événements discrets de systèmes dynamiques. *APII-Jesa*. Vol.32, No.3, pp275-311.
- Kofman, E. y S. Junco (1999). Un ambiente computacional para la modelización de sistemas dinámicos no lineales con Bond Graphs. *Anales de VIII RPIC*. Vol.3, 16-10.
- Kofman, E. (2000). Simulación de sistemas dinámicos por cuantificación de estados. *Enviado para presentación en AADECA-2000*.
- Naamane, A., A. Damiba and N. Giambiasi (1999). Abstraction à événements discrets de modèles hybrides à base de Bond Graphs. *Technique et science informatiques*, Vol. 15, No.9, pp 1-30.
- Press, W.H., B.P. Flannery, S.A. Teukolsky and W.T. Vetterling (1986). *Numerical Recipes*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Rosenberg, R. and D. Karnopp (1983). *Introduction to Physical System Dynamics*. McGraw Hill.
- Zeigler, B (1976). *Theory of Modeling and Simulation*. Wiley Interscience, New York.
- Zeigler, B., H. Praehofer and T.G. Kim (2000). *Theory of Modeling and Simulation second ed.*, Academic Press, New York.